0 972740 420007

97-27-40-42
(150.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________________

Место проведения КАЗАНЬ
город

дешифр

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ"
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Нурмановой Тагиры Ниязовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1 лист

+1 лист

Дата

«06» апреля 202_ года

Подпись участника

97-27-40-42 (150.1)

95 (девяносто пять)

Чистовик

№4.

~~Заметим, что от 25 до 3^3 целая часть от $\sqrt[3]{n} = 3$.~~

~~Заметим, что от чисел n^3+1 до $(n+1)^3$~~

Если

Заметим, что числа от x^3 до $(n+1)^3-1$ имеют целую часть от $[\sqrt[3]{n}] = x$.

т.е. все числа дел. на x и леж в промеж. от x^3 до $(x+1)^3-1$ принадлежат множеству A.

Заметим, что $x^3 \vdots x$; $((x+1)^3-1) \vdots x$

Тогда чисел леж в промеж. от x^3 до $(x+1)^3-1$ дел на x: $\left[\frac{(x+1)^3-1-x^3}{x}\right]+1 = \frac{3x^2+3x}{x}+1 = 3x+4$

Заметим, что $3^3=27$; а также $12^3=1728$; $13^3=2197$.

Тогда чисел принадлежащих множеству A на промеж $[25; 2025]$,

Это кол-во чисел принадл. множеству A от 25 до 26; от 3^3 до 4^3; от 4^3 до 5^3, ..., от 11^3 до 12^3 и от 12^3 до 2025.

$(25 \not\vdots 2)$

$26 \in A$.

от 3^3 до 4^3 кол-во чисел $\in A$: $3\cdot3+4$

от 4^3 до 5^3: $3\cdot4+4$.

⋮

от 11^3 до 12^3: $3\cdot11+4$

от 12^3 до 2025: $\left[\frac{2025}{12}\right] - \left[\frac{12^3-1}{12}\right] =$

$= 168 - 143 = 25$.

В сумме получ чисел: $1+3\cdot(3+4+\ldots+11)+4\cdot9+25 =$

$= 1+3\cdot63+36+25 = 251$.

$\boxed{7}$

Чистовик.

№3

$$2 \cdot \log_4^2(x+3) \cdot \log_9^2(x+8) \le \log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) - 2.$$

$$\log_4^2(x+3) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \log_2^2(x+3)$$

$$\log_9^2(x+8) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \log_3^2(x+8)$$

$$\log_2^2(x+3) = \frac{\log_3^2(x+3)}{\log_3^2 2}$$

$$\log_3^2(x+8) = \frac{\log_2^2(x+8)}{\log_2^2 3}$$

Тогда нер. имеет вид:

$$\frac{2}{16} \cdot \frac{\log_2^2(x+8) \cdot \log_3^2(x+3)}{\log_3^2 2 \cdot \log_2^2 3} \le \log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) - 2$$

$\frac{1}{8}$ · Пусть $\log_2(x+8) \cdot \log_3(x+3) = a$

Тогда $(\log_3^2 2 \cdot \log_2^2 3 = 1)$

$$\frac{a^2}{8} \le a - 2$$

$$a^2 - 8a + 16 \le 0$$

$$(a-4)^2 \le 0$$

Тогда $a = 4$.

$$\log_2(x+8) \cdot \log_3(x+3) = 4.$$

Заметим, что $f(x) = \log_2(x+8) \cdot \log_3(x+3)$ – возраст. функция.

Т.к. равенство достигается только при одном x.

Тогда ~~Когд~~ заметим, что при $x = 1$:

$$\log_2(9) \cdot \log_3 4 = \log_2 4 \cdot \log_3 9 = 2^2 = 4.$$

Т.к. $x = 1$.

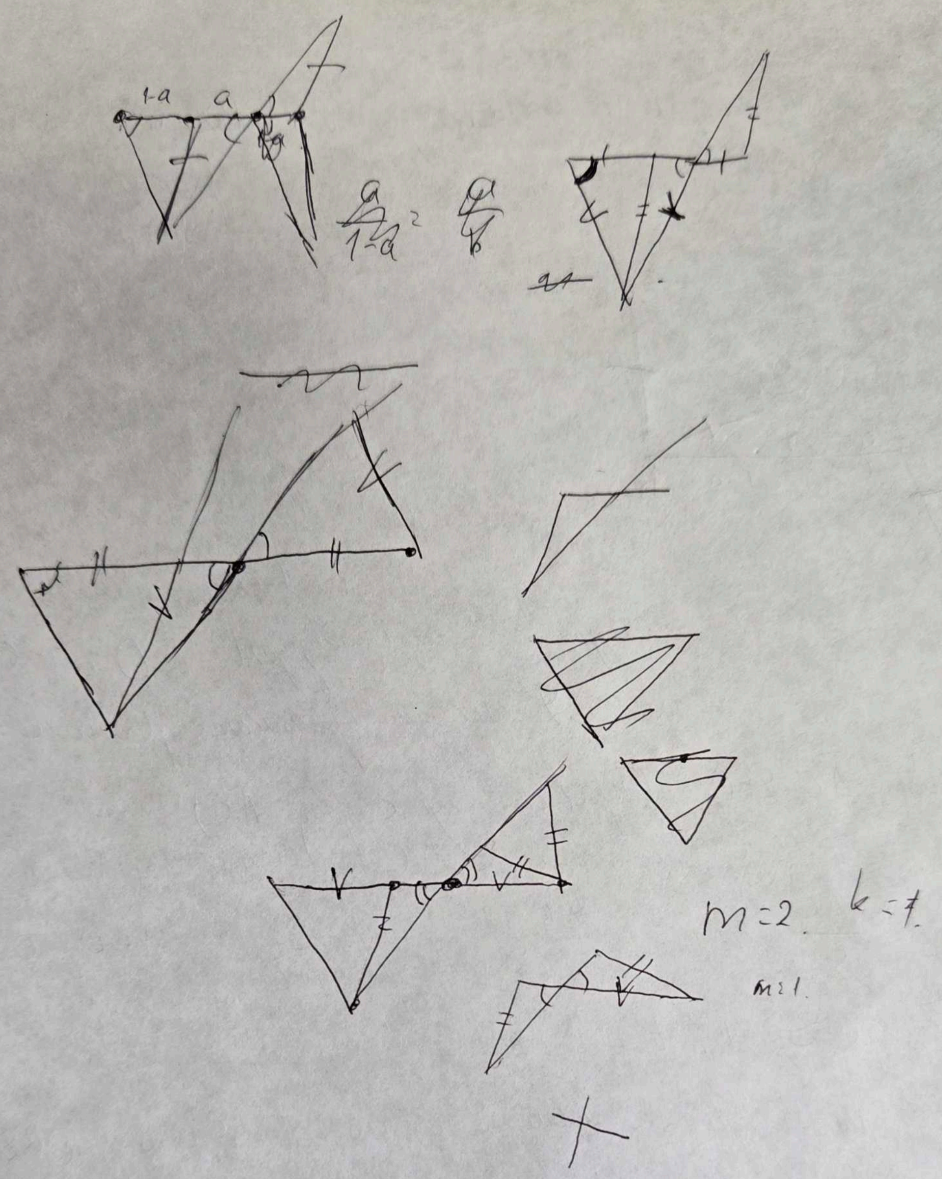
Ответ: $x = 1$

$\boxed{8}$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

~~Чистовик~~ Черновик.

№6.



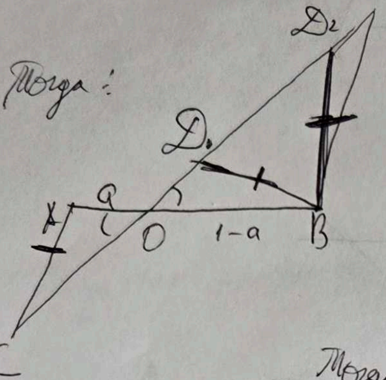
Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Чистовик

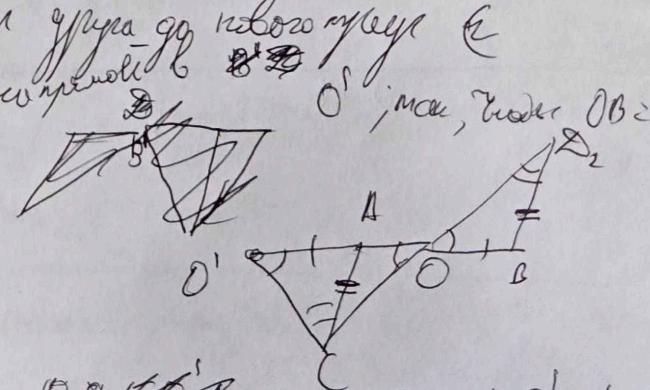
№6.

~~Заметим,~~ Посмотрим случай, когда $AC = BD$ и $\angle AOC = 60°$,
$CD = m$; $\frac{CO}{OD} = k$;
$AB = 1$.

Тогда:



Пусть $AO = a$.
Тогда $OB = 1 - a$.
Тогда ~~~~ зафиксируем т. O и т. C.
Тогда т. D может принимать два положения
чтобы $AC = DB$ (провести окр с рад AC)
если т. D в положении D_1 ($\angle ODB$ – туп), то
т.к. $\frac{AC}{\sin\angle AOC} = \frac{DB}{\sin\angle DOB}$, и т.к. углы $\angle ACO = \angle D_1BO$
т.е. $CD = 1$; k – любое.
если в положении D_2, то $\triangle ACO$ и $\triangle OBD_2$
дополняют друг друга до нового треуг ~~~~
~~~~ Отложим на прямой ~~~~ O', так, чтобы $OB = AO'$



Тогда ~~~~ $\angle O'CA = \angle OD_2B$
и поэтому $\triangle O'AC = \triangle OBD_2$. т.е. т.к. $\angle AOC = 60°$, ~~то~~
$O'O = 1$; ~~на~~ $\angle AO'C = \angle D_2OB$, то $O'O = OC = O'C = 1$
Тогда $D_2C = 2OC = 2$.

$\boxed{9}$
~~~~

97-27-40-42 (150.1)

Чистовик.

В 1 случае $m=1$; k - любое полож. (т.к. отношение сторон ... полож.)

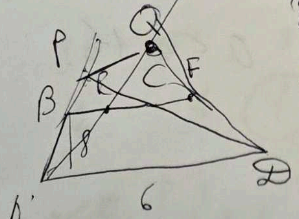
Во 2 случае $m=2$; $k=1$

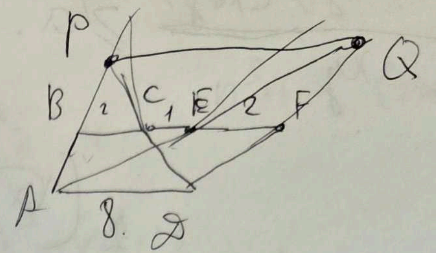
Ответ: $m=2$; $k=1$ или $m=1$; k - любое полож.

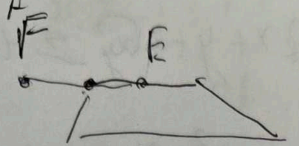
10

97-27-40-42 (150.1)

Черновик.







x

$$2\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8)\le\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2.$$

$$\frac{1}{2}\log_2^2(x+3)\cdot\log_3^2(x+8)\le(1+\log_3 x)(3+\log_2 x)-2$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+$$

$x\ge0$

$y\ge0.$

$$\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}\ge\frac{9}{2}.$$

$$\frac{(x-y)^2}{xy}+a\left(\frac{2\sqrt{xy}-x-y}{2(x+y)}\right)\ge0.$$

$$\frac{(x-y)^2}{xy}-a\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2(x+y)}\ge0.$$

$$\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{xy}-\frac{a}{2(x+y)}\ge0.$$

$$\frac{\cancel{x+y}+2\sqrt{xy}}{xy}-\frac{a}{2(x+y)}\ge0$$

$$2((x+y)+2\sqrt{xy})(x+y)$$

Черновик

$a < 0.16$.

$2\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2(x+y)}{xy} \geq a$.

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x+y+2\sqrt{xy} \geq 4\sqrt{xy}$.

$x^2+y^2 \geq 2xy$.

$x+y \geq 2\sqrt{xy}$.

$2\cdot\frac{(2\sqrt{x})^2\cdot 2x}{x^2} = 2\cdot 2\cdot 4 =$

$x+y \geq 2\sqrt{xy}$.

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \geq 4\sqrt{xy}$.

$2\cdot 2\cdot 4$.

$\frac{x^3+3x^2+3x}{x} = 3(x+1)$

$n \vdots \sqrt[3]{n}$.

2025 | 12
-12 | 168
82
-72
105
96
9.

120
-12
108
-96
25.

7 6 5 4 3 2 1

2^3 9^3 21. $4^3=64$ $5^3=125$ $6^3=216$.

$10^3=1000$.

144
×12
288
144
1728

12^3

13^3
×13
169
×13
507
169
2197

15^3: 225
×15
1125
+2250
1125.
3375

450
+900

1244
1243

1168
-1143
25.

97-27-40-42 (150.1)

№4: $25 - \cancel{27}^{3^3} : 3$ Черновик $(n^3+1) \vdots (n+1)$

$\cancel{2}$ $\cancel{4}$ 1

n^3+1 $(n+1)^3$

$\cancel{28}$ $[3^3+1 \vdots - 4^3] : 4.$

28 $\left(\frac{(n+1)^3-(n^3+1)}{n+1}\right)+1$

$(n+1)^2-(n^2-n+1)+1=$

$= n^2+2n+1-n^2+n-1+1=$

$= 3n+1.$

$6-\cancel{3}.2.$

$\log_2(x+8)\log_3(x+3)=4.$

$\cancel{\log_2 2}\log_2 3 \cdot \log_3(x+8)8$ 27. 10.

~~9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.~~

8 10. 12 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26.

6+4.

$\cancel{1} + 3 : 1$

$4 : 3 \cdot 3+1.$

$\frac{11 \cdot 12}{2} - 3 = 11 \cdot 6 - 3 = 63$

$5 : 4 \cdot 3+1$

26+36+3.

$\times \frac{63}{3}$ 189 1904

61

$12 : 12 \cdot 3+1$

$13 : 23$

$\times \frac{13}{6}$ 13

$2025 \div 13 = 155$: 13, 72, 65, 75, 65, 10

№41 $12^3 \div 13$

$1728 \div 13 = 132$: 13, 42, 39, 38, 26, 12.

155 − 132 = 23

$\cancel{6}1$

$1+(3+4+5+\ldots+12)\cdot 3+9+23=$

$=33+3\cdot\left(\frac{12\cdot 13}{2}-3\right)=33+3\cdot 3(2\cdot 13-1)=$

$=33+9\cdot 25=225+33=258$

Черновик.

$\frac{20\cdot 19}{2} = 190.$

$190\cdot 3$

$a_1 \quad a_1+d \quad a_1+2d \ldots \quad a_1+19d$

$20a_1 + d\cdot\frac{19\cdot 20}{2} =$

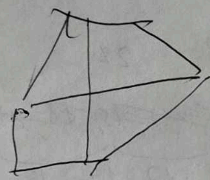
$= 20a_1 + 190d.$

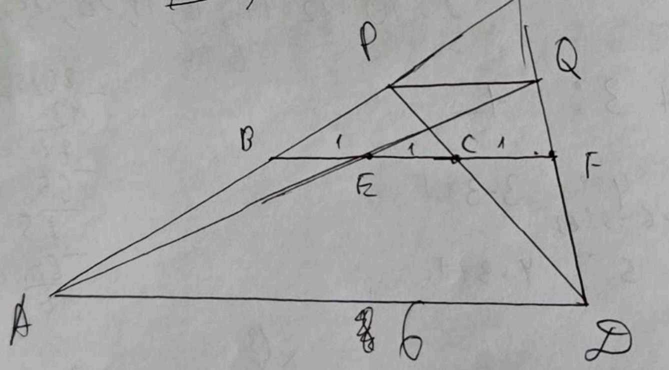
№2.

$a_1 \vdots 19. \quad a_1 = 19. \quad d = 1.$

$190\cdot 2.$

$a_1+18d = 19+18 = 37$

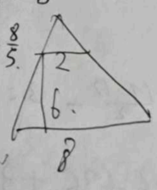




$\frac{6}{1} = \frac{h+8}{h}$

$5h = 8$

$h = \frac{8}{5}.$



$\frac{h}{h+8} = $

$10{,}5\cdot 6$

$21\cdot 3$

63

$\frac{\frac{8}{5}+8}{12-\frac{8}{5}-8} = \frac{6}{PQ}$

$\frac{\frac{48}{5}}{\frac{20-8}{5}}$

$\frac{12}{4}.$

$\frac{h+8}{h} = 3$

$2h = 8.$

$h = 4.$

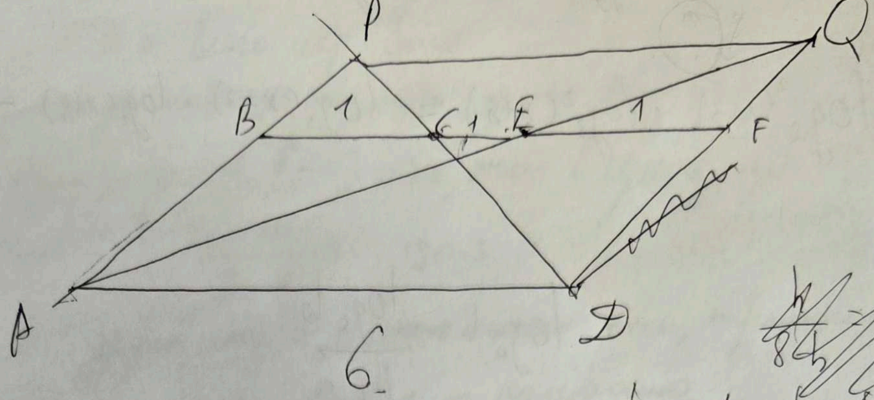
$\frac{48}{12} = 4$

$\frac{6}{PQ} = 4$

$PQ = 1{,}5.$

97-27-40-42 (150.1)

Черновик



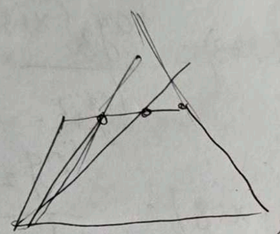
$\frac{h}{8-h}=\frac{1}{6}$

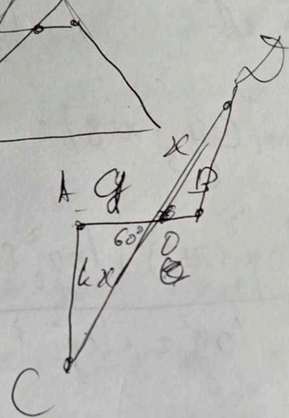
~~$\frac{h}{8-h}=\frac{6}{1}$~~ ~~$h=8$~~

$6h=8-h$

$h=\frac{8}{7}$

$(m;1)$





$AC \nparallel BD$

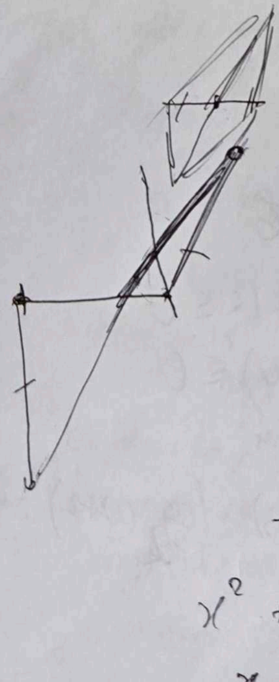
$x(k+1)=m$

$x=\frac{m}{k+1}$

m – люб.

$k=1$

$\frac{m}{k+1}$ $\frac{mk}{k+1}$



Д-у.

a $1-a$

$x^2+(1-a)^2-2\cdot\cos60^\circ\cdot x(1-a)\neq$

$\neq(kx)^2+a^2-2\cdot\cos60^\circ\cdot a\cdot kx$

$x^2+1-2a-x+ax\neq k^2x^2-kax$

$1+x^2-x+a(x+kx-2)\neq k^2x^2$

$k^2x^2+x-x^2+1\neq a(m-2)$

$(k^2-1)(x^2-1)+k^2+x$

Черновик.

$$2\cdot\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8)\le\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2.$$

?

$$\frac{1}{8}\log_2^2(x+3)\cdot\log_3^2(x+8)\le\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2$$

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

$$\log_2(x+3)=\frac{\log_3(x+3)}{\log_3 2}.$$

$$\log_3(x+8)=\frac{\log_2(x+8)}{\log_2 3}$$

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{\log_3^2(x+3)\cdot\log_2^2(x+8)}{\log_3^2 2\cdot\log_2^2 3}.$$

$$\frac{1}{8}a^2b^2\le ab-2.$$

$$\frac{28+8}{56-8}=\frac{36}{48}=\frac{\cancel{18}\,3}{\cancel{24}\,4}.$$

$$\frac{1}{8}c^2\le c-2.$$

$$c^2\le 8c-16.$$

$$\frac{3}{4}\cdot 6=\frac{18}{4}=4{,}5.$$

$$c^2-8c+16\le 0$$

$$(c-4)^2\le 0$$

$$c=4.$$

$$\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+2)=4$$

$$(\log_3 x+1)(\log_2 x+1)=4.$$

$$\log_3 x\cdot\log_2 x+\log_3 x+\log_2 x=3.$$

Черновик.

$$2\cdot\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8)\le\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2$$

$$\frac{1}{8}\log_2^2(x+3)\cdot\log_3^2(x+8)\le\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2$$

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_2(x+3)=\frac{\log_3(x+3)}{\log_3 2}$$

$$\log_3(x+8)=\frac{\log_2(x+8)}{\log_2 3}$$

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{\log_3^2(x+3)\cdot\log_2^2(x+8)}{\log_3^2 2\cdot\log_2^2 3}$$

$$\frac{1}{8}a^2b^2\le ab-2$$

$$\frac{28+8}{56-8}=\frac{36}{48}=\frac{\cancel{18}^{\,3}}{\cancel{24}_{\,4}}$$

$$\frac{3}{4}\cdot 6=\frac{18}{4}=4{,}5$$

$$\frac{1}{8}c^2\le c-2$$

$$c^2\le 8c-16$$

$$c^2-8c+16\le 0$$

$$(c-4)^2\le 0$$

$$c=4$$

$$\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+2)=4$$

$$(\log_3 x+1)(\log_2 x+1)=4$$

$$\log_3 x\cdot\log_2 x+\log_3 x+\log_2 x=3$$

Чистовик.

№1. Всего команд – 20.

Т.к. всего игр было $\frac{20 \cdot 19}{2}$ (кол-во способов выбрать две команды из 20), а за каждую игру в сумме присуждалось ~~в~~ по 3 очка, то в сумме кол-во набранных очков: $\frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 3 = 190 \cdot 3$

С другой стороны ~~эти кол-ва~~ очки, набранные командами, образуют убыв. ~~Ев~~ ариф. прогрессию.

Пусть ~~наиб кол-во оч~~ команда, занявшая 1-ое место имеет $a + 19d$ очков. 2-ая: $a + 18d$

3-ая: $a + 17d$

и так далее до го кон.

20-ая: a очков.

Т.к. по усл. они образ. ариф. прогрессию (возьмем ~~по~~ возраст, т.е. все члены убыв в обратном порядке) то можно так записать. 1 члена прогрес — a. Каждый раз увел на d.

Тогда вс сумме кол-во очков набранное командами:

$$a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a+17d) + (a+18d) + (a+19d) =$$

$$= 20a + 19d.$$

Тогда

$$20a + 19d = 190 \cdot 3.$$

Т.к. $a; d \in \mathbb{N}$, то т.к. $19d \vdots 19$, $190 \cdot 3 \vdots 19$, то $20a \vdots 19$.

тогда $a \vdots 19$.

Тогда $a = 19k$, $k \in \mathbb{N}$

$$19k \cdot 20 + 19d = 190 \cdot 3$$

$$20k + d = 30.$$

1

Чистовик.

Т.к. $d>0$; то при $k \geq 2$ левая часть хотя бы 40. Т.е. такое невозможно. Т.с. $k=1$:

$$a = 19k = 19$$

$$19 \cdot 20 + 19d = 190 \cdot 3$$

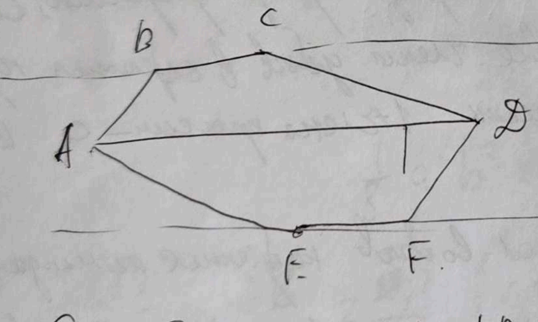
$$d = 10$$

Тогда человек, занявший второе место получил:

$$a + 18d = 19 + 18 \cdot 10 = 199 \text{ очков}$$

Ответ: 199 очков

№2. Рассмотрим разные положения трапеции $AEFD$ относ. трап $ABCD$. Если отрезки BC и EF лежат по разные стороны относ. прямой AD:



Если т.к. $EF \parallel AD \parallel BC$, то EF BC.

тогда по усл. расст от AD до BC и от AD до $EF = 8$,

то расст. между прямыми BC и $EF = 16$.

Но по усл. $CE = 1$. Однако миним. расст. хотя бы 16. Т.е. BC и EF лежат по одну сторону от прямой AD.

Тогда т. B; C; E; F — лежат на одной прямой, т.к. расст. ~~от~~ от AD до BC и от AD до EF одинаковые, а (они паралл.)

Чистовик

Тогда учитывая порядок, что трап. ABCD и AEFD, то ~~все~~ пусть ~~в~~ в осн. трап AD т. A лежит левее относ. D на прямой AD. Тогда т. B лежит левее C и т. E лежит левее т. F.

Тогда возможный порядок точек на ~~пр~~ прямой BC то:

1) E; F; B; C

2) E B; F; C

3) B; E; C; F

4) B; C; E; F

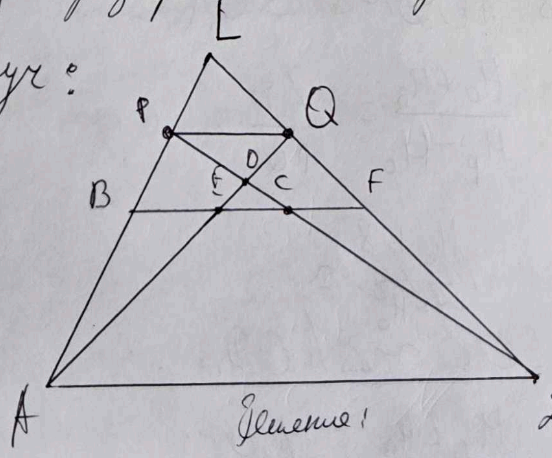
По усл. BC = 2, EC = 1. тогда первые два вар не могут быть т.к. EC > 2

1) $EC = EB + BC$.

2) $EC = EB + BC$.

Тогда разберём 3 и 4 случаи.

3 случ:



Решение:

~~Пусть APQ QD~~, Пусть PQ и AQ пересек. в т. O.

~~Тогда~~ т.к. BC = 2; CE = 1; ~~то~~ EF = 2, ~~то~~ (по усл) то

BE = EC = CF = 1. Пусть H_B - раст. между прям BC и AD.

Тогда $H_B = 8$ (по усл)

B

чистовик

H_P – расст. от точки P до ~~AD~~ BC

Тогда т.к. △BPC и △APD подобны (по двум углам), то

$$\frac{H_P + H_B}{H_P} = \frac{\cancel{BC}AD}{BC}$$ (как соотв эл. в подоб. треуг.

$$\frac{H_P + 8}{H_P} = \frac{6}{2}$$

$$H_P = 4$$

Аналогично H_Q расст. от Q до BC.

$$\frac{H_Q + H_B}{H_Q} = \frac{AD}{EF}$$

$$H_Q = 4.$$

Тогда $PQ \parallel BC \parallel AD$. т.е. APQD - трап. с осн AD.

~~Тогда~~ Пусть раст. от т. O до BC — H_O.

Тогда △AOD ~ △QOP

$$\frac{H_O + H_B}{H_P - H_O} = \frac{AD}{PQ}.$$

$$\cancel{\frac{H_O + 8}{4 - H_O}} =$$

А так же △EOC ~ △AOD.

$$\frac{H_O + H_B}{H_O} = \frac{AD}{EC}$$

$$H_O + 8 = H_O \cdot 3 \frac{6}{2}.$$

$$H_O = \frac{8}{5}.$$

Чистовик

$$\frac{H_0+H_B}{H_P-H_0} = \frac{AD}{PQ}$$

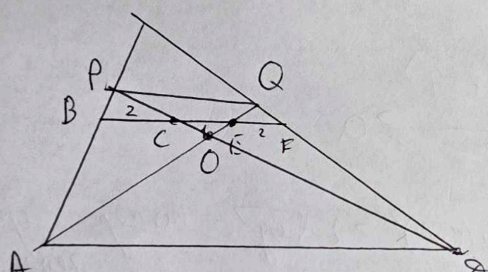
$$\frac{PQ}{\cancel{AD}\ 6} = \frac{4-\frac{8}{5}}{\frac{8}{5}+8}$$

$$PQ = 6\cdot\frac{12}{48}$$

$PQ = 1,5.$

$$S_{APQD} = \frac{PQ+AD}{2}\cdot(H_P+H_B) = \frac{1,5+6}{2}\cdot 12 = 7,5\cdot 6 = 45.$$

4 случ



Воспользуемся всеми теми же обозначениями, что и в случ 3.

Тогда аналогично $H_P = 4$; $PQ \parallel AD$; APQD - трап.

$\triangle EOC \sim \triangle AOD$:

$$\frac{H_0}{H_B-H_0} = \frac{CE}{AD}$$

$$\frac{H_0}{8-H_0} = \frac{1}{6}$$

$$6H_0 = 8-H_0$$

$$H_0 = \frac{8}{7}.$$

$\triangle AOD \sim \triangle QOP$:

$$\frac{H_0+H_P}{H_B-H_0} = \frac{PQ}{AD}$$

$$PQ = 6\cdot\left(\frac{\frac{8}{7}+4}{8-\frac{8}{7}}\right)$$

$PQ = 4,5$

$\boxed{5}$

~~Чистовик~~

$$S_{APQD} = \cancel{4,5}\ \frac{PQ+AD}{2}\cdot(H_P+H_B) = \frac{4,5+6}{2}\cdot 12 = 63.$$

Ответ: или 45, или 63.

№5

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2}+2.$$

$x>0;\ y>0$

$$\frac{x^2+y^2-2xy}{xy} + a\left(\frac{2\sqrt{xy}-x-y}{2(x+y)}\right) \geq 0.$$

$$\frac{(x-y)^2}{xy} - \frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2(x+y)} \geq 0$$

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\left(\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{xy} - \frac{a}{2(x+y)}\right) \geq 0$$

$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$ всегда (при $x>0;\ y>0$)

$$\frac{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\cdot(x+y)}{xy} \geq a$$

$x+y = (\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2 \geq 2\sqrt{xy}$ по нер. о средних геом и арифм.

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x+2\sqrt{xy}+y \geq 4\sqrt{xy}.$

Тогда $\dfrac{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2(x+y)}{xy} \geq \dfrac{2\cdot 4\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{xy}}{xy} = 16.$

т.е. при $a<16$ в нер. выполн. при любых x и y.

~~т.е.~~ Заметим, что равенство достиг. при $x=y$.

Однако тогда изнач. нер. ~~обращ.~~ во всегда верное.

т.е. при $a=16$ нер. тоже выполн.

Ответ: $a \leq 16$.

$\boxed{6}$