

+1 мес 13.17 20

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант В-4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы!
наименование олимпиады

математике

по математике

профиль олимпиады

Пужинантова Руслана Аиевич

фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1 мес 13.17 20

Дата

« 6 » апреля 2025 года

Подпись участника

[Подпись]

90 (двенадцать)

Черновик

$b = 2$ $a, a_2, \dots, a_{15}$ - все четные элементы
 $d: 2$

$$\frac{75 \cdot 14}{2} \leq 7 \cdot 15 \cdot 2 \leq 14 \cdot 15 \text{ - отсюда}$$

$$0 \cdot 1 \cdot 2 \dots 15 = \frac{15}{2} \cdot 14 \leq 7 \cdot 15$$

$$\frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = 14 \cdot 15$$

$$(2a_1 + d(n-1)) \cdot n = 28 \cdot 15$$

$$2a_1 n + d(n-1)n = 28 \cdot 15$$

$$30a_1 + 14 \cdot 15d = 28 \cdot 15$$

$$2a_1 + 14d = 28$$

$$a_1 + 7d = 14$$

$$a_1 : 7 \Rightarrow a_1 : 2 \Rightarrow a_1 : 14$$

$$a_1 = 28 \Rightarrow d = 2$$

$$a_1 = 32 \Rightarrow d = 4$$

$$n: [3n]. n \in \mathbb{N}$$

$$[49; 2025] \in A$$

$$3n \leq 3n < 3n+1$$

$$3n-1 < 3n \leq 3n$$

$$8 \quad 2 \cdot 7$$

$$9 = 3 \cdot 2^3 + \dots$$

$$2 \quad 3$$

$$0 \leq 8; 263$$

$$[3n] = 2$$

$$a_2 = 7 \leq a_1 + d$$

$$49 \leq 7 \cdot 7$$

$$27 \quad 64$$

$$49 \text{ от } 64$$

$$\max: 14 \cdot 2 \leq 28 \text{ от } 64$$

$$\log_2^2(2-x) \cdot \log_3^2(7-x) + 16 \leq 32 \cdot \log_2(2-x) - \log_4(7-x)$$

$$\log_2^2(2-x) \cdot \log_3^2(7-x) + 16 \leq \frac{32}{6} \log_3(2-x) \cdot \log_2(7-x)$$

4. 8

$$(\log_2(2-x) \cdot \log_3(7-x) - 4)^2 \leq 0$$

$$(\log_2(2-x) \cdot \log_3(7-x))' = \frac{-1}{(2-x)\ln 2} - \frac{1}{(7-x)\ln 3}$$

log

$$\log_3(7-x) = \frac{\ln(7-x)}{\ln 3}$$

Задача 1.
Пусть $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ - число арифметический прогрессии
 d - разности арифметический прогрессии ($d < 0$)

Всего матчей: $\frac{14 \cdot 15}{2} = 105$

2) Пусть α_1 - количество очков у победившей команды. Максимум α_1 достигается, если она эта команда выиграла у всех остальных, то есть выиграла 14 матчей. $\alpha_1 \leq 14 \cdot 2 = 28$

4) С одной стороны сумма всех очков по др.-равна: $14 \cdot 15$, а с другой она равна сумме арифметической прогрессии.

$$\frac{2a_1 + d(15-1)}{2} \cdot 15 = 14.15$$

$$a_1 + 7d = 14 \Rightarrow a_1 = 14 - 7d = 7(2 - d)$$

План как a, d -целые числа, то мы а делимое
на a и d . План по $d: 2$, а a $a: 2$. Тогда $m.k. 7$ и 2 взаимнопростые числа
 $a: 14$. Проверим по условию $d < c$, d a $7(2-d) > 7 \cdot 2 = 14$.

97-26-27-27
(137.2)

x_1 (процессинг) x_2 (числовий)
по с другой стороны $a_1 \leq 28 \cdot 4a_1 \cdot 14$, а значит
единств. вариант для $a_1: a_1 = 28$. Тогда

$$7(2-a) = 28$$

$$2-a = 4$$

$$a = -2$$

Второй член прогрессии: $a_2 = 28 - 2 = 26$
ответ: 26

Задача 13.

$$\log_2^2(2-x) \cdot \log_3^2(7-x) + 16 \leq 32 \cdot \log_2(2-x) \cdot \log_4(7-x)$$

$$\textcircled{3}: \begin{cases} 2-x > 0 \\ 7-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x < 7 \end{cases}$$

$$\log_2^2(2-x) \cdot \log_3^2(7-x) + 16 \leq \frac{32}{4} \cdot \log_2(2-x) \cdot \log_2(7-x)$$

$$\log_2^2(2-x) \cdot \log_3^2(7-x) - 8 \cdot \log_2(2-x) \cdot \log_2(7-x) + 16 \leq 0$$

$$(\log_2(2-x) \cdot \log_3(7-x) - 4)^2 \leq 0.$$

Поскольку квадрат числа всегда не меньше нуля,
то данное неравенство имеет выполненное толь-
ко если выполняется равенство:

$$\log_2(2-x) \cdot \log_3(7-x) = 4.$$

$$f(x) = \log_2(2-x)$$

$f(x) = \log_2(2-x)$ — монотонно убывающая ф-ция (линейная, с отриц. коэф. при x)
 $F(t) = \log_3(t)$ — монотонно возрастающая ф-ция (н.д. $\Rightarrow$)
Эта ф-ция $\log$ с основанием 3 и аргументом 4

$\Rightarrow \log_2(2-x)$ — монотонно убывающая ф-ция.

Аналогично $\log_3(7-x)$ — монотонно убывающая
ф-ция, а значит их произведение — монотон-
но убывающая ф-ция

$\log_2(2-x) \cdot \log_3(7-x)$ — монотонно убывает.

Знаю я мы знаем, что монотонно убывающая
ф-ция принимает в каждом своём значении равно-
му может равняться константе (в нашем слу-
чае — 4)

Истовик

где 4) только при единственном значении аргу-
мента. Значит ур-ние:

$$\log_2(2-x) \cdot \log_3(7-x) = 4, \text{ имеет не более одного решения.}$$

Решим уравнение $x = -2$.

$$\log_2(4) \cdot \log_3(9) = 2 \cdot 2 = 4. \text{ Данное значение подходит} \\ \text{удовл. усл. Значит это и есть решение.}$$

Ответ: $x = -2$.

Задача 4.

Заметим, что на промежутке между двумя кубами натурального числа n^3 и $(n+1)^3$ $n \in [k^3; (k+1)^3)$ целая часть $\sqrt[3]{n}$ раскрывается однозначно $(n, k \in \mathbb{N})$

Докажем это. Пусть $n \in \mathbb{N}$ из промежутка $[k^3; (k+1)^3)$. Тогда $\sqrt[3]{k^3} \leq \sqrt[3]{n} < \sqrt[3]{(k+1)^3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow k \leq \sqrt[3]{n} < k+1. \text{ Так как } \sqrt[3]{n} - \text{целое} \\ \text{число по определению, то } \sqrt[3]{n} = k.$$

$$\text{Пример: } 49 > 3^3 = 27 \quad 2025 < 13^3 = 2197.$$

Рассмотрим несколько промежутков.

1) $n \in [49; 64)$ $\sqrt[3]{n} = 3$ (по усл. т. к. все числа на промежутке между 3^3 и 4^3 . Значит нам нужно найти на этом промежутке все числа, которые делятся на 3. ($n = 3a$, где $a \in \mathbb{N}$).

$$\begin{cases} 3a \geq 49 \\ 3a < 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 16\frac{1}{3} \\ a < 21\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 17 \\ a \leq 21 \end{cases} - 5 \text{ чисел, удовл. условию.}$$

$$2) n \in [64; 125) \quad \sqrt[3]{n} = 4. \quad n = 4a \quad (a \in \mathbb{N})$$

$$\begin{cases} 4a \geq 64 \\ 4a < 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 16 \\ a < 31\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 16 \\ a \leq 31 \end{cases} - 16 \text{ чисел, удовл. условию.}$$

$$3) n \in [125; 216) \quad \sqrt[3]{n} = 5 \quad n = 5a \quad (a \in \mathbb{N})$$

$$\begin{cases} 5a \geq 125 \\ 5a < 216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 25 \\ a < 43\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 25 \\ a \leq 43 \end{cases} - 19 \text{ чисел, удовл. условию.}$$

97-26-27-27

(137,2)

Черезвик №2.

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ \hline 125 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 36 \\ 396 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 49 \\ 343 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 84 \\ 512 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 981 \\ 729 \end{array}$$

$$10^3 = 1000$$

$$11^3 =$$

$$\begin{array}{r} \times 36 \\ 216 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 121 \\ 11 \\ \hline 121 \\ \hline 1331 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 144 \\ 12 \\ \hline 288 \\ \hline 1728 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 189 \\ 13 \\ \hline 507 \\ \hline 2197 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \overline{) 216} \\ - 36 \\ \hline 19 \\ - 18 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 36 \\ 216 \end{array}$$

2 3 4 5

$$n = 3k,$$

$$3k > 49$$

$$3k < 64$$

$$\begin{cases} 3a > 49 \\ 3a < 64 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a > 12 \\ a < 17 \end{cases}$$

$$a \leq 21$$

$$a > 0$$

$$\begin{array}{r} \times 31 \\ 16 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 43 \\ 25 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 57 \\ 6 \\ \hline 312 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 57 \\ 36 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$x, y > 0$$

$$\begin{array}{r} \times 79 \\ 25 \\ \hline 54 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 73 \\ 49 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a+2$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq$$

$$2\sqrt{xy} \leq x+y$$

$$\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a$$

$$\frac{2\sqrt{xy}}{x+y} \geq 0$$

$$a \left(\frac{2\sqrt{xy}}{x+y} - 1 \right) \geq 0$$

$$\frac{2\sqrt{xy}}{x+y} \geq 1$$

$$2\sqrt{xy} \geq x+y$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + a$$

$$\frac{y^2 + x^2}{xy} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a+2$$

$$\frac{(x+y)(x^2+y^2) + 2a\sqrt{xy}^3}{(x+y)(xy)} \geq a+2$$

№4 (Продолжение) Иисавин

$$④ \quad n \in [396; 216] \Rightarrow [3n] = 6 \Rightarrow n = 6a (a \in \mathbb{N})$$

$$\begin{cases} 6a \geq 396 \\ 6a < 216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 66 \\ a < 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 66 \\ a \leq 35 \end{cases} \Rightarrow \text{22 кандидата не подходит}$$

$$⑤ \quad n \in [343; 512] \Rightarrow [3n] = 7 \Rightarrow n = 7a (a \in \mathbb{N})$$

$$\begin{cases} 7a \geq 343 \\ 7a < 512 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 49 \\ a < 73 \frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 49 \\ a \leq 73 \end{cases} \Rightarrow \text{25 кандидатов не подходит}$$

$$⑥ \quad n \in [512; 729] \Rightarrow [3n] = 8 \Rightarrow n = 8a (a \in \mathbb{N})$$

$$\begin{cases} 8a \geq 512 \\ 8a < 729 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 64 \\ a < 91 \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 64 \\ a \leq 91 \end{cases} \Rightarrow \text{28 кандидатов не подходит}$$

$$⑦ \quad n \in [729; 1000] \Rightarrow [3n] = 9 \Rightarrow n = 9a (a \in \mathbb{N})$$

$$\begin{cases} 9a \geq 729 \\ 9a < 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 81 \\ a < 111 \frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 81 \\ a \leq 111 \end{cases} \Rightarrow \text{31 кандидат не подходит}$$

$$⑧ \quad n \in [1000; 1331] \Rightarrow [3n] = 10 \Rightarrow n = 10a (a \in \mathbb{N})$$

$$\begin{cases} 10a \geq 1000 \\ 10a < 1331 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 100 \\ a < 133 \frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 100 \\ a \leq 133 \end{cases} \Rightarrow \text{34 кандидата не подходит}$$

$$⑨ \quad n \in [1331; 1728] \Rightarrow [3n] = 11 \Rightarrow n = 11a (a \in \mathbb{N})$$

$$\begin{cases} 11a \geq 1331 \\ 11a < 1728 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 121 \\ a < 157 \frac{1}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 121 \\ a \leq 157 \end{cases} \Rightarrow \text{37 кандидатов не подходит}$$

$$⑩ \quad n \in [1728; 2025] \Rightarrow [3n] = 12 \Rightarrow n = 12a (a \in \mathbb{N})$$

$$\begin{cases} 12a \geq 1728 \\ 12a < 2025 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 144 \\ a < 168 \frac{9}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 144 \\ a \leq 168 \end{cases} \Rightarrow \text{25 кандидатов не подходит}$$

Всего подходит людей из предложения:

$$25 \quad 5 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28 + 31 + 34 + 37 + 25 =$$

$$= 242$$

ответ: 242

97-26-27-27
(137.2)

Числовый

Задача №5. Переформулируем задачу. при
каких a , разрешимое неравенство при
 $x, y > 0$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \leq a+2$$

$$\frac{x^2+y^2}{y \cdot x} + a \left(\frac{2\sqrt{xy}}{x+y} - 1 \right) \leq 0$$

Введём замену $(x+y)=p$; $\sqrt{xy}=r$. ($p, r > 0$)
Примем т.к. $x, y > 0$. Это то пер-во о средних:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow \frac{p}{2} \geq r.$$

Положим левую пер-во:

$$\frac{p^2 - 2r^2}{p^2} + a \left(\frac{2r}{p} - 1 \right) \leq 0$$

$$\frac{p^2}{r^2} - 2 + a \left(\frac{2r}{p} - 1 \right) \leq 0$$

Введём новую замену: $\frac{p}{r}=t$, примем по пер-во
о ср. ранее гл.к.: $t \geq 2$

$$t^2 - 2 + a \left(\frac{2}{t} - 1 \right) \leq 0$$

$$t^2 - 2 + \frac{2a}{t} - a - 1 \leq 0 \quad (\text{т.к. } t \geq 2 \text{ умножим обе части на } t)$$

$$t^3 - 4t + 2a - at \leq 0.$$

Заметим, что $t=2$ является корнем:

$$8 - 8 + 2a - 2a = 0$$

$$(t-2)(t^2 + 2t - a) \leq 0.$$

А так как $t \geq 2$, то $t^2 + 2t - a < 0$.

$$D = 4 + 4a > 0$$

$$t_1 = \frac{-2 - \sqrt{4+4a}}{2} \Rightarrow \left\{ t \in \left(\frac{-2 - \sqrt{4+4a}}{2}, \frac{-2 + \sqrt{4+4a}}{2} \right) \right\}$$

$$t_2 = \frac{-2 + \sqrt{4+4a}}{2} \quad \text{т.к. } t \geq 2$$

чтобы t был решением, необходимо, чтобы

$$\frac{-2 + \sqrt{4+4a}}{2} > 2 \quad (\text{т.к. } t \geq 2 \text{ должен быть})$$

исходные

$$\sqrt{u+4a} > 4$$

$$\sqrt{u+4a} > 6$$

$$4+4a > 36$$

$$4a > 32$$

$$a > 8$$

тогда y + есть значение y при $x=y$ и тогда есть минимальное y при $x=y$ $\frac{p}{r} \neq 1$

при $a > 8$:

$$\begin{cases} p=x+y \\ r=\sqrt{x+y} \end{cases} \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad a \left(1 - \frac{2\sqrt{xy}}{x+y} \right) + 2$$

то пер-ву оср: $\frac{2\sqrt{xy}}{x+y} \leq \frac{2(x+y)}{2(x+y)} = 1$, а значит

пер-ва a не отриц. а значит

функция $f(a) = a \left(1 - \frac{2\sqrt{xy}}{x+y} \right) + 2$ - возрастает.

$$a \left(1 - \frac{2\sqrt{xy}}{x+y} \right) + 2 > 8 - \frac{16\sqrt{xy}}{x+y} + 2$$

подставим $x=y=2$, тогда:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$$

$$a \left(1 - \frac{2\sqrt{xy}}{x+y} \right) + 2 > 8 - \frac{16 \cdot 2}{4} + 2 = 2, \text{ а значит}$$

$$a \left(1 - \frac{2\sqrt{xy}}{x+y} \right) + 2 > \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$a + 2 > \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}$$

а значит $(2, 2)$ - является всегда решением

пер-ва $a + 2 > \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}$ при $a > 8$

ответ: $a > 8$.

97-26-27-27
(137.2)

Числовик

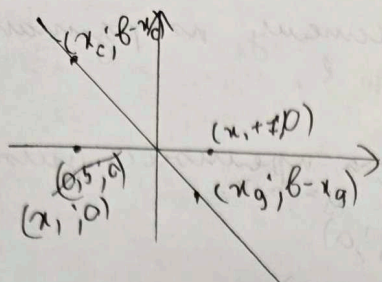
$$(x_3 - x_2 - 1)(2x_1 + 2d + 1 - x_2 - x_3) = (x_3 - x_2)(x_3 + x_2)$$

 $x_3 + 1$ по условию:

$$\sqrt{x_2 + x_3} = m \Rightarrow 4(x_2 + x_3) = \frac{m}{\sqrt{2}}$$

$$(x_3 - x_2 - 1)($$

Черновик



$$\sqrt{x_c^2 + (b-x_c)^2} = k \sqrt{x_g^2 + (b-x_g)^2}$$

$$x_c^2 + b^2 - 2x_c b + x_c^2 = k^2 x_g^2 + 2$$

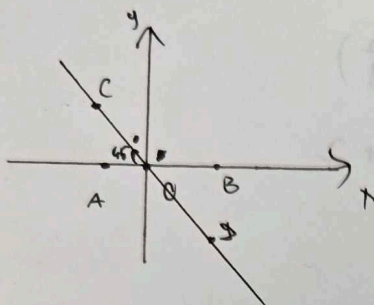
$$(x_c - x_g)^2$$

Числовая.

Задача 6.

Введём прямоугольную систему координат, где ось Ox совпадает с осью l .
т. $O \notin (0,1)$

тогда т. C и т. D лежат на прямой l с уравнением $xy = -1$: $y = -\frac{1}{x}$
т. $A(x_1, 0)$



т. $B(x_1+1, 0)$
т. $C(x_2, -x_2)$
т. $D(x_3, -x_3)$

Используем по условию:

$$\sqrt{x_2^2 + x_2^2} = k \cdot \sqrt{x_1^2 + x_1^2} \cdot \sqrt{x_3^2 + x_3^2}$$

$$2x_2^2 = 2k^2 x_1^2 x_3^2$$

Когда мы передвигаем AB по l мы добавим к их абсциссе одинаковое число d .

У нас появятся новые точки

$A'(x_1+d, 0)$ $B'(x_2+d, 0)$, при этом $d \in \mathbb{R}$

иначе AB пересек

и нам нужно, чтобы:

$$(x_1+d-x_2)^2 + x_2^2 = x_3^2 + (x_1+d-x_3)^2$$

$$(x_1+d)^2 - 2x_2(x_1+d) + 2x_2^2 = 2x_3^2 + (x_1+d-x_3)^2 - 2x_3(x_1+d)$$

$$(x_1+d)^2 - 2x_2x_1 - 2x_2d + 2x_2^2 = 2x_3^2 - 2x_3x_1 - 2x_3d - 2x_3^2$$

$$(x_1+d)^2 - 2(x_1+d) + 1$$

$$x_1(-2x_2 + 2x_3 - 2) - 2x_2d + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_3 - 2x_3d -$$

$$+ 2d + 1 = 0$$

$$(x_1+d-x_2-x_1-1+d+x_3)(x_1+d-x_2+x_1+1+d-x_3) = (x_3-x_2)(x_3+x_2)$$

Черновик.

$$76 + 19 + \dots$$

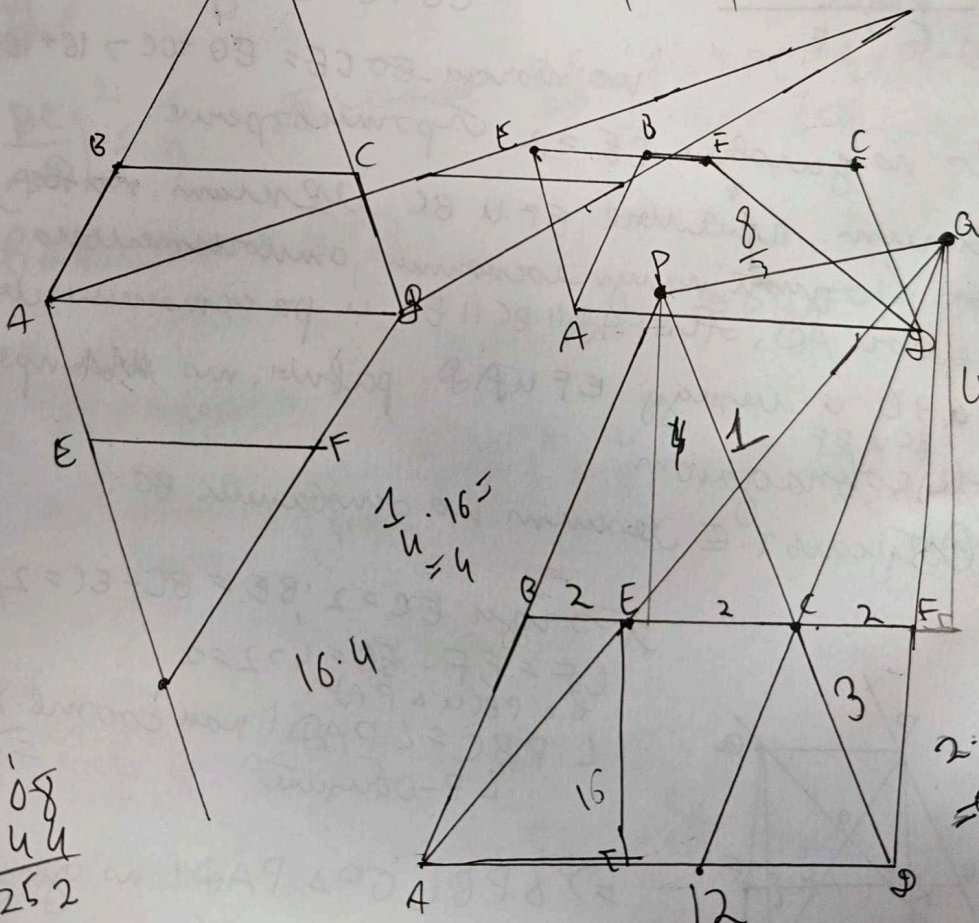
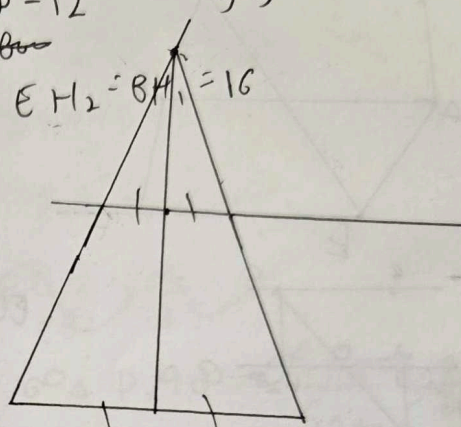
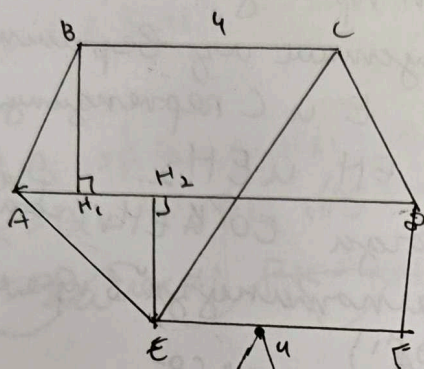
$$\frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{2\sqrt{xy}}{x+y} \leftarrow a+2$$

$$\begin{array}{r} 32 + 7 \cdot 2 \cdot 85 \\ 2 \\ \hline 56 \cdot 4 \\ 224 \end{array}$$

$$x=1: y + \frac{1}{y} + \frac{2\sqrt{y}}{1+y}$$

$$AD=12$$

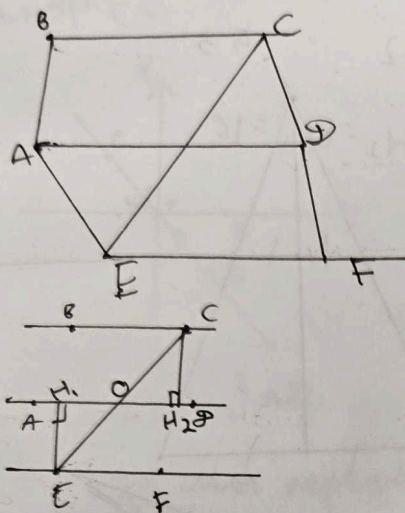
$$EH_2 = BH_1 = 16$$



$$\begin{array}{r} 708 \\ 144 \\ \hline 252 \end{array}$$

$$2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

Числовик.
 №2) Пусть ~~отсюда~~ (прямые EF и BC лежат по разные стороны от прямой AD. (В противном случае расстояние между прямыми EF и AD и между прямой BC и AD равно 16



тогда EC не пересекает прямую AD. (+0)
 Опустим из вершин E и C перпендикуляры EH1 и EH2.
 тогда $EO \nless EH1$ (т.к. EO - гипотенуза в прямоугол. $\triangle EOH1$)
 $CO > CH2$ (т.к. CO - гипотенуза в прямоугол. $\triangle COH2$)

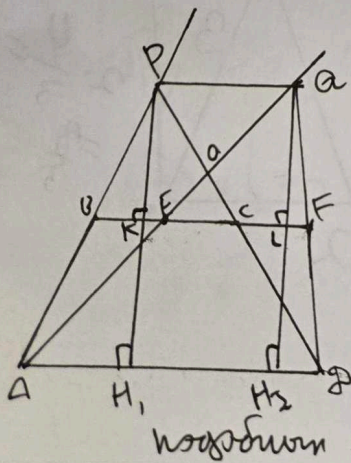
но тогда $EO + CE = EO + OC > 16 + 16 = 32$.

И по условию $CE = 2$. Противоречие.

Значит прямые EF и BC лежат по одну сторону от прямой AD, т.е. $AD \parallel BC \parallel EF$ и расстояние между AD и BC и между EF и AD равно, но ~~так~~ прямые совпадают.

В① Пусть T.E лежит на основании BC.

тогда $EC = 2$, $BE = BC - EC = 2 - 2 = 0$
 $CF = EF - EC = 4 - 2 = 2$
 в $\triangle PBC$ и $\triangle PAD$:
 $\angle PBC = \angle PAD$ (как соотв.)
 $\angle P$ - общий $\Rightarrow$



$\Rightarrow \triangle PBC \sim \triangle PAD$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{PK}{PH} = \frac{BC}{AD} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (т.к.

PK и PH - соотв. элементы в подобных $\triangle$ -ках)

числа
нз (продолжение)

$$PK = \frac{1}{3} PH_1 = \frac{1}{3}(PK + KH_1) \Rightarrow \frac{2}{3} PK = \frac{1}{3} KH_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PK = \frac{1}{2} KH_1 = 8.$$

$\triangle AEF \sim \triangle AAD$;

$\angle A$ - общий.

$\angle AEF = \angle AAD$ или соотв

$$\triangle AEF \sim \triangle AAD \Rightarrow \frac{AE}{AH_2} = \frac{EF}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AL = \frac{1}{3}(AL + LH_2) \Rightarrow AL = \frac{1}{2} LH_2 = 8.$$

$$PK = AL \Rightarrow PK \parallel BF \parallel AD. \text{ Тогда } \frac{PK}{KH} = \frac{AL}{LH_2} = \frac{1}{2}.$$

По Т. Палла: $\frac{PK}{KH} = \frac{PC}{CD} = \frac{1}{2}.$

По Т. Палла: $\triangle PBC \sim \triangle PAD \Rightarrow \frac{S_{PBC}}{S_{PAD}} = \frac{1}{4}.$

$$\Rightarrow \left(\frac{PC}{AD}\right)^2 = \frac{1}{9}. \text{ Также, } \frac{PC}{PD} = \frac{1}{3} \Rightarrow PC = \frac{1}{3}(PC + CD) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PC = \frac{1}{2} CD.$$

$\triangle DCF \sim \triangle DPQ$;

$\angle D$ - общий

$$\angle DCF = \angle DPQ \Rightarrow \triangle DCF \sim \triangle DPQ =$$

$$\Rightarrow \frac{S_{DCF}}{S_{DPQ}} = \left(\frac{DC}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

$$S_{DCF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot LH_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 16 = 16.$$

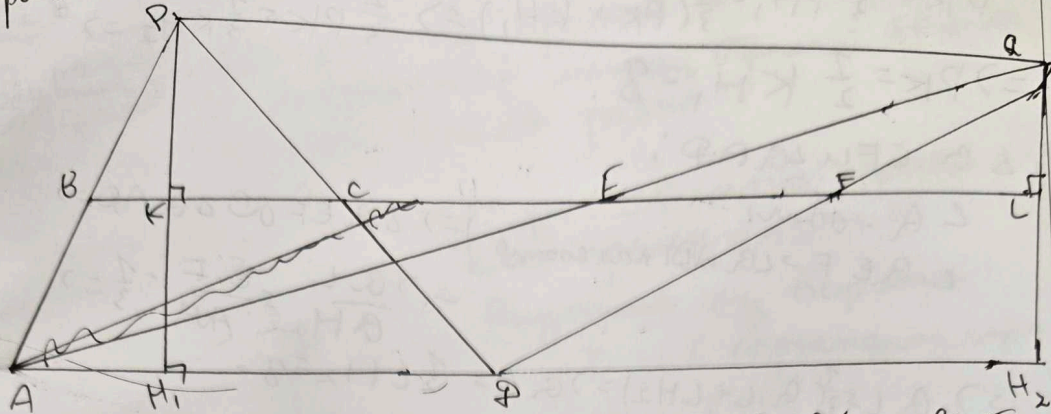
$$S_{PBC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot KP = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$$

$$S_{APQD} = S_{APD} + S_{PAD} = 9 \cdot S_{PBC} + \frac{9}{4} \cdot S_{DCF} = 9 \cdot 16 +$$

$$+ \frac{9}{4} \cdot 16 = 144 + 36 = 180$$

2) Пусть Т. Е лежит вне основания ВС.
Тогда она тоже делит

правее т. C, иначе $CE = BE + BC > 2$.



Ансамбл $\mu_{\text{ансамбл}} = \frac{P_K}{K H_1} =$

~~to r. p. analysis~~ Analysis n. 10 Δ PBC ∞ Δ PAP
 no given value $\Rightarrow \frac{BC}{AP} = \frac{PK}{PH_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow PK = \frac{1}{2} KH_1 = 8$

$$\triangle QEF \sim \triangle QAP \text{ (по двум углам)} \Rightarrow \frac{EF}{AP} = \frac{QE}{AQ} = \frac{QL}{QH_2}$$

$$= \frac{1}{3} \Rightarrow \cancel{Q_L = \frac{1}{2} Q_{H_2}} \Rightarrow Q_L = \frac{1}{3} Q_{H_2} = \frac{2}{3} (Q_L + Q_{H_2}) =$$

$$\therefore G_{H_2} = \frac{1}{2} \varepsilon_{H_2} = 8.$$

$P \perp B L$ (т.к. $B O \perp P K = Q L$)

$$\frac{S_{PBC}}{S_{PAD}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \text{ (no negative)} \Rightarrow S_{PAD} = 19 - S_{PBC} = 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 144$$

$$\Delta G_{CF} \approx \Delta G_{PA} (T.K.CF \parallel PA) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\text{out}}}{S_{\text{PA}}} = \left(\frac{V_{H2}}{V_{H2A}} \right)^2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 < \frac{4}{9} \Rightarrow S_{\text{out}} < \frac{4}{9} S_{\text{PA}} < \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}$$

$$50 \cdot FC \cdot L_{H2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 16^2 = 108.$$

$$\therefore S_{APGD} = S_{APD} + S_{PQD} = 108 + 144 = 252$$

SAPP Ambem: a) 252

5, 780

Черивин

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2\sqrt{xy}}{x+y} \geq a+2.$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + a \left(\frac{2\sqrt{xy}}{x+y} - 1 \right) \stackrel{<}{\geq} 2.$$

$$\frac{2\sqrt{xy}}{x+y} - 1 < 0$$

$$(x+y) = \theta p$$

$$p \geq 2r$$

$$\frac{2\sqrt{xy}}{x+y} < 1$$

$$\sqrt{xy} = r$$

$$x = 2 - y.$$

$$2\sqrt{xy} < x+y$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{xy}} \geq 2.$$

$$\frac{x^2+y^2}{yx} = \frac{a^2-2b^2}{b^2} + a$$

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}.$$

$$p^2 + r^2 \quad \frac{p^2 - 2r^2}{r^2} + a \left(\frac{2r}{p} - 1 \right) < 2.$$

$$\frac{p^2}{r^2} - 2 + a \left(2 \frac{r}{p} - 1 \right) < 2.$$

Пусть $\frac{r}{p} = t \geq 2$

$$t^2 - 2 + a \left(\frac{2}{t} - 1 \right) < 2$$

$$t^2 - 2 + \frac{2a}{t} - a - 4 < 0 - \text{разделим на } t.$$

$$t^3 + 2a - (a+4)t < 0$$

$$t = 2 - \text{корень}$$

$$(t-2)(t^2+2t-a) < 0$$

$$8 + 2a - 2a \neq 8$$

$$\frac{t^3 + 2a - (a+4)t}{t^3 - 2t^2} \quad \left| \frac{t \neq 2}{t^2 + 2t - a} \right.$$

$$\frac{-2t^2 - (a+4)t + 2a}{2t^2 - 4t}$$

$$-at + 2a$$

$$a \geq 8.$$

$$4a + 4a \geq 36$$

$$4a \geq 32$$

$$t^2 + 2t - a < 0$$

$$D = 4 + 4a > 0$$

$$t_1 = \frac{-2 - \sqrt{4+4a}}{2}$$

$$t_2 = \frac{-2 + \sqrt{4+4a}}{2}$$

$$\frac{-2 + \sqrt{4+4a}}{2} \geq 2.$$

$$\sqrt{4a+4a} \geq 6.$$

Черновик

$$xy = r^2$$

$$p^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2$$

$$y = p - x$$

$$r = \sqrt{x(p-x)}$$

$$r^2 = x(p-x)$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} < a+2$$

$$a+2 > 10$$

$$a+2 >$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} < a(1 - \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}) + 2$$

$$10 - \frac{20\sqrt{xy}}{x+y} + 2 > \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$1 \ 2.$$

$$10 - \frac{20\sqrt{xy}}{x+y} + 2 > \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$1, 1, 5$$

$$10 - \frac{20\sqrt{1,44}}{2,44} + 2 > \frac{1}{1,44} + 1,44$$

$$\frac{1}{1,44} + 1,44$$

$$\frac{20 \cdot 2}{3} + 2$$

$$\frac{c_0}{0} \Rightarrow c_0 = k \cdot 0$$

$$10 -$$

$$2 \ 2$$

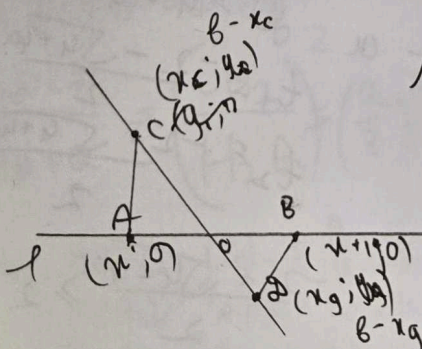
$$10 - \frac{5 \cdot 2}{4} + 2 > \frac{7+1}{2}$$

$$\frac{8\sqrt{xy}}{x+y} + 2$$

$$10 - 8 -$$

$$\frac{c_0}{0} = k \cdot 0$$

$$k.$$



$$-xc + b = yc$$

$$xc^2 + b - xc^2$$