0 613937 080009

61-39-37-08

(139.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы Горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Шашковой Екатерины Николаевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+ 1 мсб

Дата

«06» апреля 2025 года

Подпись участника

61-39-37-08
(139.1)

70 (семьдесят)

Черновик 1

39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49

2026

2026 | 46
184   4
186

2024 | 44
176   46
264
264
0

2025 = 45

2027 | 47
2018

$20 + x = \overline{20x}$

2024 | 44
176   46
264
264
0

2027 | 47
168   4
347

2028 | 48
192   4
108

2029 | 49
196   4
69

2030 | 50

2031 | 51
153   3
501

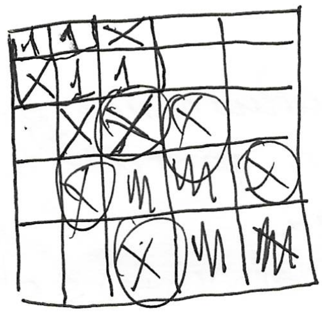
2032 | 52
156   39
472

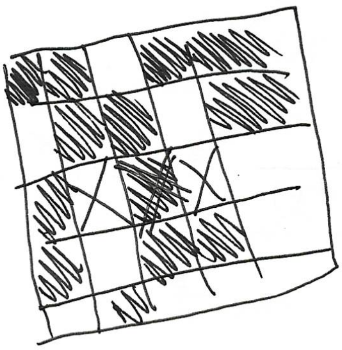
2033 | 53
159   3
443

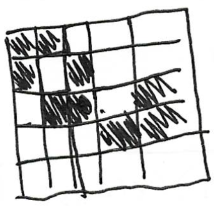
2034 | 54
162   3
414

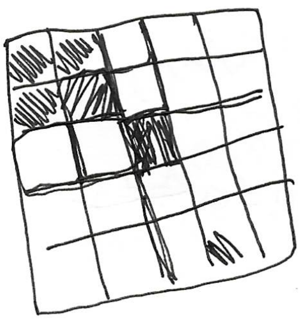
2035 | 55
165   37
385
385
0

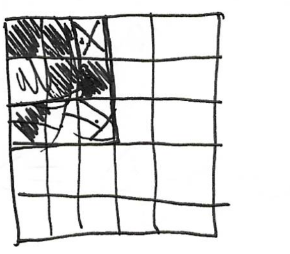
20

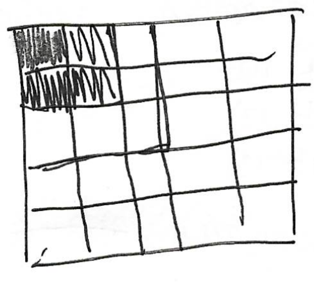












Чистовик 1

№1

Для решения задачи нужно понять, что нам нужно рассмотреть номера от 2026. ~~до~~ В примере представлено число, делящееся на 5 и оканчивающееся на эту же цифру. Попробуем проверить такое следующее ближайшее число:

$2035 \Rightarrow 20+35=55$

$$\begin{array}{r|l} 2035 & 55 \\ \hline -165 & 37 \\ 385 & \\ -385 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Данное число нам подходит, осталось проверить не будет ли меньших чисел до него, которы удовлетворяют данным условиям:

$2026 \Rightarrow 20+26=46 \quad \not\vdots\, 46$

$2027 \Rightarrow 20+27=47 \quad \not\vdots\, 47$

$2028 \Rightarrow 20+28=48 \quad \not\vdots\, 48$

$2029 \Rightarrow 20+29=49 \quad \not\vdots\, 49$

$2030 \Rightarrow 20+30=50 \quad \not\vdots\, 50$

$2031 \Rightarrow 20+31=51 \quad \not\vdots\, 51$

$2032 \Rightarrow 20+32=52 \quad \not\vdots\, 52$

$2033 \Rightarrow 20+33=53 \quad \not\vdots\, 53$

$2034 \Rightarrow 20+34=54 \quad \not\vdots\, 54$

Ответ: 2035

№4

$$\frac{ab}{(1+a)(a+b)(b+8)} = \min$$

Минимальное значение будет достигаться, когда

$$(1+a)(a+b)(b+8) \le ab$$

Отсюда сделаем вывод, что:

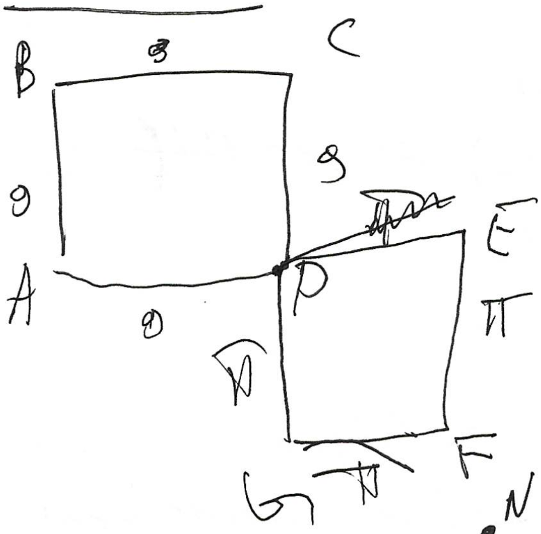
$$\begin{cases} 1+a \le ab & (1) \\ a+b \le ab & (2) \\ b+8 \le ab & (3) \end{cases}$$

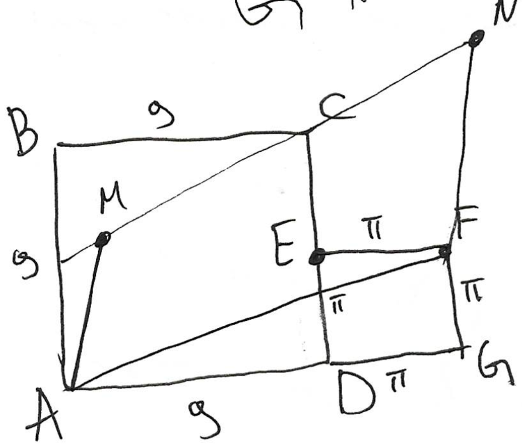
Из (1) получим: $\cancel{ab-a}$ $1 \le a(b-1) \Rightarrow a \ne 0$, $\cancel{b \ne 1}$

$b \notin [0;1]$

61-39-37-08
(139.1)

Черновик 2





$(1+a)(a+b)(b+8) \le ab$

$(a+b+a^2+ab)(b+8) \le ab$

$ab+b^2+a^2b+ab^2+$
$+8a+8b+8a^2+8ab \le ab$

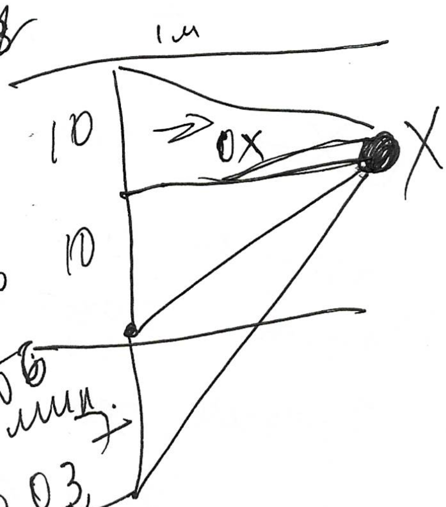
$9ab+b^2+ab^2+a^2b+8a+8b$
$+8a^2 \le ab$

$8ab+b^2+ab^2+a^2b+8a+8b+8a^2 \le 0$

$ab(8+a+b)+8(a+b+a^2)$
$+b^2 \le 0$

$\sqrt{8}$

1м



$0{,}33$
$18{,}2$
$\overline{}$
66
264
$+06$
$\overline{}$
$0{,}03$
$1{,}2$
$\overline{}$
$2{,}06$

$$\frac{ab}{(1+a)(a+b)(b+8)}$$

Наиб знач если знамен² миним.

$0{,}1$

$1{,}1$

$$\frac{0{,}1 \cdot 0{,}2}{1{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 8{,}2}$$

$1+a \le ab$!

$\boxed{1+a \le ab}$

$1 \le ab-a$

$1 \le a(b-1)$

$(1+a)(a+b)(b+8) \le ab$

$(a+b)(1+a)(b+8) \le ab$

$(a+b)(b+8+ab+8a) \le ab$

т.к. $b_{min}=1 \Rightarrow$

$\sqrt{10^2+10^2}=$

$\sqrt{200}=10\sqrt{2}$

$a+b \le ab$

$a \le ab-b$

$a \le b(a-1)$

$0 \le b(a-1)-a$

Чистовик 2

№4 (продолжение)

Из (3) получим: $b+8 \leq ab$

$8 \leq b(a-1) \Rightarrow b \neq 0,$ ~~a∉[~~

$a \notin (0;1]$

~~Из (2) получим: a+b≤ab~~

Из (2) получим $a+b \leq ab$, очевидно, что $a+b \neq 0$ т.к. a, b – положительные.

$\Rightarrow a \in (1;+\infty)$

$b \in (1;+\infty)$

~~А~~ Хотя если взять a и b на промежутке $(0;1)$, то в числителе число будет ~~в 10 раз~~ $\approx$ в 10 ~~раз~~ и более раз больше, чем в знаменателе.

$\Rightarrow$ Причём больше можно получить если у a всего 1 знак после запятой, а у b сильно больше.

тогда в числителе ~~x(0,a)·y(0,b)~~ знаков после запятой будет столько же сколько в меньшем числе. Поэтому максимальное значение будет достигаться, когда a и b $\in (0;1)$

Ответ: при $a \in (0;1)$ и $b \in (0;1)$

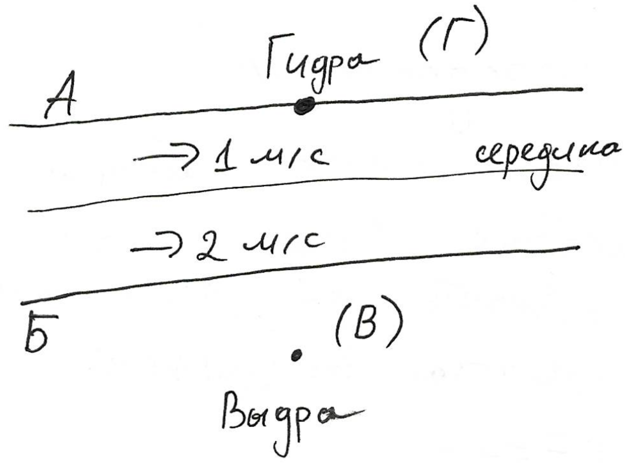
61-39-37-08
(139.1)

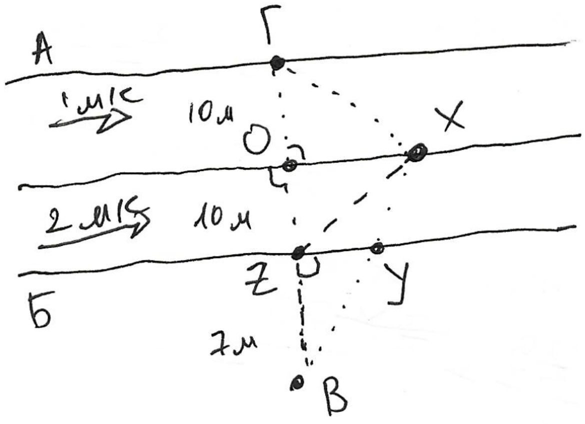
Чистовик 3

№5

Дано:
$d = 20м = AБ$
$V_1 = 1 м/с$
$V_2 = 2 м/с$
$БВ = 7м$
$V_{гид.} = 1 м/с$
$V_{выд.} = V$

Найти:
$V - ?$





1) Т.к. гидра достаточно быстро доберётся до середины, то и время выдра нужно уменьшить:
есть два способа:
1. Выдра бежит по гипотенузе ВХ в $\triangle BXO$;
2. Выдра бежит ⊥ ~~в~~ берегу, а затем по гипотенузе $\triangle OXZ$: ZX

2) $t_Г = t_В$;
Рассмотрим гидру: т.к. ~~S(ОГ) = 10м~~; S(ОХ) = 10м, т.к. V(ОГ) = 1м/с,
~~то t(ОГ) = S/V = 10м / 1 м/с = 10 с, отсюда~~
~~$t_Г = t_В = 10с$~~; за 1 сек. гидра проплывала на 1 м вперёд и 1 метр влево. ⇒ t = 10 с

3) Теперь рассмотрим 2 случая движения выдры и выберем лучший. Но из условия вспомним, что ~~выд~~ выдра и гидра двигались ⊥ каналу ⇒ 2 случай из пункта 1 не подходит

Чистовик 4

N5 (продолжение)

4) Тогда просто найдём расстояние, которое выдре нужно проплыть и пробежать, а затем нужно достигнуть равенства во времени:

$BZ = 7$ м

по реке: $ZO^2 + OX^2 = XZ^2$

$10^2 + 10^2 = ZX$

$\cancel{ZX} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ м

теперь составим и решим ур-ние:

$\frac{ZB}{V} + \frac{\cancel{ZX}\ ZO}{V} = 10$ с

$\frac{7}{V} + \frac{10}{V} = 10$ с

$\frac{17}{V} = 10$

$V = 17 : 10$

$V = 1{,}7$ м/с

Ответ: 1,7 м/с

Чистовик 5

№6

Решение:

1) Нужно найти max размах у набора $(y_1, \dots, y_{2025})$ с размахом 1., где

$y_1 = x_1$, $y_2 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_3 = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$; ...; $y_{2025} = \dfrac{x_1 + \dots + x_{2025}}{2025}$

<u>НУО</u>: пусть x_1 − min число в наборе $(x_1, \dots, x_{2025})$, а x_{2025} − max число.

~~в г~~

для того, чтобы увеличить размах, нужно увеличивать числители дробей, тогда ~~на~~ нужно, чтобы число со знаменателем $=1$ было минимальным, а со знаменателем 2025, максимальным, тогда ~~ку~~ т.к. знаменатель у ~~н~~ нас фиксирован, то нужно увеличивать числитель. Вспомним о том, что в наборе числа могут повторяться, тогда пусть все числа от x_2 до x_{2025} будут равны. Именно так мы и получим максимальный размах между x_1 и x_{2025}.

2) Т.к. $x_2 = x_3 = \dots = x_{2025}$, пусть мы будем обозначать все эти числа за x_2.
И т.к. x_1 − min, а x_2 − max, а размах $=1$ $\Rightarrow$ $x_2 = x_1 + 1$

Черновик 3

№6

набор $(x_1, \dots, x_{2025})$ размах 1

$x_1 = 1 \quad x_2 = 2$

$y_1 = 1$

$y_{2025} = x_1 + x_{2} \cdot 2024 = 1 + 2024 =$

$= 2025$

$\frac{2025}{2025} = 1$

$y_{2025} = x_1 + x_2 \cdot 2024 = 1 + 2 \cdot 2024 = \frac{4049}{2025}$

$\boxed{x_1 + 2024}$

$\frac{2025x_1 + 2024}{2025} - x_1 =$

$\frac{2025x_1 - 2025x_1 + 2024}{2025}$

2025	5
405	5
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

2024	2
1012	2
506	2
253	11
23	23
1	

3 6 9 12 15 18 21 24

253 | 17

17 — 83

253 | 13

13 — 123

253 | 11

22 — 33

$0,1 \cdot 0,001$

$11 \cdot 0,101 \cdot 0,001$

6

$\frac{\pi}{9} = \frac{\pi x}{1x} \quad 9\pi x = \pi x$

Чистовик 6

№6 (продолжение)

3) Мы уже знаем, что y_1 в результате будет минимальным, а y_{2025} – максимальным.

Тогда, чтобы найти размах, просто выразим y_{2025} через x_1 и x_2:

$$y_{2025} = \frac{x_1 + x_2 \cdot 2024}{2025} = \frac{x_1 + (x_1+1)2024}{2025} =$$

$$= \frac{x_1 + 2024x_1 + 2024}{2025} = \frac{2025x_1 + \cancel{200} \cdot 2024}{2025}$$

~~у~~ $y_1 = x_1$;

теперь найдём размах:

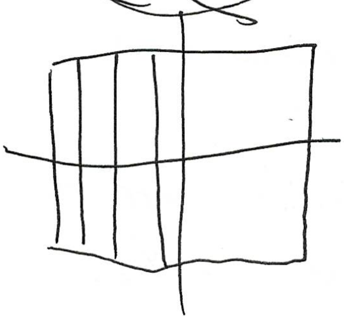
$$y_{2025} - y_1 = \frac{2025x_1 + 2024}{2025} - x_1 =$$

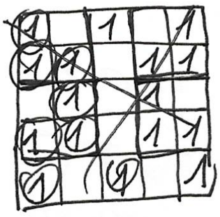
$$= \frac{2025x_1 + 2024 - 2025x_1}{2025} = \frac{2024}{2025}$$

Ответ: $\frac{2024}{2025}$

Черновик 4

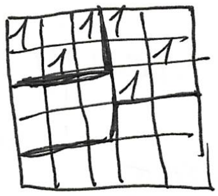
1, 2, 3, 4, 5, 6

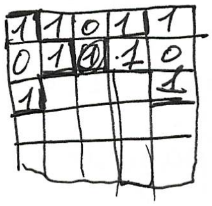


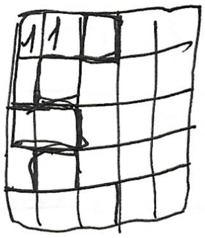


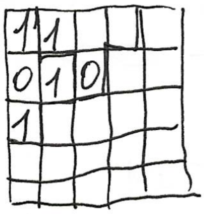
$a=1$

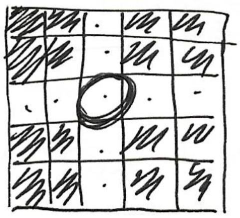
$$\frac{b}{(1+1)(1+b)(b+8)} = \frac{b}{2\cdot(1+b)(b+8)}$$



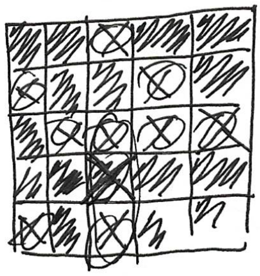




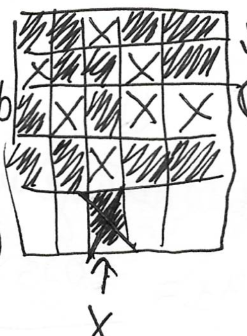




16



$$(2+2b)(b+8) = 2b+16+2b^2+16b = 2b^2+18b+16 = 2(b^2+9b+8)$$



1, 2, 3, 4, 5, 6

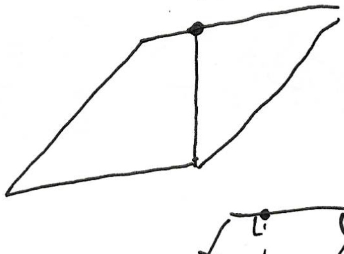
100%: 1, 2, 6

решение: 4, 5

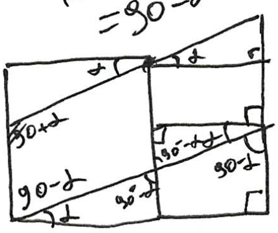
нет: 3

$$(a+b)(b+8) = ab+8a+b^2+8b = b^2+(8+a)b+8a$$

A



$\cancel{180}$ $180-90-\alpha=$ $=90-\alpha$



по т. Виета:

$x_1+x_1=-(8+a)$

$x\cdot x_2=8a$

$D=(8+a)^2-4\cdot1\cdot8a=$

$=64+16a+a^2-32a=$

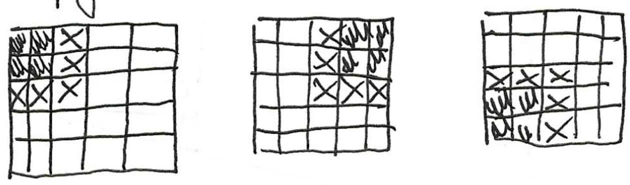
$=64-16a+a^2=\cancel{64}$

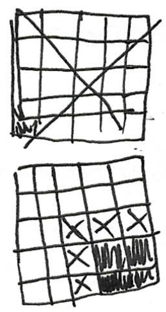
$=(8-a)^2$

Чистовик 7

№2

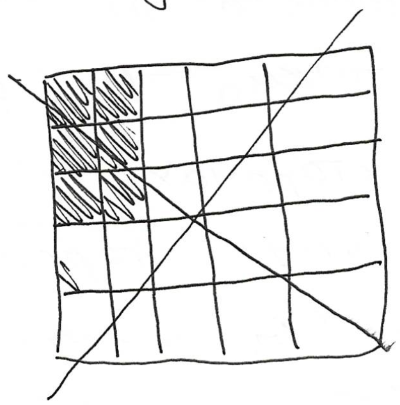
~~Руо~~ Будем вставлять группы „1"-ек по квадратам 2×2, в них условия не нарушаются: ▨ - стоит „1", □ / ☒ - стоит „0"

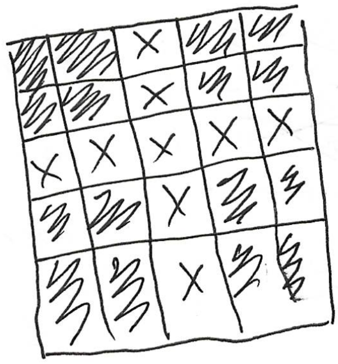




☒ - поле, куда никак нельзя поставить „1"

Объединив картинки получим:





Всего мы можем разместить 4 клетки 2×2 удов условиям $\Rightarrow$ „1"-ек ~~пу~~ получим $(2\cdot 2)\cdot 4=4\cdot 4=16$

Ответ: 16

2

№3 Чистовик 8

Дано:

$ABCD$ – квадрат;

$AB = 9$;

$DEFG$ – квадрат;

$DE = \pi$;

D – общая вершина двух квадратов;

$E \in CD$;

$AMNF$ – пар-м;

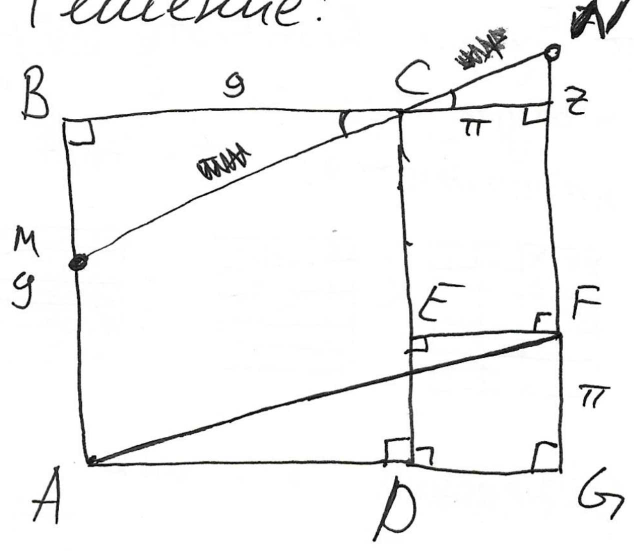
$C \in MN$; $\frac{MC}{CN} = \frac{1}{\pi}$

~~$\frac{MC}{CN} = \frac{1}{\pi}$~~ – ~~$\frac{CN}{CM} = \frac{\pi}{1}$~~

Найти:

$S_{AMNF(max)}$ – ?

Решение:



1) Для удобста расположим точки M и F на сторонах / продолжениях сторон AB и FG соответственно (от этого площадь пар-ма не изменится.

2) Из точки C проведём перпендикуляр на NG, пусть это будет CZ. $CZ = DG = \pi$

3) $BC = AD = AB = CD = 9$

4) $\angle BCM = \angle ZCN$ (верт) $\Rightarrow$

$\triangle BCM \sim \triangle ZCN$ (по 2 углам: $\angle BCM = \angle ZCN$; $\angle CBM = \angle CZN$)

61-39-37-08
(139.1)

Чистовик 9

N3 (продолжение 1)

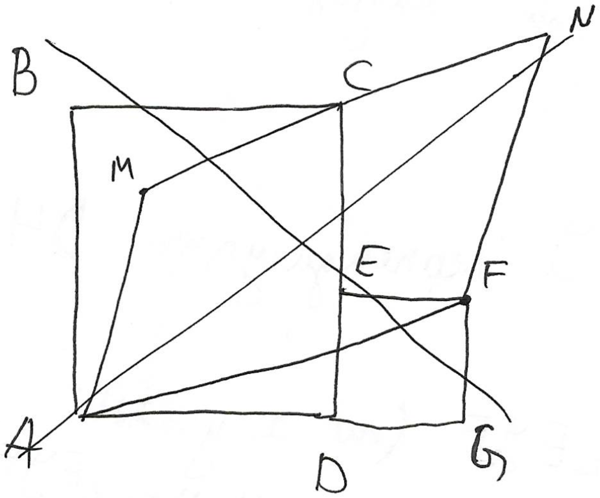
5) Из пункта 4 следуют отношения:

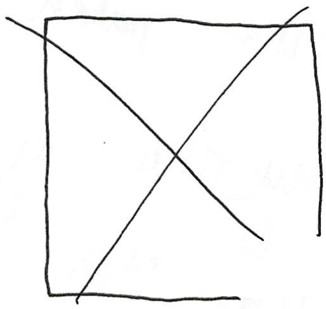
$$\frac{CZ}{CB} = \frac{ZN}{BM} = \frac{MC}{NC}$$

$$\frac{11}{9} = \frac{ZN}{BM} = \frac{11x}{1x}$$

6) Но так невозможно $\Rightarrow$ рисунка из пункта 1 быть не может.

7) Новый рисунок:

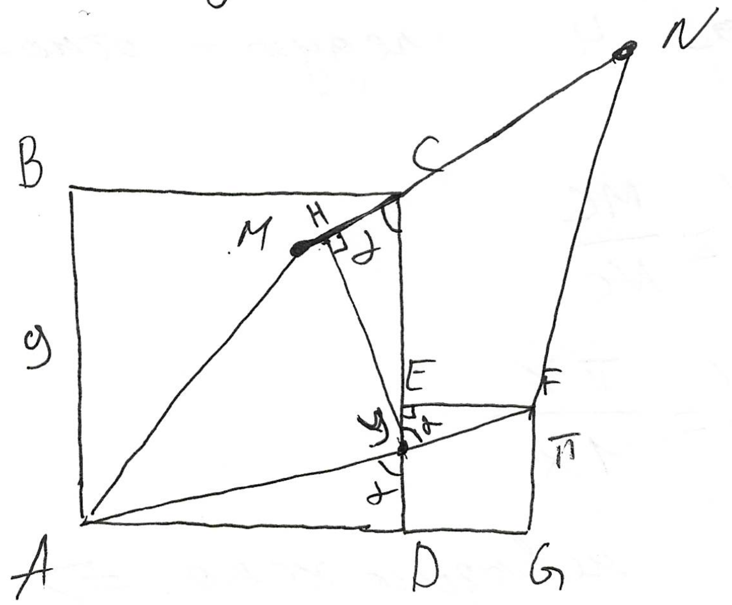




2

Чистовик 10

№3 (продолжение 2)



~~8) т.к. точка C 9~~

8) $CE = CD - ED = 9 - П$

9) Пусть $\angle EYF = \alpha$, тогда накр. леж $\angle MCE$ при секущей CD тоже равен α

10) Опустим из Y перпендикуляр ~~D~~H на MN

тогда $\triangle HCE \sim \triangle EYF$ (по 2 углам: $\angle CHY = \angle YED$; $\angle HCY = \angle EYF$)

~~$\angle H = \angle E$~~

~~11)~~ таким образом мы найдём высоту пар-ма ~~MN~~ AMNF.