0 486040 970006

48-60-40-97
(150.6)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

+1 доп. лист

Вариант 10 классы В-2.

Выход: 13:37 – 13:39

Ростов-на-Дону

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"

по математике.

Сидорова Тимофея Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«6» 04 2025 года

Подпись участника

48-60-40-97
(150.6)

Зад

75 (семьдесят пять)

Чистовик:

№1 Заметим, что за 1 матч

Общее кол-во очков, полученных всеми командами увеличивается на 2.

$\Rightarrow$ к концу соревнований

Сумма всех очков $= \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 2 =$

$= 90$

] a_1 - кол-во очков у худшей команды

a_{10} - кол-во очков ~~худшей~~ лучшей команды (сумма арифм. прогр.

$\Rightarrow \frac{(a_1 + a_{10})}{2} \cdot 10 = 90$

$t = a_{i+1} - a_i \geq 2$.

$a_1 + a_{10} = 18$.

(за победу начисляют четное кол-во очков.

$\Rightarrow t \geq 2$.

$a_1 + a_{10} = 2a_1 + 9t \geq 2a_1 + 18$

$\Rightarrow 18 = 2a_1 + 9t \geq 2a_1 + 18$

$a_1 \leq 0$.

$\Rightarrow a_1 = 0$

$\Rightarrow t = 2$

$\Rightarrow a_9 = a_{10} - 2 = 18 - 2 = 16$

Ответ: 16.

№1 Чистовик

№3 я задаю арифметическую прогрессию $A = \{a_1, \dots a_{10}\}$:

a_i - кол-во очков одной из команд

№2. Z - мн-во замечательных лет

Сразу отметём. 2100 год

$2100 \vdots 21+0 \Rightarrow$ он замечательный

$2100 \in Z$

Далее остались года с 20 вначале

$\Rightarrow$ если $\overline{20ab} \in Z$

$\Rightarrow \overline{20ab} \vdots \cancel{20+\overline{ab}}$

$\Rightarrow \overline{20ab} - 20 - \overline{ab} \vdots 20 + \overline{ab}$

$20 \cdot 99 \vdots 20 + \overline{ab}$

1) $\overline{ab} \vdots 20 \Rightarrow \overline{ab} \in \{20, 40, 60, 80\}$

1.1 $\overline{ab} = 20$

$20 \cdot 99 \not\vdots 40$ $\varnothing$

1.2 $\overline{ab} = 40$.

$20 \cdot 99 \vdots 60$. - верно.

$\Rightarrow 2040 \in Z$

1.3 $\overline{ab} = 60$

$\Rightarrow 20 \cdot 99 \not\vdots 80$ $\varnothing$

1.4 $\overline{ab} = 80$

$\Rightarrow 20 \cdot 99 \not\vdots 100$ $\varnothing$

48-60-40-97 (150.6)

~~=> ab⋮20~~ Чистовик

вы
№2 => $20\cdot 99 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11$

$119 = 20+99 \geq 20+\overline{ab} \geq 20$

=> нужно подобрать делители числа $20\cdot 99 \geq 20$

делителями числа $20\cdot 99$ являются числа

1	110
2	220
4	165
3	660
9	330
6	990
12	1980
36	495
5	4
11	
10	
20	
15	
45	
30	
60	
180	
22	
44	
33	
99	
66	
132	
396	
55	
18	
198	

кол-во делителей совпадает с кол-вом из основной теоремы арифметики.

$(2+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 36$

Выберем из списка делители $\in [20;119]$

$\Rightarrow 20+\overline{ab} \in \{36, 20, 45, 30, 60, 22, 44, 33, 99, 66, 55, 90, 110\}$

не удовл.

$\Rightarrow \overline{ab} \in \{16, 0, 25, 10; 40; 2; 24; 13; 79; 46; 35; 70; 90\}$

12 значений

+ 2100.

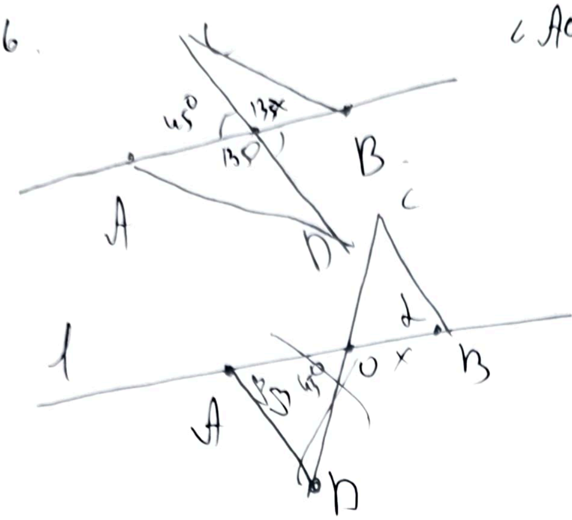
~~=> Ответ: Z = 2100; 2016; 2015;~~

$\Rightarrow |Z| = 13$

Ответ: 13

Чистовик

№6.



$\angle AO = 45°$ Дано:

$\frac{CO}{OD} = k$

$CD = m$

$AB = 1$

Найти: $(k; m)$ - ? при $AD = CB$

Решение:

Буду решать, будто у нас два отрезка уже пришли в такое положение

$$\frac{CO}{OD} = k \quad CD = m$$

$$\Rightarrow CO = \frac{m \cdot k}{k+1}$$

$$OD = \frac{m}{k+1}$$

$$OB = x$$
$$AO = 1 - x$$

$\Rightarrow$ по т. cos в $\angle AOD$

$$\begin{cases} AD^2 = \cancel{\ldots}(1-x)^2 + \frac{m^2}{(k+1)^2} + \frac{(1-x)m\sqrt{2}}{k+1} \\ ABC^2 = x^2 + \frac{m^2k^2}{(k+1)^2} + \frac{xm\sqrt{2}}{k+1} \end{cases}$$

$AD = BC$

$$\Rightarrow 1 - 2x + x^2 + \frac{m^2}{(k+1)^2} + \frac{(1-x)m\sqrt{2}}{k+1} =$$

$$= x^2 + \frac{m^2k^2}{(k+1)^2} + \frac{xm\sqrt{2}}{k+1}$$

48-60-40-97

Чистовик

№6.

$$\frac{m^2(k-1)}{k+1}+2x-1=\frac{(2x-1)m\sqrt{2}}{k+1} \quad | \cdot k+1$$

$$m^2(k-1)+(2x-1)(k+1)+(2x-1)m\sqrt{2}=0$$

Рассмотрим $k=1$; $x=0{,}5$

$\forall x - 2$ все уд-ет.

$$k=\frac{m\sqrt{2}(1-2x)+(1-2x)+m^2}{m^2+2x-1}$$

$$-1<2x-1<1$$

$$k<\frac{m\sqrt{2}+m^2+1}{m^2-1}<\frac{(m+1)^2}{m^2-1}=$$

$$=\frac{m+1}{m-1}=$$

$$m>1+\sqrt{2} \Rightarrow =1-\frac{2}{m-1}<1-\sqrt{2}$$

$$k>\frac{m^2-m\sqrt{2}-1}{m^2+1}>\frac{(m-1)^2-2}{m^2+1}>$$

$$>0$$

$$\Rightarrow m>1+\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ единственный в-т:

$k=1$

Ответ: $k=1$

Черновик

$2a_1 + 9 \cdot t = 18$

$(2x-1)^{m\sqrt{2} - k - 1} = m2(k-1)$

$2x - 1 = \frac{m2(k-1)}{m\sqrt{2} - k - 1}$ 2016

$x < 1$ 816

$\Rightarrow 2x - 1 < 1$

$m2(k-1) < m\sqrt{2} - k - 1$

$-1 < 2x - 1$

$m2(k-1) - m\sqrt{2} + k + 1) < 0$

169

3

507

169

2197

$D: 2 - 4k^2 + 4 =$

$= 6 - 4k^2 \cancel{\geq 0} = 0$

$m2(k-1)) > k + 1 - m\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$m^2(k-1) + m\sqrt{2} - (k+1) > 0$. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$D: 2 + 4k^2 - 4 \geq 0$.

$4^3 = 64$ $k < 1$

$5^3 = 125$

$6^3 = 216$

$7^3 = \cancel{329}$ 343 $16 \cdot 8 - 144$

$8^3 = 512$

$9^3 = 729$

$10^3 = 1000$

Чистовик

№4.

(I) $a=b=c$.

~~$4a+c$~~

$$f(a)=\frac{a^3}{4a^2(a+1)(a+16)}=\frac{a}{4(a^2+17a+16)}$$

$$f'(a)=\frac{2a^2+17a-a^2-17a-16}{4\cdot(a^2+17a+16)^2}=$$

$$=\frac{a^2-16}{4(a^2+17a+16)^2}=0$$

при $a=\pm 4$. $a=4$ - min

~~$a=4$~~

$$f(4)=\frac{4}{4\cdot 100}=\frac{1}{100}$$

II есть хотя бы пара

неравных чисел. => одно из них > другого

$$\Rightarrow \frac{abc}{(a+1)(a+c)(b+16)(b+c)}<\frac{q}{4(a+1)(b+16)}$$

поскольку

$(a+c)\cdot(b+c)\geq 4\cdot\frac{abc}{q}$, где $q\in\{a,b,c\}$

q - max

(2) 1. $q=c$. $\exists\, a\leq b$ (иначе зеркально)

$$\frac{c}{4(a+1)(b+16)}\geq\frac{c}{4\cdot(a^2+17a+16)}$$

тогда $a\leq b$ или наоборот, не играет роли

min достигается при ~~а~~ max. $a^2+17a+16$ → max,

$a\to 0$.

=> $a+1\to 1$ $b+16\to 16$, тогда

что возможно при $a=c$ ($a<c$),

тогда. ~~$\frac{abc}{(a+1)(a+c)(b+16)(b+c)}$~~ <4, т.к. есть

пара различных

Чистовик

№4.

~~2 $q=\{a,b\}$] $q=a$, иначе всё аналогично для $q=b$ $\Rightarrow b \le a$.~~

$$\cancel{\frac{abc}{(a+1)(b+16)(a+c)(b+c)} < \frac{a}{4(a+1)(b+16)}}$$

тогда $\frac{abc}{(a+1)(b+c)(a+c)(b+16)} \to 0 \; \varnothing$

$\Rightarrow q \in \{a,b\}$] $q=a$, иначе всё аналогично для $q=b$.

$$\frac{a}{4(a+1)(b+16)} \le \frac{a}{4(a^2+17a+16)} \Rightarrow a=4.$$

$\Rightarrow$ max q-ся при $a=b=c=4$

Ответ: $a=b=c=4$.

48-60-40-97
(150.6)

Чистовик №4

$\Rightarrow \triangle CQH' \sim \triangle HGF$

$\Rightarrow \frac{CH'}{GH} = \frac{CQ}{FG}$

$CH' = \frac{GH \cdot CQ}{FG} = \frac{(11\pi - \pi^2)(121 - 22\pi)}{\sqrt{(11-\pi)^2+\pi^2}\,(11-\pi)\cdot\pi} =$

$= \frac{121-22\pi}{\sqrt{(11-\pi)^2+\pi^2}}$

$\Rightarrow S_{AFMN} = CH' \cdot AF = \frac{121-22\pi}{\sqrt{(11-\pi)^2+\pi^2}} \cdot \sqrt{(11-\pi)^2+\pi^2} =$

$= 121 - 22\pi$

$121 - 22\pi < 121$

$\Rightarrow$ Ответ: max $-(121)$
min $-(121-22\pi)$

Черновик

$8x^2-8x+2-4(2k-1)(k^2+1)=$

$=(4x-2)(2k-1-2k^2+2)>0$

$\frac{kx}{\sqrt{2}}=\sin\alpha\ (B$

$\frac{x}{\sqrt{2}}=\sin\gamma\ (B\ \frac{a}{4(a+1)(a+16)}$

$(a+c)(b+c)=ab+ac+bc+c^2>2a\cdot 2b$

$3ab\ ?\ ac+bc+c^2$

$\frac{m^2-2m-1}{m^2+1}$

$(a+1)\ (a+c)(b+c)(b+16)<$

$(a+1)b+16$

$2m^3-2m^2-2m-2m^3-2m+2m^2+2$

$\frac{a}{4(b^2+17b+16)}$

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=k$

$\frac{16\cdot 3}{(4)\ 7\cdot 20\cdot 7}=$

5

$\sin\alpha<\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{3}{(m-1)}$

$\frac{1}{\ }$

$m>1$

№3. Чистовик

Выпишем все полные куба на данном промежутке:

$4^3=64$

$5^3=125$

$6^3=216$

$7^3=343$

$8^3=512$

$9^3=729$

$10^3=1000$

$11^3=1331$

$12^3=1728$

$13^3=2197$ – не уд.

∃ найдётся $a\in(n^3;(n+1)^3)$

$\Rightarrow \lfloor\sqrt[3]{a}\rfloor=n$

$\Rightarrow$ если $a\in A$, то $a \vdots n$

$\Rightarrow$ для $a\in[36;4^3)$

кол-во чисел:

1.1 $\frac{63-36}{3}+1=10$.

для $a\in[4^3;5^3)$

их

1.2 $\frac{124-64}{4}+1=16$.

для

1.3 $a\in[5^3;6^3)$

$\frac{215-125}{5}+1=19$.

1.4 $a\in[6^3;7^3)$

$\frac{342-216}{6}+1=$

$=22$.

1.5 $a\in[7^3;8^3)$

$\frac{511-343}{7}+1=$

$=25$

1.6. $a\in[8^3;9^3)$

$\frac{728-512}{8}+1=$

$=28$.

1.7 $a\in[9^3;10^3)$

$\frac{999-729}{9}+1=$

$=31$

1.8 $a\in[10^3;11^3)$

$\frac{1330-1000}{10}+1=$

$=34$.

1.9 $a\in[11^3;12^3)$

$\frac{1727-1331}{11}+1=$

$=37$

1.10. $a\in[12^3;2025]$

Найдём max число $\vdots 12$ к 2025 – 2016

$\Rightarrow \frac{2016-1728}{12}+1=25$

Чистовик

№3(прод)

Итого: $K \sum = 10+16+19+22+25+28+31+34+37+25 =$

$= 212 + 35 = 247$

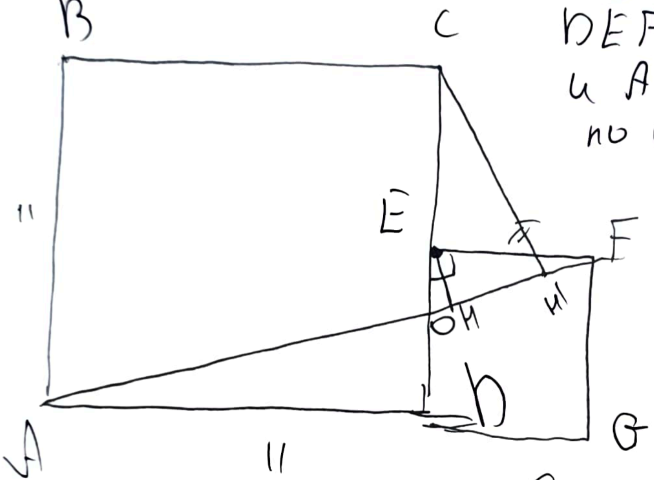
Ответ: 247

№3! единица, прибавляемая в каждом пункте $a \in [n^3; (n+1)^3)$ - это мы так учитываем n^3

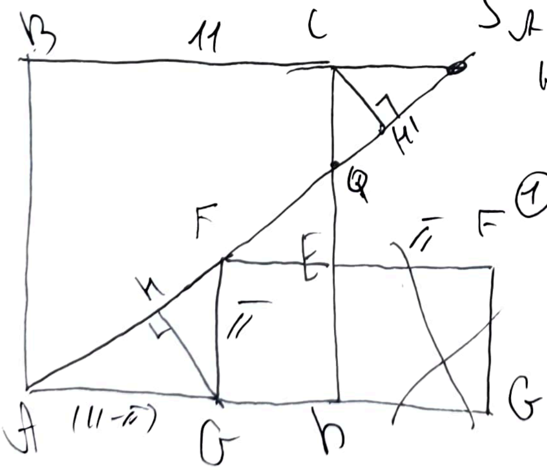
№5 CEMN

Всего есть 2 в-та расположения DEFG и AF тоже по сути, нам не требуется отношение, в котором C делит MN, поскольку если мы ищем S_{AFMN}, то нам нужно узнать 2 фактора:
① AF-?
② $\rho(C, AF)$ - высота параллелограмма => в-ов для S_{AFMN} только 2.

I



II



~~$\rho(BQ; 1)$ - расстояние от (.) Q до f~~

Чистовик № 5

(I) по т. Пиф. в $\triangle AGF$

$AF = \sqrt{(11+\pi)^2 + \pi^2}$

(!) $\triangle AOD \sim \triangle OEF$ $(O = AF \cap CD)$

1) $\angle AOD = \angle EOF$ (верт.)

2) $\angle FEO = \angle ADO = 90°$ (квадрат)

$\Rightarrow \triangle AOD \sim \triangle OEF \Rightarrow \frac{EO}{OD} = \frac{EF}{AD} = \frac{\pi}{11}$

$\Rightarrow EO = \frac{\pi^2}{11+\pi}$

$EH \perp AF$

из $\triangle EOF$

$S = EO \cdot EF \cdot \frac{1}{2} = OF \cdot EH \cdot \frac{1}{2}$

$OF = \pi\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{(11+\pi)^2}}$ (по т. Пиф. в $\triangle EOF$

$\Rightarrow EH = \frac{EO \cdot EF}{OF} = \frac{\pi \cdot \pi^2 \cdot (11+\pi)}{(11+\pi) \cdot \pi\sqrt{2\pi^2 + 22\pi + 121}} =$

$= \frac{\pi^2}{\sqrt{2\pi^2 + 2\pi + 1}}$

$CH' \perp AF \Rightarrow CH' = \rho(C, AF)$

$\triangle EOH \sim \triangle OH'C$ ($\angle COH'$ - одн.; $\angle OHE = \angle OH'C = 90°$)

$\Rightarrow \frac{EH}{CH'} = \frac{EO}{OC}$

$\Rightarrow CH' = \frac{EH \cdot OC}{EO} = \frac{\pi^2 \cdot (11+\pi) \cdot 121}{\sqrt{2\pi^2 + 22\pi + 121} \cdot \pi^2 (11+\pi)}$

$OC = EO + EC = 11 - \pi + \frac{\pi^2}{11+\pi} = \frac{121}{11+\pi}$

$\Rightarrow CH' = \frac{121}{\sqrt{2\pi^2 + 22\pi + 121}} \Rightarrow S_{AFMN} = \rho(C, AF) \cdot AF =$

$= \frac{121}{\sqrt{2\pi^2 + 22\pi + 121}} \cdot \sqrt{2\pi^2 + 22\pi + 121} = 121$

Чистовик №5 Для 2-х вариантов разные обозначения

(III) по т. Пиф. во AFG

$AF = \sqrt{\pi^2 + (11-\pi)^2}$

$(\cdot) Q = CD \cap AF$

$(\cdot) S = AF \cap BC$

$GH \perp AF$

$\Rightarrow S_{AGF} = GH \cdot AF \cdot \frac{1}{2} = GA \cdot GF \cdot \frac{1}{2}$

$\Rightarrow GH = \frac{GA \cdot GF}{AF}$

$GH = \frac{11\pi - \pi^2}{\sqrt{(11-\pi)^2 + \pi^2}}$

$\triangle FEQ \sim \triangle AGF$

1) $\angle FEQ = \angle AGF$

2) $\angle FAG = \angle QFE$ (AF-секущ; $FE \parallel AD$; (co отв.)

$\Rightarrow \frac{FE}{AG} = \frac{QE}{FG}$

$QE = \frac{FE \cdot FG}{AG} = \frac{\pi^2}{(11-\pi)}$

$\Rightarrow CQ = 11 - \left(\frac{\pi^2}{11-\pi} + \pi\right) =$

$CH' \perp AF$

$= \frac{121 - 22\pi}{11-\pi}$

$\triangle CQH' \sim HGF$

1) $\angle GHF = \angle CH'Q = 90°$ (верт.)

2) $\angle HFG = \angle CQH'$ ($\angle CQH' = \angle FQE$ $\angle FQE =$

$= \angle HFG$ (co отв. при AQ-сек; $GF \parallel QD$)

Черновик

$20 \cdot 99 \vdots 20 + ab$

$2^2 \cdot 5 \cdot 99 \vdots 20 + ab$

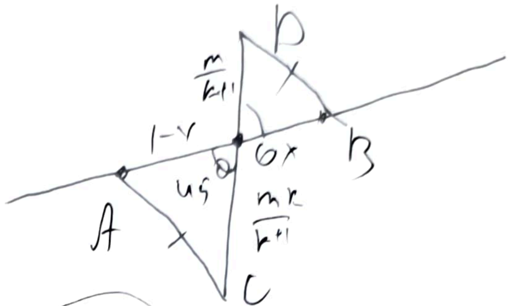
$\frac{CD}{DB} = k$

$5 \cdot 9$

$5 \cdot 11$

$20 \cdot 3$

33



1
2
4
3
9
6
12
18
36
5
10
20
15
45
30
60
90
180
11
22
44
33
99

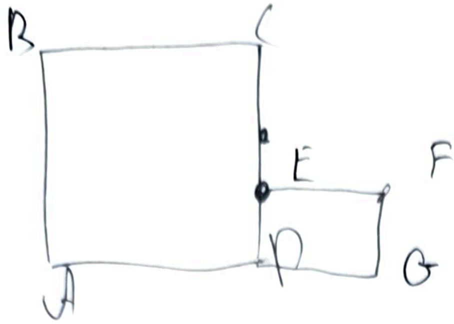
66
132
198
396
55
110
220
165
495
330
660
990
1980

$\frac{m^2}{(k+1)^2} + x^2 - \frac{mx\sqrt{2}}{k+1} =$

$= x^2 - 2x + 1 + \frac{m^2k^2}{(k+1)^2} - \frac{mk(1-x)\sqrt{2}}{k+1}$

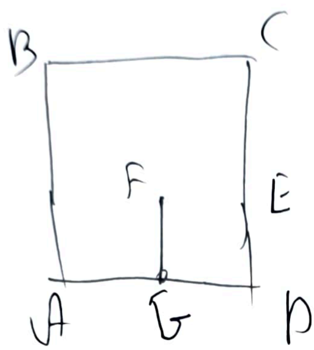
$\frac{m^2(k-1)}{k+1}$

Черновик:



$20 \cdot 94 : \overline{20+ab}$

$abc < \frac{1}{16}$



0 18

Ø 18

16

14

$10 \cdot 9 = 90$

12

$= \frac{a_1+a_n}{2} \cdot 10.$

10

8

abc $a_1+a_n = 18$

6

4

$ba+b+ac+c.$

2

0

$ba+bc.+16a+16c.$

$a+1 > a.$

$b+16 > b$ $a+c=b$

$c+b > c$ $b+c=a.$