0 270716 100008

27-07-16-10
(140.2)

дешифр

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 8

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы!
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Каляевой Екатерины Романовны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«06» апреля 2025 года

Подпись участника

Кари

27-07-16-10 (140.2)

ДЕШИФР

85 (восемьдесят пять)

Мат – Ванцов

Черновик.

№1
13 пирожков
Кар. – 60 р.
Кап. – 70 р.
Я – 80 р.
М – 90 р.
Кл. – 100 р.

4 пир. с кар. $4 \cdot 60 = 240$ р.

min. 5 пир. с ябл. нач. $5 \cdot 80 = 400$ р.

Для max: $4+5=9$ ост. 4 пирожка
1 с кап., 2 с кл и 1 с мал.

$240р + 400р + 70р + 90р + 2 \cdot 100р =$
$= 310р + 400р + 290р = 600р + 400р = \underline{1000р}$

$45+n = 20+10x+y$

$25+n = 10x+y$

Для min, $4+5=9$ ост. 4 пирожка
$240р + 400р + 100р + 90р + 2 \cdot 70р =$
1 1 2
$= 240 + ~~500~~ + 90 + 140 = (380+590)р = \underline{970р}$

№2
$2025 = 45 \cdot 45 = 3^4 \cdot 5^2$

2026 ~~/~~ $20+26 = 46 = 2 \cdot 23$

2026 | 2
1013 |

$-2026 | 23$, 184, 186, 8

$-1013 | 7$, 7, 31, 28, 33, 14

$-2027 | 47$, 188, 147, 43

$-1013 | 17$, 85, 163, 58

$-1013 | 19$, 95, 5

1013 | 17, 86

$-1013 | 13$, 91, 103, 7

$-2028 | 48$, 192, 108, 96, 42

$-2029 | 7$, 14, 62, 56, 65, 28

$49 = 7^2$

2030 ⋮ 50 ~~2050~~

2031 ⋮ 51

2031 | 3

2040 ! 60

21+39 =

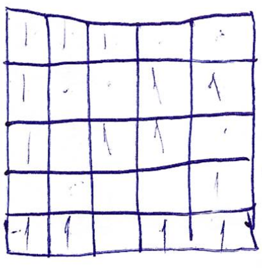
Постараемся найти среди $\overline{20xy}$, тогда наш год кратен $20+\overline{xy}$, т.е. кратен и 20, и $\overline{xy}$

$2040 - 2025 = 15$

$\frac{15}{45+15} = 0$ (ост. $45+15 = 60$)

$\frac{2025}{45+15} = \frac{2025}{60} = \frac{45 \cdot 9}{30} \cdot \frac{81}{4}$

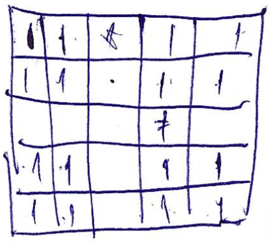
№3. 1 ∨ 0



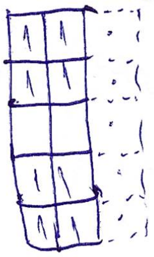
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

$-2025 | 60$, 180, 25, 3

$25+60 = 75 =$
$= 3 \cdot 5$



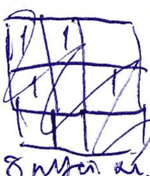
Пусть можно 16 тогда.
В 2 кол. max $4+4=8$, но тогда след. ряд будет пустым.
Аналог. зап. 4-5 кол.



16

Пусть м. 17, тогда $25-17 = 8$ кл. пустых, т.е. он м. max. запол.

На одной прям. max – 4, и нет вплотную → 4 кл. пуст. и 4 кл. пуст. → 8 пуст. кл.

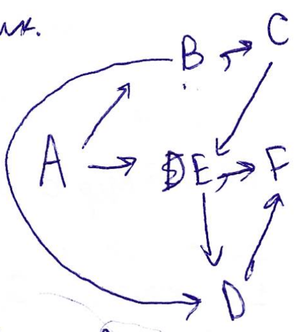


Черновик.

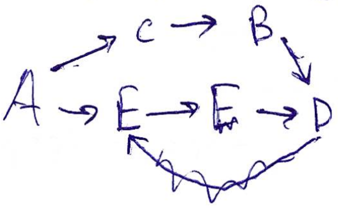
есть 4 прямые

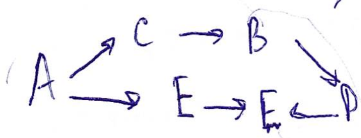
A, B, C
↓ ↓ ↓
E D D
F F E

A B C
B D F
D E C
A E F



1	·	1	·	1
·	1	1	·	1
·	1	·	1	·
1·	1·	1·	1	1
1	1			1



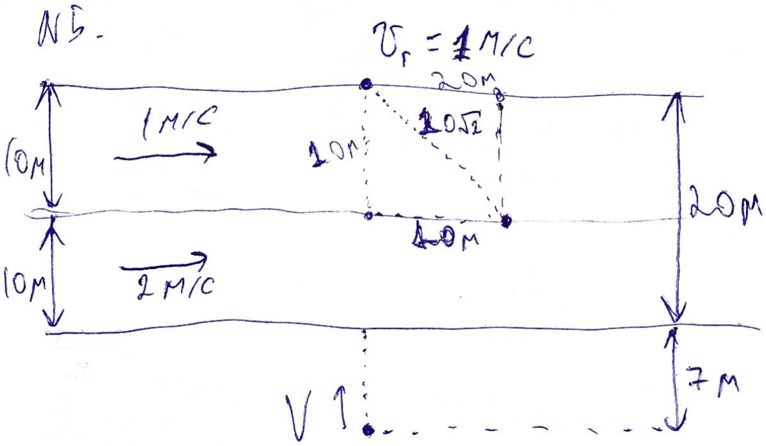


[A C B
[A B C
[A E F
[A F E
одновр.
4 сп.

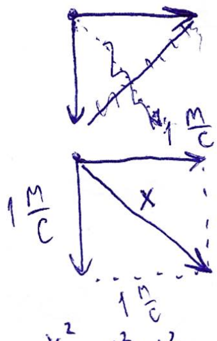
[B D F
B F D
[A E F
A F A
4 сп.

16 сп.

N5.



Как можно ближе к середине



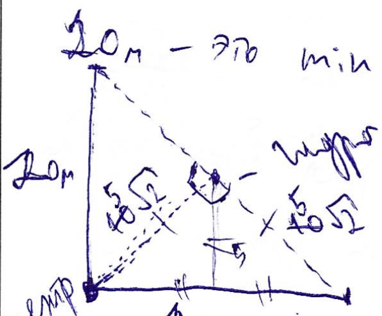
$x^2 = 1^2 + 1^2$

$x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ (по т. Пиф.)

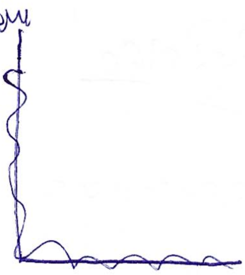
$\sqrt{2}\ \frac{м}{с}$

$\sqrt{20^2+20^2} = \sqrt{800} = \sqrt{4 \cdot 2 \cdot 100} = 20\sqrt{2}$

20м — это min=?



$10\sqrt{2} < 20$, но min в высоте, т.к. сим роз $10\sqrt{2}$ т.к. треуг. р/б, тогда

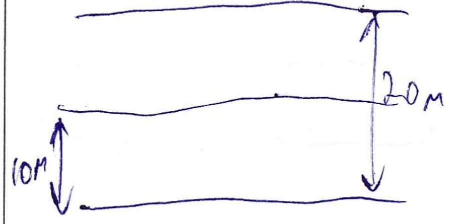


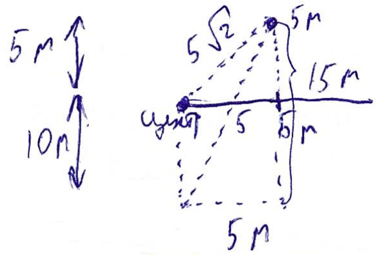
$\frac{\cancel{10}^{5}\sqrt{2}\ м}{1\ \frac{м}{с}} = \cancel{10}^{5}\sqrt{2}$ с

27-07-16-10 (140.2)

Черновик

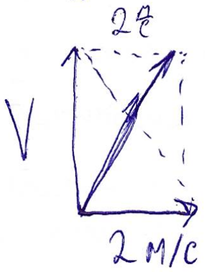
Теперь рассм. выдру, ей нужно проб. 7м по прямой, затем





$$y = \sqrt{5^2+15^2} = \sqrt{25+225} = \sqrt{250} =$$
$$= \sqrt{25\cdot 10} = 5\sqrt{10}$$

1	1	1	1	1
1	1	.	1	1
.	.	.	.	.
1	1	.	1	1
1	1	.	1	1



$$\frac{5\sqrt{10}\ м}{5\sqrt{2}\ с} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}\frac{м}{с} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}\frac{м}{с}$$

$\cancel{\sqrt{5}^2 \pm}$

$V = \sqrt{5}^2 - 2$

$V = 5 - 2 = 3\ \frac{м}{с}$

№6. $x_{2025} - x_1 \leq 1$

$\max\ y_x - y_{\cancel{x}}$

$y_1 = x_1$

$y_2 = \frac{x_1+x_2}{2}$

$y_{2\max} = \frac{x_1+x_1+1}{2} = \frac{2x_1+1}{2} = x_1 + \frac{1}{2}$

$y_{3\max} = \frac{x_1+2x_1+2}{3} = x_1 + \frac{2}{3}$

$y_{2025\max} = \frac{2025x_1+2024}{2025} = x_1 + \frac{2024}{2025}$

1	1	.	1	1
.	1	1	.	1
1	.	1	1	.
1	1	.	.	.
.	1	.	1	1

~~$y_{2025\max} - y_{2\max} = x_1 + \frac{2024}{2025} - x_1 - \frac{1}{2} = \frac{}{2025\cdot 2}$~~

$y_{2025\max} - y_1 = x_1 - x_1 + \frac{2024}{2025}$

№1 ✓ ✓✓
№2 ± ±
№3 ± ±
№4 ± ✓
№5 ✓ ±
№6 ✓ ✓✓

№2 $2025 = 3^4\cdot 5^2$

$2026 = 2\cdot$

$2025 = 1012\cdot 2 + 1 = 3^4\cdot 5^2$

$2026 = 1013\cdot 2$ (1013 – прост.)

$2027 = 1013\cdot 2 + 1 =$

$2028 = 1014\cdot 2 =$

~~2027~~

1012 | 2
506 | 2
253 | 11
253 | 23

2027 | 7
14 | 28
62
56
67

Чистовик.

№1. Всего 13 пирожков, 4 пирожка с картошкой. Т.к. пирожков с яблоком больше всего, то их минимум 5 (т.к. 5>4 и 13-(5+4)=4).
Так как у нас было 5 начинок, Маша продала все, то для составления (min и max) вариантов (про ~~прибыль~~ деньги с продажи) надо использовать все 5 видов.
Случай с максимальной суммой.

$4 \cdot 60 = 240$ (руб) → за 4 пирожка с картошкой
$5 \cdot 80 = 400$ (руб) → за 5 пирожков с яблоком (не исп. более 5, т.к. ост. места для более дорогих за 100 и 90 р.)
$13-(4+5)=4$ пирожка осталось, для max надо использовать как можно больше с клубникой, т.е. 2, т.к. по 1 пирожку (min) надо с капустой и с малиной.
$2 \cdot 100 = 200$ (руб) → за 2 пирожка с клубникой
$1 \cdot 90 = 90$ (руб) → за 1 пирожок с малиной
$1 \cdot 70 = 70$ (руб) → за 1 пирожок с капустой.
$240 + 400 + 200 + 90 + 70 = (160 + 240) + (400 + 200) = 600 + 400 =$
$= 1000$ (руб) – max сумма
Случай с минимальной суммой
Получаем $240 + 400 = 640$ (руб) → 4 пир. с картошкой + 5 пир. с яблоком (не исп. более 5 с яблоком, т.к. ост. для более дешёвых за ~~60 р. и~~ 70 р.).
У нас ост. 4 пирожка и 3 разновидности, max кол-во дешёвых с ~~картошкой~~ пустой → 2, т.к. 1 с ~~капустой~~ малиной и 1 с клубникой
~~в~~ $2 \cdot 70 = 140$ (руб) → 2 пир. с капустой
$90 + 100 = 190$ (руб) → 1 с ~~кап~~ малиной + 1 с клубникой
$640 + 140 + 190 = 780 + 190 = 970$ (руб) – min сумма
Ответ: наибольшая сумма 1000 руб., наименьшая сумма 970 руб.

27-07-16-10 (140.2)

Чистовик.

~~№5.~~ N6.

$y_1 = x_1$ Заметим, что $|x_{n_1} - x_{n_2}| \le 1$, тогда пусть x_1 — min из всех x (это может быть любой порядковый номер)

$$y_{2\,max} = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{x_1+(x_1+1)}{2} = \frac{2x_1+1}{2} = x_1+\frac{1}{2} \quad (max.\ x_2 = x_1+1)$$

$$y_{3\,max} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{x_1+(x_1+1)+(x_1+1)}{3} = \frac{3x_1+2}{3} = x_1+\frac{2}{3},$$ т.к.

из того, что x_1 — min, $x_{n\,max} = x_1+1$

$$y_{4\,max} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} = \frac{x_1+(x_1+1)+(x_1+1)+(x_1+1)}{4} = \frac{4x_1+3}{4} = x_1+\frac{3}{4}$$

таким образом $y_{n\,max} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} = \frac{x_1 n + 1\cdot(n-1)}{n} = x_1 + \frac{n-1}{n}$

тогда для $y_{2025\,max} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2025}}{2025} = \frac{x_1\cdot 2025+2024}{2025} =$

$= x_1 + \frac{2024}{2025}$. Мы искали $y_{2025\,max}$, т.к. нам нужен max размах, а $y_1 = x_1 \to$ min.

Размах (max): $y_{2025} - y_1 = x_1 + \frac{2024}{2025} - x_1 = \frac{2024}{2025}$. Эта дробь несократима, т.к.

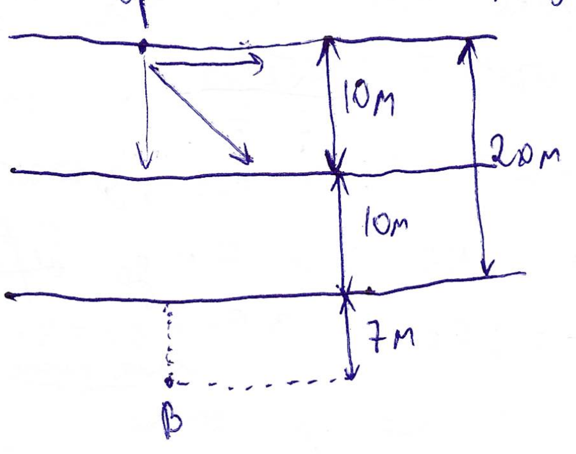
2024	2
1012	2
506	2
253	11
23	23
1	

$2025 = 45^2 = (3^2\cdot 5)^2 = 3^4\cdot 5^2$

$2024 = 2^3\cdot 11\cdot 23$

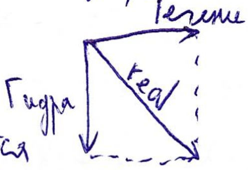
Ответ: $\frac{2024}{2025}$.

N5. Попробуем сделать так, чтобы они встретились в одной точке, лежащей на середине канала (т.к. длина канала неизвестна, то будем рассм. середину канала как прямую. Рассмотрим путь Гошы.

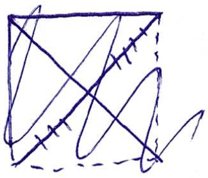


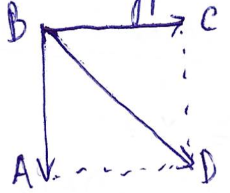
Чистовик

Гидра плывёт перпендикулярно (вниз), а течение сносит её под прямым углом вправо, т.е.

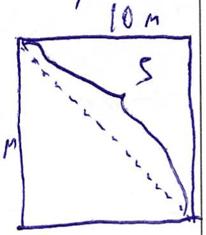


Под надписью real подразумевается реальное направление Гидры. Т.к. $v_{течения} = 1\frac{м}{с}$, $v_{гидры} = 1\frac{м}{с}$, то



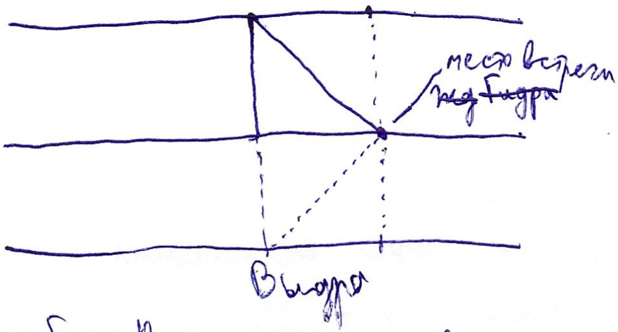


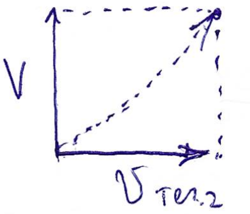
ABCD — квадрат (углы прямые, смежные стороны AB = CB равны), следовательно реальная скорость ~~выдры~~ гидры в реке $v_{real\ \cancel{выдры}\ гидры} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\frac{м}{с}$ (по теореме Пифагора из $\triangle ABD$). Т.к. до середины реки 10 м, т.е. S — расст., кот. должна проплыть ~~выдра~~ гидра, п 10м



$S = 10\sqrt{2}$ м (по теор. Пифагора), $t = \frac{S}{v_{real\ \cancel{выдры}\ гидры}} = \frac{10\sqrt{2}\,м}{\cancel{10}\sqrt{2}\,\frac{м}{с}} = 10\,с$ — понадобится ~~выдре~~ гидре.

Выдра должна преодолеть 7 м на суше, затем ещё какое-то расстояние в воде, пройти все эти расстояния в сумме за 10 с. Тогда нарисуем путь выдры в воде





Чтобы Выдра пришла в то же место, что и Гидра, надо, чтобы квадраты были равны, тогда $V = v_{теч2} = 2\frac{м}{с}$, но тогда она ~~затратит~~ $\frac{10\sqrt{2}\,м}{2\,\frac{м}{с}} \Rightarrow$ её реальная скорость $v_{real\ выдры} = 2\sqrt{2}\frac{м}{с}$, а $S = 10\sqrt{2}$, значит она затратит $\frac{10\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 5\,с$, но ещё 7 м до ~~берега~~ воды, т.е. она затратит $\frac{7\,м}{2\,\frac{м}{с}} = 3{,}5\,с$ $3{,}5\,с + 5\,с = 8\,с$ и они встретятся чуть дальше от середины (ближе к изнач. расположению Гидры)

Так как нам уже известно скорость Гидры, то мы знаем

Чистовик.

её путь и траекторию, следовательно, менять ~~8~~ мы могли только скорость Выдры.

Ответ: 2 $\frac{м}{с}$.

№3.

Докажем, что максимум может быть ~~тос~~ 16 единиц.

В каждой строчке max кол-во единиц — 4 (иначе ~~что-то~~ будет ~~образ. ряд~~ 5 единиц подряд.)

1	1		1	1

— единственное расположение единиц из 4 в строку, т.к. иначе будет 3 единицы в строку, что противоречит условию. Подряд мы можем разместить максимум 2 строки, т.к. иначе будет 3 единицы в столбец, ~~тогда~~ но можно в третьей строке поставить одну единицу в центре. Таким образом собирается конструкция

1	1		1	1
1	1		1	1
		1		
1	1		1	1
1	1		1	1

Но в центр ставить нельзя, т.к. образуются диагонали от из 5 единиц, получаем следующую модель:

1	1	0	1	1
1	1	0	1	1
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	0	1	1

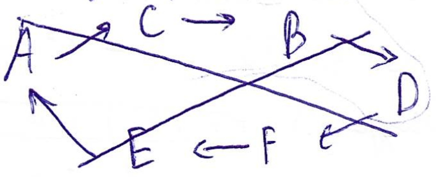
Если тут заменить хоть один 0, то сразу же образуется ряд столбец или диагональ из 5 единиц, значит, больше 16 единиц не может быть.

Ответ: 16.

Чистовик

№4.

~~Образуем последовательность взаимосвязанных букв, где 2 стрелочки подряд образуют прямую.~~



ACB или ABC или BAC или CAB или BCA или CBA — 6 вариантов у одной прямой

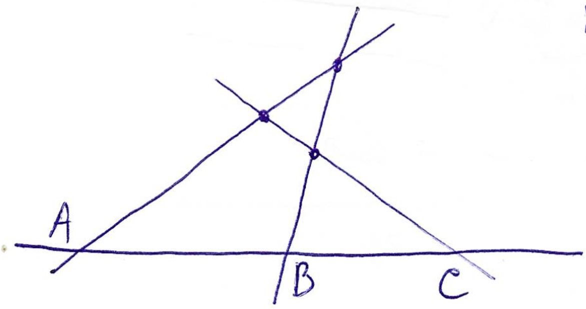
Каждая точка расположена на стыке двух прямых. Никакие 2 точки не лежат на двух прямых вместе (одних и тех же).

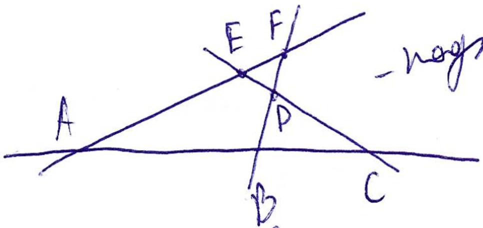
Начнём с прямой ABC, зная расположение точек A, B и C (их расположения всего 6 вариантов $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$) → в перемен... и ещё мы можем выбрать одну из 4 прямых, т.е. $C_4^{3!} = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$ $\Rightarrow$ всего 24 варианта ($6\cdot 4 = 24$, т.к. условия вып одновременно). Тогда нам остаётся расположить ещё 3 точки D, E и F, причём

A должно быть с E и F

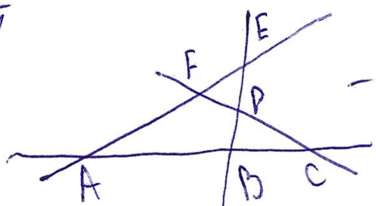
B должно быть с D и F

C должно быть с D и E





— подходит



— не подходит

Как мы видим из рисунков, всего подходит только один вариант. Следовательно, начиная расстановку мы можем с любой „послед." букв, принадлежащих одной прямой, но вариантов будет $24\cdot 1 = 24$ (после определения трёх букв, принадлеж. одной прямой, не будет вариантов расстановки других букв). Чистовик.

Ответ: 24.

№2.

Постараемся найти замечательный год такого типа $\overline{20x_1y_1}$, где x_1 и y_1 могут совпадать. В таком случае $\overline{20x_1y_1} \vdots (20+\overline{x_1y_1})$, где $20+\overline{x_1y_1} = 20+10x_1+y_1$, т.е. число оканч. на y_1, и $20+\overline{xy} = 10(2+x_1)+y_1$ представляет собой $\overline{(2+x_1)y_1}$

число	делитель
$2025 = 1012 \cdot 2 + 1$	$20+25=45$
$2026 = 1013 \cdot 2$	$20+26=46$
$2027 = 1013 \cdot 2 + 1$	$20+27=47$
$2028 = 1014 \cdot 2$	$20+28=48$
$2029 = 1014 \cdot 2 + 1$	$20+29=49$

....

~~Заметим, что если~~ $\cancel{x \vdots y}$, ~~то~~ $\cancel{(x+1) \not\vdots (y+1)}$ ~~при~~ $\cancel{y \neq 0}$ ~~и~~ $\cancel{y>0}$ ~~где x и y - любые~~

$$\frac{x+n}{y+n} = z, \text{ где } z \in N \text{ и } \frac{x}{y} = n, n \in N$$

$$\frac{x+n}{y+n} = \frac{x}{y+n} + \frac{n}{y+n}$$ Либо $x \vdots (y+n)$ и $n \vdots (y+n)$,

либо ~~ост.~~ $x : (y+n) = a$ (ост. c), $\frac{n}{y+n} = b$ (ост. d), где $c+d = \cancel{y+n} \cdot l$, $l \in N$ (и $l \in D(\cancel{2025}\ x)$)

Рассм. подставив числа $x = 2025$, $y = 45$:

$$\frac{2025+n}{45+n} = \frac{2025}{45+n} + \frac{n}{45+n}.$$ ~~Так как у нас по-~~ ~~ложительные числа, то~~ $\cancel{n \not\vdots (45+n)}$ $\cancel{n \not\vdots (45+n)}$, ~~соответств.~~ ~~но остается один вариант~~ $\cancel{x : (y+n) = a \text{ (ост. } c)}$ $\cancel{\frac{n}{y+n} = b \text{ (ост.)}}$ ~~где~~ $\cancel{c+d = y+n}$, ~~т.е.~~ $\cancel{c+d = 2025+d \in N}$ l, $l \in N$ Заметим, что

$\cancel{45+n = 20+10x+y}$

$\cancel{425+n = 10x+y}$

т.к. $\frac{n}{45+n} \notin Z$, ~~то~~ т.к. $n>0$ и $n < 45+n$, то I варианта $x \vdots (y+n)$ и $n \vdots (y+n)$ отпадает.

$\Rightarrow$ при $2025 \not\vdots (45+n)$ ~~, тогда 45+n должны быть min, т.к. нам нужно найти следующее число, а значит рассм. делители 2025~~ дает такой остаток, чтобы в сумме он являлся делителем числа 2025, ~~т.е.~~ а т.к. составным числом и одновременно

Черновик

при $\frac{n}{45+n}$ ост. $45+n$, то $45+n+a \in D(2025)$

Рассмотрим делители числа 2025, больше 45, причём нам нужен минимальный из них т.к. мы ищем следующее число. $2025 = 45 \cdot 45 = (3^2 \cdot 5)^2 = 3^4 \cdot 5^2$, тогда $3^2 \cdot 5 = 45$, след. по величине будет $3^3 \cdot 5 = 27 \cdot 5 = 135$ или $3^2 \cdot 5^2 = 9 \cdot 25$ или $3 \cdot 5^2 = 75 \to \min \Rightarrow$

$\Rightarrow 45 + n + a = 75$

$n + a = 30$, т.е. $n < 30$

$\frac{n}{45+n} \to$ ост. от дел. равен $45+n$

$\frac{2025+n}{45+n} = \frac{2025}{45+n} + \frac{n}{45+n}$

$2025 : 45+n = b$ (ост. a), где $a < 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2025 = (45+n)b + a$

$2025 = 45b + n \cdot b + a$

$2025 \leq 75b + a$ (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_{max} = 15$ (нам нужно именно a_{max}, т.к. при этом n_{min}, $a_{max} < 30$) $\Rightarrow n = 30 - 15 = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2025 + 15 = 2040$, т.е. следующий замечательный год — 2040. Проверка: $2040 = 60$ $2040 : 60 = 34$ (ост. 0)

$$\begin{array}{r|l} 2040 & 60 \\ \hline 18 & 34 \\ 24 & \\ 24 & \\ 0 & \end{array}$$

Ответ: 2040.

объяснение решения формулы (1)

~~Т.к.~~