88-98-52-94
(163.5)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10Е-2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Качалина Михаила Юрьевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«5» апреля 2026 года

Подпись участника
КМЮ

33-93-52-94
(163.5)

черновик

$3^{\sin x} = a \quad 5^{\sin x} = b$

$a^2+b^2+1 = ab+a+b$

$a^2+b^2+1+ab-a-b = ab$

$a=b=1$

$(3^t+5^t-1)^2 = 15^t$

$x^3-(10+\sqrt{2})x^2+(22+10\sqrt{2})x-22\sqrt{2}=0$

$x_1x_2x_3 = 22\sqrt{2}$

$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 = 22+10\sqrt{2}$

$x_1+x_2+x_3 = 10+\sqrt{2}$

$(a+1)(b+1)(c+1) = (ab+a+b+1)(c+1) = abc+cab+ac+a+bc+b+c+1 =$

$= abc+ab+ac+bc+a+b+c+1$

$22\sqrt{2}+22+10\sqrt{2}+10+\sqrt{2}+1 = 33+33\sqrt{2}$

$3^{2t}+5^{2t}+1 = 15^t+3^t+5^t$

$t \in [-1;1]$

$-3,15 < -\pi$

$9^t+25^t+1 = 15^t+3^t+5^t$

$t = \sin x = 0$

$x = \pi n$

$S = \frac{x^2}{2\sin 2\alpha}$

$AC = ?, \ BD = x$

$AC = \frac{x}{\sin 2\alpha}$

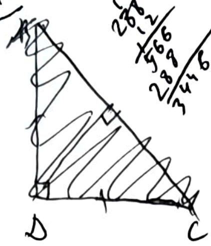
$180-2\alpha < 90$

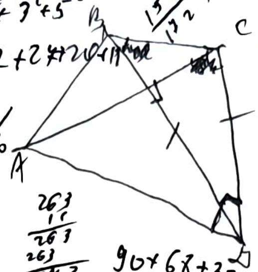
$2\alpha > 90$

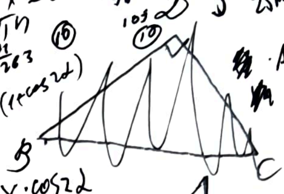
$\alpha \geq 45°$

$BO = \frac{x}{2}(1+\cos 2\alpha)$

$1+4+9+16+25+36+35+32+27+20+11$







$OD = -x \cdot \cos 2\alpha$

$90+68+38+20$

$\cos(180-2\alpha) = -\cos 2\alpha$

$\frac{(x+12\cos 2\alpha)\sqrt{x^2+\frac{x^2}{\sin^2 2\alpha}}}{2}$

$110+106 = 216$

$-x\cos 2\alpha = 12 \cdot \sin 2\alpha$

$\frac{AC \cdot BD}{2}$

$x = AD \cdot \cos(2\alpha - 90)$

$x = AD \cdot \sin 2\alpha$

$-x\left(\frac{72}{x^2}-1\right)$

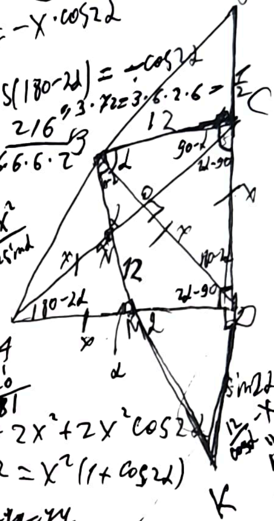
$AD = x$

$AC = \frac{x}{\sin 2\alpha}$

$-\frac{72}{x}+x = 12\sin 2\alpha$

$(8+a)(7+b)$

$144 = 2\cdot 80$



$S = \frac{\frac{x}{\sin 2\alpha}+12}{2}x$

$x^2+2\cdot x \cdot 12 \cdot \cos 2\alpha + 144\cos^2 2\alpha$

$BO^2 = 144+144\cos^2 2\alpha$

$BO^2 = 144\sin^2 2\alpha$

$56+8b+7a+ab \equiv 1$

$x^2 = x^2\cos^2 2\alpha + 144\sin^2 2\alpha$

$8b+7a+ab \equiv 0$

$144 = 2x^2+2x^2\cos 2\alpha$

$72 = x^2(1+\cos 2\alpha)$

$a=1: \quad 9b \equiv 4 \quad b=9$

$40-3k = 21$

$100-63 = 37$

$2a-5b = 140-105 = 35$

$-12\cos 2\alpha \quad x^2\sin^2 2\alpha = 144$

$x\sin 2\alpha = 12\sin 2\alpha$

$a=2: \quad 10b \equiv 8 \quad b=3$

$x = 12(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)$

$a=3: \quad 11b \equiv 1 \quad x$

$20,21 \to 37,35$

$a=4: \quad b \equiv 6 \quad b=6 \quad x$

$20,22 \to 34,30$

$OD = x\cos 2\alpha$

$13 \cdot 5 = 65$

$13 \cdot 7 = 91$

$13 \cdot 9 = 90+27 = 117$

$21,23 \to$

$2\alpha - 90 < 180 - 2\alpha$

$4\alpha >$

$a=5: \quad 2b \equiv 9 \quad b=$

$22,23 \to 41,39$

$AD = \frac{OD}{\sin 2\alpha}$

$a, \ a+k$

$a=6: \quad 3b \equiv 2 \quad b=$

x^3-3x^2+3x-1

$AD = -x\cos 2\alpha$

$5a-3a-3k = 2a-3k$

$\cos 2\alpha = \frac{72}{x^2}-1$

$7a-5a-5k = 2a-5k$

$2\alpha - 90 < 90°$

$\alpha < 90$

$2 - \frac{1}{36}$

$3 - \frac{2}{36}$

$4 - \frac{3}{36}$

$5 - \frac{4}{36}$

$6 - \frac{5}{36}$

$7 - \frac{6}{36}$

$8 - \frac{5}{36}$

$9 - \frac{4}{36}$

$10 - \frac{3}{36}$

$11 - \frac{2}{36}$

$12 - \frac{1}{36}$

$2(1+2+3+4+5)+6$

$30+6 = 36$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 6 = 78$

$x: \ \frac{24\sin 2\alpha}{x}$

$\sin 2\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{72}{x^2}-1\right)^2}$

$\left(\frac{1}{12}\right)^3 \quad \frac{x^3}{24\sin 2\alpha}$

$\frac{144}{x^2} - \frac{72^2}{x^4} \quad \frac{144x^4-72^2}{x^4}$

$\sin 2\alpha = \frac{DC}{x}$

$\frac{6}{12}+\frac{1}{12}\cdot\frac{6}{12}+\frac{1}{144}\cdot\frac{6}{12}$

$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{72(2x^2-72)}}{x^2}$

$\frac{2}{36}\cdot\frac{1}{12}+\frac{3}{36}\cdot\frac{2}{12}$

$OC = 12\sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha = \frac{12\sin 2\alpha}{x}$

$\frac{6}{12}\left(\frac{13}{12}+\frac{1}{144}\right)$

$\cos 2\alpha = \frac{6}{x}$

$2+3\cdot 2+4\cdot 3+5\cdot 4+6\cdot 5+5\cdot 6+4\cdot 7+3\cdot 8+2\cdot 9+10$

$36 \cdot 12$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{72}{x^2}-1$

$144 - 2 \cdot 12 \cdot x \cdot \cos 2\alpha = 0$

$64 \cdot x\cos 2\alpha = 0$

$\cos 2\alpha = \frac{6}{x}$

$\frac{180}{6\cdot 6\cdot 2} = \frac{5}{12}$

$\frac{13\cdot 12+1}{144}\cdot\frac{1}{12}$

$\sin^2 2\alpha = \frac{x^2-36}{x^2}$

$a^2-(b+1)a+b^2-b+1=0$

$D = b^2+2b+1-4b^2+4b-4 = -3b^2+6b-3 = -3(b^2-2b+1)$

$-3(b-1)^2$

$a = b+1 \pm$

a, a^{-1}

$2a+3$

$2a+5$

чистовик №1

№2

$x^3 + (22+10\sqrt{2})x = (10+\sqrt{2})x^2 + 22\sqrt{2}$

$x^3 - (10+\sqrt{2})x^2 + (22+10\sqrt{2})x - 22\sqrt{2} = 0$

По теореме Виета для кубического ур-я: $\begin{cases} abc = 22\sqrt{2} \\ ab+ac+bc = 22+10\sqrt{2} \\ a+b+c = 10+\sqrt{2} \end{cases}$

Объём параллелепипеда равен $(a+1)(b+1)(c+1) = (ab+a+b+1)(c+1) =$

$= abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 = 22\sqrt{2} + 22 + 10\sqrt{2} + 10 + \sqrt{2} + 1 = 33 + 33\sqrt{2}$

Ответ: $33+33\sqrt{2}$

№4

$\overline{290b} = 2900 + b$

$2900 \equiv 7 \pmod{11}$ $\Rightarrow \overline{290b} \equiv 7+b \pmod{11}$

$\overline{4a89} = 4089 + 100a$

$4089 \equiv 8 \pmod{11}$

$100 \equiv 1 \pmod{11}$ $\Rightarrow \overline{4a89} \equiv 8+a \pmod{11}$

$\Rightarrow \overline{4a89} \cdot \overline{290b} \equiv (8+a)(7+b) \equiv 1 \pmod{11}$

$\equiv \underset{55+1}{\underset{\shortparallel}{56}} + 8b + 7a + ab \Rightarrow$

$\Rightarrow 8b + 7a + ab \ \vdots\ 11$

Т.к. двузнач. число не может нач. с 0, а оканчивающееся на 0 не явл. простым, то a и $b \neq 0$.

$a=1$: $9b+7 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow 9b \underset{mod 11}{\equiv} 4 \Rightarrow b=9$

$a=2$: $10b+14 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow 10b \underset{mod 11}{\equiv} 8 \Rightarrow b=3$

$a=3$: $11b+21 \ \vdots\ 11$ – нет реш.

$a=4$: $12b+28 \ \vdots\ 11 \Rightarrow b \underset{mod 11}{\equiv} 5 \Rightarrow b=5$

$a=5$: $13b+35 \ \vdots\ 11 \Rightarrow 2b \underset{mod 11}{\equiv} 9$ – нет реш.

$a=6$: $14b+42 \ \vdots\ 11 \Rightarrow 3b \underset{mod 11}{\equiv} 2 \Rightarrow b=8$

$a=7$: $15b+49 \ \vdots\ 11 \Rightarrow 4b \underset{mod 11}{\equiv} 6 \Rightarrow b=7$

$a=8$: $16b+56 \ \vdots\ 11 \Rightarrow 5b \underset{mod 11}{\equiv} 10 \Rightarrow b=2$

$a=9$: $17b+63 \ \vdots\ 11 \Rightarrow 6b \underset{mod 11}{\equiv} 3 \Rightarrow b=6$

На последнем шаге число b получается из перебора, который не записывается, чтобы не делать решение слишком объёмным

Из этих пар можно составить простые числа 19, 23

Ответ: 19, 23

чистовик №2

№6

Рассмотрим, какие ~~суммы~~ вероятности имеют суммы у Тани:

$2 - \frac{1}{36}$, $3 - \frac{2}{36}$, $4 - \frac{3}{36}$, $5 - \frac{4}{36}$, $6 - \frac{5}{36}$, $7 - \frac{6}{36}$, $8 - \frac{5}{36}$, $9 - \frac{4}{36}$, $10 - \frac{3}{36}$, $11 - \frac{2}{36}$, $12 - \frac{1}{36}$

У Ани вероят. каждого значения $\frac{1}{12}$

А) Тогда вероятность победы Ани на 1-ом ходу:

$$P_1 = \frac{1}{36}\cdot\frac{10}{12} + \frac{2}{36}\cdot\frac{9}{12} + \frac{3}{36}\cdot\frac{8}{12} + \frac{4}{36}\cdot\frac{7}{12} + \frac{5}{36}\cdot\frac{6}{12} + \frac{6}{36}\cdot\frac{5}{12} + \frac{5}{36}\cdot\frac{4}{12} + \frac{4}{36}\cdot\frac{3}{12} + \frac{3}{36}\cdot\frac{2}{12} + \frac{2}{36}\cdot\frac{1}{12} =$$

$$= \frac{10+18+24+28+30+30+20+12+6+2}{36\cdot 12} = \frac{6\cdot 6\cdot 5}{6\cdot 6\cdot 6\cdot 2} = \frac{5}{12}$$

Б) Вероят. ничьи на каждом ходу $\frac{1}{12}$ (т.к. для любого исхода Тани у Ани будет такой же результат в 1 из 12 случаев) $\Rightarrow$ вероятность, что победитель не будет выявлен $P_2 = \left(\frac{1}{12}\right)^3$

В) Тогда вероятность победы Тани на каждом ходу $1 - \frac{1}{12} - \frac{5}{12} = \frac{1}{2} > \frac{5}{12} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ вер. победы Тани больше

$$P_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{144}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{144+12+1}{144} = \frac{157}{288}$$

Ответ: А) $\frac{5}{12}$; Б) $\left(\frac{1}{12}\right)^3$;
В) $\frac{157}{288}$

№1

Пусть $3^{\sin x} = a$, $5^{\sin x} = b$, тогда $a^2 + b^2 + 1 = ab + a + b$

$a^2 - (b+1)a + b^2 - b + 1 = 0$

$D = b^2 + 2b + 1 - 4b^2 + 4b - 4 = -3b^2 + 6b - 3 = -3(b^2 - 2b + 1) = -3(b-1)^2 \leq 0$

$\Rightarrow$ т.к. $D \geq 0$ (чтобы были корни), то $b = 1 \Rightarrow a = 1$

$$\begin{cases} 3^{\sin x} = 1 \\ 5^{\sin x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

т.к. $-3{,}15 < -\pi$ и $314 < 10\pi$, то на $[-3{,}15; 314]$ подходят $-\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, 8\pi$ и 9π – всего 11 решений

Ответ: 11

чистовик №3

№3

Пусть $AN = AM = BD = BC = x$, тогда:

$\angle DBC = \angle DCB = \alpha$

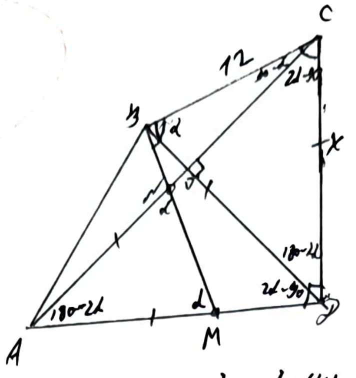
$\angle ACD = 90 - \alpha$

$\angle OCD = 2\alpha - 90$

$\angle ODC = 180 - 2\alpha$, $\angle ADO = 2\alpha - 90$

$\angle DAO = 180 - 2\alpha$, $\angle ANM = \angle AMN = \angle BNO = \alpha$,

$\angle NBO = 90 - \alpha$, $\angle NBC = 90$



из Т. косинусов для $\triangle BCD$: $x^2 = x^2 + 144 - 2 \cdot 12 \cdot x \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{6}{x} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{12\sin\alpha}{x}$; $\cos 2\alpha = \frac{72}{x^2} - 1$

$S = \frac{AC \cdot x}{2} = \frac{x \cdot AD + BO \cdot AC}{2}$

$OD = x \cdot \cos(180 - 2\alpha) = -x\cos 2\alpha = -x\left(\frac{72}{x^2} - 1\right) = x - \frac{72}{x} = \frac{x^2 - 72}{x}$

$BO = 12\cos\alpha = \frac{72}{x}$; $CO = 12\sin\alpha$

$AD = \frac{OD}{\sin 2\alpha} = \frac{\frac{x^2-72}{x}}{\frac{12\sin\alpha}{x}} = \frac{x^2 - 72}{12\sin\alpha}$

$AD \cdot x = AC \cdot DO$, т.е. $\frac{x^2 - 72}{12\sin\alpha} x = \frac{x^2 - 72}{x} \cdot AC \Rightarrow AC = \frac{x^2}{12\sin\alpha}$ $\Rightarrow AD = AC - \frac{6}{\sin\alpha}$

$BO \cdot AC = \frac{72}{x} \cdot \frac{x^2}{12\sin\alpha} = \frac{6x}{\sin\alpha} = \frac{72x}{12\sin\alpha} \Rightarrow S = \frac{(x^2 - 72)x + 72x}{24\sin\alpha} = \frac{x^3}{24\sin\alpha} =$

$= \frac{x^2}{24} \cdot \frac{x}{\sin\alpha} = \frac{x^2}{24} \cdot \frac{12}{\sin 2\alpha} = \frac{x^2}{2\sin 2\alpha}$

$x^2 = \frac{(x^2-72)^2}{x^2} + 144\sin^2\alpha \Rightarrow x^4 = x^4 - 144x^2 + 72^2 + 144x^2\sin^2\alpha$

$x^2 = 36 + x^2\sin^2\alpha$

$\sin^2\alpha = \frac{x^2 - 36}{x^2}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{x^2 - 36}}{x}$

$S = \frac{x^4}{24\sqrt{x^2 - 36}}$

$x^2 + AD^2 = AC^2$; $x^2 + \frac{(x^2-72)^2}{144\frac{x^2-36}{x^2}} = \quad x^4$

листовик №4

№5

Пусть выбрали числа a и $b = a + k$, тогда получатся числа $5a - 3a - 3k = 2a - 3k$ и $7a - 5a - 5k = 2a - 5k$

Пусть выбрали числа $a = b - k$ и b, тогда получатся числа $5b - 5k - 3b = 2b - 5k$ и $7b - 7k - 5b = 2b - 7k$.

Заметим, что если $a ⋮ 5$, то второе полученное число $⋮ 5$; если $b ⋮ 5$, то первое полученное число $⋮ 5$; если и a, и $b ⋮ 5$, то оба полученных числа $⋮ 5$ (т.к. тогда $k ⋮ 5$)

Значит, количество чисел кратных 5 в наборе не уменьшается.

Но среди чисел 20–45 их 6, а среди 2001–2026 их 5 ⇒, что противоречит предыдущему утверждению ⇒ такое невозможно

Ответ: нельзя