35-90-27-43
(138.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант В-2

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы Горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Бялковского Тимофея Романовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата «06» апреля 2025 года

Подпись участника

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа вкладыша запрещается!

№1

Ставим команду по возрастанию очков (у команды 1 - ~~больше~~ меньше всего очков, у команды 10 - больше всего); Скажем, что у команды 1 - a очков, а у команды 2 - $a+b$ очков. Тогда, т.к. очки команд образуют арифм. прогрессию, у команды n всего $a+(n-1)b$ очков. Заметим, что так как после игры команда может получить либо 2, либо 0 очков, то после каждой игры её суммарное кол-во очков увеличилось на чётное число $\Rightarrow$ сумма очков у команды чётная; Из этого следует что a (кол-во очков команды 1) - чётное, а также $a+b$ (кол-во очков команды 2) чётное, $a \Rightarrow$ и b - чётное (т.к. $a+b-a$ - чётное); Т.к. у команды не может быть отриц. кол-во очков (после игры либо $+2$ либо $+0$ очков), то $a \geq 0$; ~~т.к. по этой же причине~~ т.к. очки команды образуют убыв. прогрессию, $b \geq 0$, а т.к. $a+b \geq a$ то $b \geq 0$;

Всего было сыграно $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ игр; За каждую разыгралось 2 очка; $\Rightarrow$ сумма очков всех команд - $45 \cdot 2 = 90$; Сумма очков всех команд также равна $a+(a+b)+(a+2b)+(a+3b)+\ldots+(a+9b) = 10a + \frac{9 \cdot 10}{2} b = 10a + 45b$; $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a \vdots 2$, $b \vdots 2$; Минимальное значение b - 2 (т.к. $b \vdots 2$ и $b > 0$), и тогда $45b = 90$; т.к. $a \geq 0$, и при $b > 2$ $10a + 45b > 90$, ед. возможное решение $10a + 45b = 90$ - $a = 0$, $b = 2$; Тогда вторая по очкам команда (или команда 9 с $a+8b$ очков) набрала $0 + 8 \cdot 2 = 16$ очков

Ответ: 16

Черновик, лист 1

№2

Заметим, что 2000 и 2100 года - замечательные (2000 : 20; 2100 : 21) => кол-во зан. годов от 2001 до 2100 = кол-ву зан. годов от 2000 до 2099;

Далее рассмотрим все года от 2000 до 2099. Их можно представить как $\overline{20ab}$, где a и b - какие-то ~~двузначное~~ цифры. Год замечательный, если $\overline{20ab}$ ⋮ на $(20+\overline{ab})$; Заметим, что если $\overline{20ab} ⋮ (20+\overline{ab})$, то и $\overline{20ab}-(20+\overline{ab}) ⋮ (20+\overline{ab})$; $\overline{20ab}-\overline{ab}=2000$; $2000-20=1980$; Год $\overline{20ab}$ замечательный, если $1980 ⋮ (\overline{ab}+20)$ => кол-во замеч. годов от 2000 до 2099 равно кол-ву делителей 1980 которые ≥20 и меньше 120 (т.к. $\overline{ab}<100$) ~~(т.к. 2000 - замечательный, а 0 не делитель 1980)~~, $1980=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot11$; ~~кол-во делителей <100 из одного прост. множителя = 4, из двух - 2 + $\frac{4\cdot3}{2}$ = 8, из трех - 3 (т.к. делители ⋮11 <100 - только 2·11·3, 2·2·11, 3·3·11) + 3 (делящиеся на 2^2, не ⋮11) + 3 (делящиеся на 3^2, не ⋮11) + 1 (2·3·5) = 10, из четырех - 1 (т.к. подходит только $2^2\cdot3^2$, т.к. след по возрастанию - $2^2\cdot3\cdot5=120>100$); Итого таких делителей 4+8+10+1 = 23, и 23+1=24~~

~~Ответ: 24~~

т.к. все делители 1980 из одного простого делителя <20; кол-во ~~простых~~ делителей из двух простых делителей ≥20 и <120 - 3 (11·2, 11·3 и 11·5); из трех - 8 (⋮11 - 5 делителей, не ⋮11 - 3), из четырех - 1 (т.к. подходит только $2^2\cdot3^2$, т.к. след по возрастанию - $2^2\cdot3\cdot5=120$, а делители должны быть <120); => всего есть 3+8+1=12 замечательных лет в XXI веке, т.е. без 2025-го - еще 11;

Ответ: еще 11

№4

$\frac{abc}{(a+1)(b+16)(a+c)(b+c)}$; Промаксимизируем выражение по a — (скажем чтобы c – const)

$\frac{abc}{(a+1)(b+16)(a+c)(b+c)}=\frac{bc}{(b+16)(b+c)}\cdot\frac{a}{(a+1)(a+c)}$; $\frac{bc}{(b+16)(b+c)}$ – const,

$\Rightarrow$ нужно промаксимизировать $\frac{a}{(a+1)(a+c)}=\frac{a}{a^2+a+ac+c}=$

$\frac{1}{a+c+1+\frac{c}{a}}\Leftrightarrow$ минимизации $a+c+1+\frac{c}{a}$; Производная по a из этого выражения $=1-\frac{c}{a^2}$; она равна нулю при $a=\pm\sqrt{c}$; Производная из производной $=2\frac{c}{a^3}$; Она >0 при $a=\sqrt{c}$, и <0 при $a=-\sqrt{c}$ – значит минимум достигается при $\sqrt{c}$ (при $a>0$, т.к. функция ~~растёт~~ убывает с $-\sqrt{c}$ до $\sqrt{c}$); $\Rightarrow$ ~~на~~ при наибольшем значении $a=\sqrt{c}$; Повторим тоже самое для b:

$\frac{abc}{(a+1)(b+16)(a+c)(b+c)}=\frac{ac}{(a+1)(a+c)}\cdot\frac{b}{(b+16)(b+c)}$; $\frac{ac}{(a+1)(a+c)}$ – const,

$\Rightarrow$ нужно промаксимизировать $\frac{b}{(b+16)(b+c)}=\frac{b}{b^2+16b+cb+16c}$

$=\frac{1}{b+16+c+\frac{16c}{b}}\Leftrightarrow$ минимизации $b+16+c+\frac{16c}{b}$; Производная по b этой функции $=$ ~~16~~ $1-\frac{16c}{b^2}$, она равна нулю при $b=\pm 4\sqrt{c}$; Возьмём вторую производную — она равна $2\frac{16c}{b^3}$; она >0 при $b=4\sqrt{c}$ и <0 при $b=-4\sqrt{c}$, $\Rightarrow$ max функции при $b>0$ – при $b=4\sqrt{c}$, т.к. это локальный ~~максимум~~ минимум (функция убывает с $-4\sqrt{c}$ до $4\sqrt{c}$ и растёт с $4\sqrt{c}$), $\Rightarrow$ при наибольшем значении $b=4\sqrt{c}$;

$a=\sqrt{c}$, $b=4\sqrt{c}$; $\Rightarrow c=a^2$, $b=4a$; $\Rightarrow$

$\frac{abc}{(a+1)(b+16)(a+c)(b+c)}=\frac{a\cdot 4a\cdot a^2}{(a+1)(4a+16)(a+a^2)(a^2+4a)}=\frac{4a^4}{a\cdot(a+1)^2\cdot\frac{a}{4}(4a+16)^2}=$

$\frac{4a^4}{4a^2(a+1)^2\cdot(a+4)^2}=\frac{a^2}{(a+1)^2(a+4)^2}$; т.к. $a>0$, максимизировать эту функцию $\Rightarrow$ максимизации $\frac{a}{(a+1)(a+4)}=\frac{a}{a^2+5a+4}=\frac{1}{a+5+\frac{4}{a}}$, ~~4~~

№4, продолжение.

а максимизировать эту функцию <=> минимизации $a+5+\frac{4}{a}$; Производная из этой функции $= 1-\frac{4}{a^2}$, и она равна нулю при $a=\pm 2$; вторая производная $=\frac{8}{a^3}$, и она >0 при $a=2$ и <0 при $a=-2$, => она убывает от -2 до 2 и растёт с 2, => ~~max~~ мин. функции при $a>0$ - при $a=2$ (=> $c=2\cdot 2=4$, $b=2\cdot 4=8$)

Ответ: $a=2$, $c=4$, $b=8$

№3 отрезок <=> промежуток

Сначала рассмотрим под. случай - кол-во чисел из множества А в отрезке $[(a-1)^3, a^3-1]$; Все числа в отрезке $<a^3$, но $\geq (a-1)^3$, => для них всех $[\sqrt[3]{n}] = a-1$; => в отрезке $[(a-1)^3, a^3-1]$ столько чисел в множестве А, сколько чисел делится на $(a-1)$; Заметим, что $(a-1)(a^2+a+1)=a^3-1$ => $[(a-1)^3, a^3-1] <=> [(a-1)^3, (a-1)(a^2+a+1)]$; $(a-1)^3=(a-1)(a^2-2a+1)$; кол-во чисел, делящихся на $(a-1)$ в этом отрезке $=(a^2+a+1)-(a^2-2a+1)+1 = 3a+1$; Рассмотрим такие промежутки, где $a-1=4$, $=5$, $=6$, $\ldots = \cancel{13}\,10$, $=\cancel{14}\,11$ - во всех этих промежутках нет повторяющихся элементов, а вместе они образуют отрезок $[64, \cancel{2024}\,1727]$ - и в нем есть $(\cancel{14}\,12-5+1)+3\cdot(\cancel{4}\,5+\ldots+\cancel{13}\,11+\cancel{14}\,12)^* = \cancel{11+3(\ldots)}\ 8+3\cdot(6\cdot 13-10)$ чтобы получить кол-во чисел на отрезке $[36, 2025]$, нужно найти кол-во чисел $:3$ на отрезке $[36, 63]$ и кол-во чисел $:12$ на $[1728, 2025]$; $[36, 63]=[12\cdot 3, 21\cdot 3]$; $21-12+1=10$; $[1728, 2025]=[144\cdot 12, 168\cdot 12+9]$; $168-144+1=25$;

$10+8+3\cdot(6\cdot 13-10)+25=10+8+204+25=247$

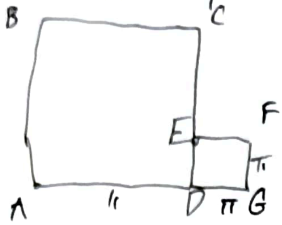
Ответ: 247

$*$ - т.к. ~~для~~ в каждом из отрезков $3a+1$ чисел в множестве А -
$(12-5+1)+3\cdot(5+6+\ldots+12)=(3\cdot 5+1)+(3\cdot 6+1)+\ldots+(3\cdot 12+1)$

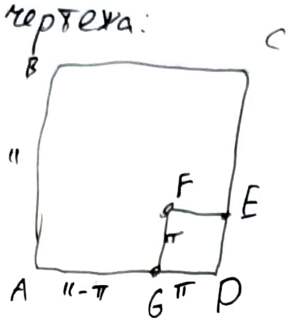
Чистовик, лист 3

5.

Есть два варианта чертежа:



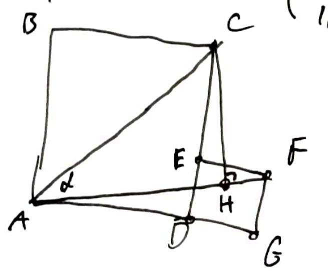
и



; в обоих случаях площадь равна $AF\cdot$ длину перп. из C на (AF)

Т.к. в первом случае AF больше, а $\angle FAG$ – меньше, то в первом случае площадь параллелограмма больше;

в первом случае $\angle FAG = \arctan\left(\frac{FG}{AG}\right) = \arctan\left(\frac{\pi}{11+\pi}\right)$, т.к. $\angle AGF = 90^\circ$; тогда $\angle FAC = 45^\circ - \angle FAG = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{\pi}{11+\pi}\right)$; $AC = 11\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора);

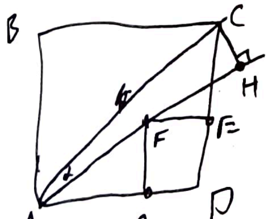


тогда $CH = 11\sqrt{2}\cdot\sin\alpha$ $\left(\alpha = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{11}{11+\pi}\right)\right)$; $AF^2 = (11+\pi)^2 + \pi^2 \Rightarrow$

$AF = \sqrt{121+22\pi+2\pi^2}$; $\Rightarrow S_{AMNF} =$

$= \sqrt{121+22\pi+2\pi^2}\cdot 11\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{\pi}{11+\pi}\right)\right)$

во втором случае $\angle FAG = \arctan\left(\frac{FG}{AG}\right) = \arctan\left(\frac{\pi}{11-\pi}\right)$, т.к. $\angle AGF = 90^\circ$; тогда $\angle FAC = 45^\circ - \angle FAG = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{\pi}{11-\pi}\right)$; ~~BC~~ $AC = 11\sqrt{2}$; тогда $CH = 11\sqrt{2}\cdot\sin\alpha$ $\left(\alpha = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{\pi}{11-\pi}\right)\right)$; $AF^2 = (11-\pi)^2 + \pi^2 \Rightarrow AF =$



$= \sqrt{121-22\pi+2\pi^2}$, $\Rightarrow S_{AMNF} = AF\cdot CH =$

$\sqrt{121-22\pi+2\pi^2}\cdot 11\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{\pi}{11-\pi}\right)\right)$

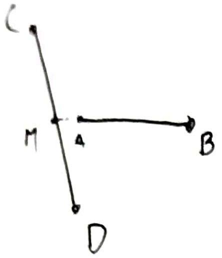
Чистовик, листы

№6

Предположим, что так передвинуть получилось, тогда либо

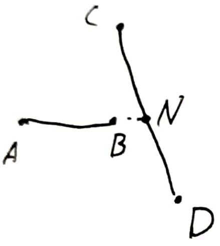
H-новая точка пересечения AB и CD; $\angle DHB=45^\circ$; $AH=a$, $HB=1-a$; $HC=\frac{m\cdot k}{1+k}$, $HD=\frac{m}{1+k}$ (т.к. AB всё ещё на l),

либо



$\angle AMC=135^\circ$, $\angle BMD=45^\circ$; M лежит на l, $CM=\frac{mk}{1+k}$, $MD=\frac{m}{1+k}$, $MA=b$, $MB=1+b$

либо



N-точка пересечения l и CD, $\angle AND=135^\circ$, $CN=\frac{mk}{1+k}$, $\angle ANC=45^\circ$, $BN=c$, $AN=1+c$, $ND=\frac{m}{1+k}$,

Случай 1: по теореме косинусов $AH^2+HC^2-\cos45\cdot AH\cdot HC = BH^2+HD^2-\cos45\cdot BH\cdot HD \Rightarrow a^2+\frac{m^2k^2}{(1+k)^2}-\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\frac{mk}{1+k} = a^2-2a+1+\frac{m^2}{(1+k)^2}-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-a)\cdot\frac{m}{1+k}$, $a\in[0;1)$

Случай 2: по теореме косинусов $\cancel{1+b}$ $1+2b+b^2+\frac{m^2}{(1+k)^2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1+b)\cdot\frac{m}{1+k} = b^2+\frac{m^2k^2}{(1+k)^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b\cdot\frac{mk}{1+k}$; $b>0$

Случай 3: по теореме косинусов $1+2c+c^2+\frac{k^2\cdot m^2}{(1+k)^2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1+c)\cdot\frac{mk}{1+k} = c^2+\frac{m^2}{(1+k)^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot c\cdot\frac{m}{1+k}$; $c>0$

Т.к. если первый случай при неких m и k невозможен, то можно рассмотреть второй случай где b стремится к бесконечности, и тогда $AC=BD$

Ответ: при любых m и k >0

Чистовик, лист 5