0 535065 240004

53-50-65-24
(134.1)

+1 лист 11:53
+1 лист 12:22

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант В - 1

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьевы горы"
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Симоненко Ольги Станиславовны

фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1 12:48

Дата «6» апреля 2025 года

Подпись участника

53-50-65-24 (134.1)

85 (восемьдесят пять) 1/1

Черновик 2

~~20~~ $[\sqrt[3]{n}]$ $\vdots [\sqrt[3]{n}]$

$[25; 2025]$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2} + 2$$

$$\frac{x^2+y^2}{yx} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2} + 2$$

$n = x + y$

$m = xy$

$n>0;\ m>0$

$$\frac{n^2-2m}{m} + \frac{a\sqrt{m}}{n} \geq \frac{a}{2} + 2$$

$$\frac{n^2}{m} - 2 + \frac{a\sqrt{m}}{n} \geq \frac{a}{2} + 2$$

$$\frac{n^2}{m} + \frac{a\sqrt{m}}{n} \geq \frac{a}{2} + 4 \qquad \frac{n^2}{m} = t^2$$

$$\frac{1}{} + a \geq \frac{a}{2} + 4 \ \Big|\cdot 2$$

$$2 + 2a \geq a + 8$$

$$a \geq -4$$

$$\left(\frac{a}{t} - \frac{a}{2}\right) + (t^2 - 4) \geq 0$$

$$t^2 + \frac{a}{t} \geq \frac{a}{2} + 4 \qquad a\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right) +$$

$$t^2 + \frac{a}{t} \geq \frac{a}{2} + 4 \qquad 2\sqrt{at} \geq \frac{a}{2} + 4$$

$$t^2 + \frac{a}{t} \geq 2\sqrt{t^2 \cdot \frac{a}{t}} = 2\sqrt{at}$$

Черновик 2

$t^2+\frac{a}{t}\geq\frac{a}{2}+4$ $\qquad \frac{1}{t}-\frac{1}{2}=\frac{2-t}{2t}$

$\left(\frac{a}{t}-\frac{a}{2}\right)+\left(t^2-4\right)\geq 0$ $\qquad \cancel{t=\frac{\sqrt{m}}{n}>0}$ $\quad t=\frac{n}{\sqrt{m}}$

$a\left(\frac{2-t}{2t}\right)+(t-2)(t+2)\geq 0$

$\underbrace{(t-2)}_{t\geq 0 \text{ всегда}}\left(-\frac{a}{2t}+t+2\right)\geq 0$

$-\frac{a}{2t}+t+2\geq 0 \;|\cdot 2t$

$\cancel{t+2\geq\frac{a}{2t}\;|\cdot 2t\;(t>0)}$

$-a+2t^2+4t\geq 0$

$2t^2+4t-a\geq 0$

$D>0$

$n=x+y$

$m=\sqrt{x}y$

$x+y\geq 2\sqrt{xy}$

$n\geq 2\sqrt{m}$

$n^2\geq 4m$

$\frac{n^2}{4m}\geq 1$

$\frac{n^2}{m}\geq 4$

$\frac{n}{\sqrt{m}}\geq 2$

Черновик №3.

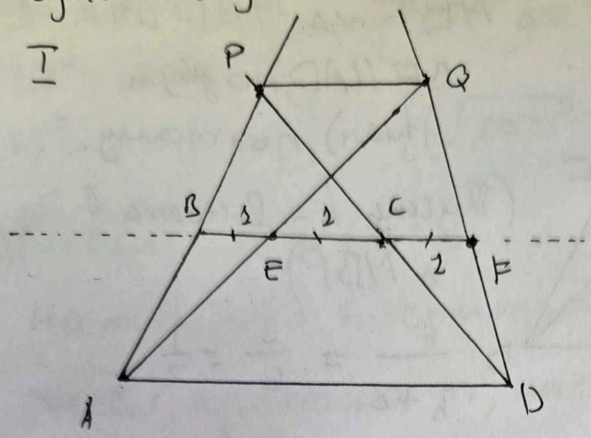
$2\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8)\leq\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-$
-2

53-50-65-24
(134.1)

Чистовик 5

② Трапеции ABCD и AEFD лежат в одной полуплоскости относит. AD.

I



Рассм. положение точки E.

E лежит на прямой BC (т.к. расстояние от E до AD равно расстоянию от B до AD; BC ∥ AD).

E не может лежать до B, т.к. тогда EC > BC = 2 ⇒ ⇒ EC > 1.

Рассм. случай, когда E лежит внутри отрезка [BC].

Тогда: BE = EC = CF = 1.

△PBC ~ △APD (т.к. BC ∥ AD ⇒ по двум углам)

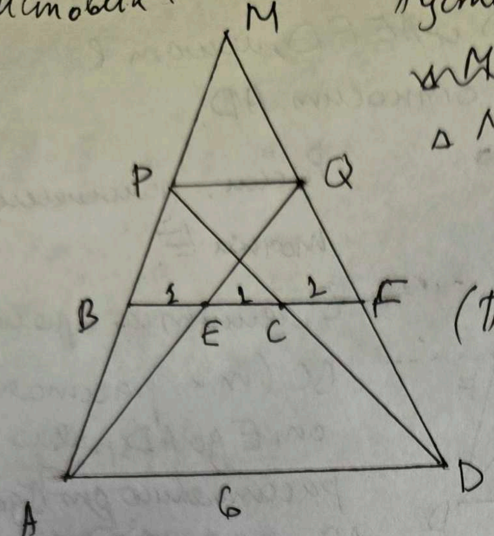
Пусть высота в △PBC = x, тогда:

$$\frac{x}{x+8} = \frac{BC}{AD} = \frac{2}{6} \Rightarrow 6x = 2x + 16 \Rightarrow 4x = 16$$
$$x = 4$$

Аналогично находим, что высота в △EQF (он подобен AQD) тоже равна x.

⇒ точки P и Q равноудалены от AD (на расстояние x + 8 = 12) ⇒ PQ ∥ AD.

Чистовик 6



Пусть $AP \cap DQ = $ т. M

~~ΔMPQ~~

$\triangle MBF \sim \triangle MAD$ (т.к. $BF \parallel AD$, по двум углам), поэтому:

(Пусть h – высота в $\triangle MBF$).

$$\frac{h}{h+8} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow 2h = h+8 \Rightarrow h = 8$

$\Rightarrow$ высота $\triangle MPQ$ равна $h - x = 8 - 4 = 4$.

$\triangle MPQ \sim \triangle MAD$ (т.к. $PQ \parallel AD$, по двум углам):

$$\frac{4}{8+8} = \frac{PQ}{6} \Rightarrow PQ = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow S_{APQD} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+6\right)\cdot(4+8)$, т.к. $APQD$ – трапеция.

$$S_{APQD} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3+12}{2}\cdot 12 = 3\cdot 15 = 45$$

II Осталось рассмотреть последний случай) когда E лежит за точкой C.

53-50-65-24 (134.1)

Чистовик 9

№4.

$2^3=8$
$3^3=27$
$12^3=1728$
$13^3=2197$

$\Rightarrow \left[\sqrt[3]{25}\right]=2$

$\left[\sqrt[3]{2025}\right]=12$

1) Рассм. n^3 и $(n+1)^3$.

Нам нужно посчитать, сколько натур. чисел, кратных n, находятся в полуинтервале ~~промежутке~~ $[n^3; (n+1)^3)$.

$(n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+1 = \frac{1}{n}\left(n^2+3n+3+\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow$ до $(n+1)^3$ вкл. n^2+3n+3 чисел, кратных n.

До n^3 не вкл. n^2-1 чисел, кратных n.

$\Rightarrow$ ~~нужное~~ искомое кол-во чисел равно $n^2+3n+3-(n^2-1)=3n+4$.

2) В нашей задаче нам нужно посчитать:

а) два крайних случая:

I) от 25 до 27 ($[25;27)$) – нужно посчитать кол-во чисел, кратных 2.

II) от 1728 до 2025 ($[1728, 2025]$) – нужно посчитать кол-во чисел, кратных 12.

Чистовик 10

б) остальные числа разбиваются на ~~подзадачи~~, ~~кото~~ подзадачи, ~~кот~~ общий вид которой мы рассм. в 1).

Т.е. мы должны найти сумму слагаемых вида $3n+4$ для $n \in [3; 11]$.

~~а~~ Считаем:

2) а) I: 25, 26 – 1 число, кратное 2.

2) а) II: $[1728, 2025]$.

$1728 = 12 \cdot 144$

$2025 = 12 \cdot 168 + 9$

$\Rightarrow$ чисел, кратных 12, до 1728 не вкл. будет 143; чисел, кратных 12, до 2025 вкл. будет 168.

$\Rightarrow$ искомое число: $168 - 143 = 25$

2) б): ~~$(3+4)+(9$~~

$(3 \cdot 3 + 4) + (3 \cdot 4 + 4) + \ldots + (3 \cdot 11 + 4) =$

$= 3(3 + 4 + \ldots + 11) + 4 \cdot 9 =$

$= 3 \cdot \dfrac{14 \cdot 9}{2} + \cancel{36}\ 9 \cdot 4 = 21 \cdot 9 + 9 \cdot 4 =$

53-50-65-24
(134.1)

~~Чистовик~~ Черновик 9

$16 + 8a \le 0$

$8a \le -16$

$a \le \frac{-16}{8} = -2$

$\Rightarrow$ т.к. $a > 0$, то решений нет.

2) $t = 2$ (при $x = y$).

$t = \frac{x+y}{\sqrt{xy}} = 2, x = y$

Вернемся к изначальному неравенству:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \ge \frac{a}{2} + 2$$

$x = y$:

$$\frac{x}{x} + \frac{x}{x} + \frac{a\sqrt{x^2}}{x+x} \ge \frac{a}{2} + 2$$

$$2 + \frac{a \cdot x}{2x} \ge \frac{a}{2} + 2$$

$$\frac{a}{2} + 2 \ge \frac{a}{2} + 2$$

$$0 \ge 0$$

Чернов 10

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}\geq\frac{a}{2}+2$$

$144-16=128$

$$\frac{x^2+y^2}{yx}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}\geq\frac{a}{2}+2$$

$$\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}\geq\frac{a}{2}+2$$

$$t^2-2+\frac{a}{t}\geq\frac{a}{2}+2$$

$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}$

$$t^2+\frac{a}{t}-\frac{a}{2}-4\geq 0$$

$$a\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)+(t^2-4)\geq 0$$

$$a\,\frac{2-t}{2t}+(t-2)(t+2)\geq 0$$

$$(t-2)\left(-\frac{a}{2t}+t+2\right)\geq 0$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{xy}}\geq 2 \qquad t+2-\frac{a}{2t}\geq 0$$

$a=0$

$$2t^2+4t-a\geq 0$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2 \qquad D=16+8a\leq 0$$

$$\frac{x^2+y^2}{xy}\geq 2$$

~~Черновик~~

$\cancel{t^2 \geq 4}$

$\cancel{\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 \geq 4}$

Чистовик 13

$2t^2+4t-a \geq 0$

$t, a > 0$; $t \geq 2$. (рав-во достигается).

1 $D = 16+8a$

1) $16+8a \leq 0$

$a \leq -2$ – не подх.

2) $D > 0$:

$t_{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8a}}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{16+8a}}{4}$

~~Ветви параболы направлены вверх~~,

Нужно требовать, чтобы

$-1 + \frac{\sqrt{16+8a}}{4} < 2$ (т.е. больший корень меньше 2, следует из того, что т.к. $t \geq 2$)

$\cancel{\sqrt{16+8a} < 4}$

$\cancel{16+8a < 16}$

$\cancel{8a < 0}$

$\cancel{a < 0}$

Чистовик 14

$$\frac{\sqrt{16+8a}}{4} < 3$$

$$\sqrt{16+8a} < 12$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 16+8a \geq 0 \\ 16+8a < 144 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq -2 \\ 8a < \overset{128}{144-16} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq -2 \\ a < 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \in (0; 16)$$

Ответ: $a \in (0; 16)$.

~~Черновик~~

Чистовик 11

$= 9\cdot(21+4) = 9\cdot 25.$

Итого: $1+25+9\cdot 25 = 1+10\cdot 25 = 251$

Ответ: 251.

№5.

$x, y, a > 0.$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2}+2$$

$$\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2}+2$$

Пусть $n = x+y$, $m = xy$; $n, m > 0$, тогда:

$$\frac{n^2-2m}{m}+\frac{a\sqrt{m}}{n} \geq \frac{a}{2}+2$$

$$\frac{n^2}{m}-2+\frac{a\sqrt{m}}{n} \geq \frac{a}{2}+2$$

$$\frac{n^2}{m}+\frac{a\sqrt{m}}{n} \geq \frac{a}{2}+4$$

$t = \frac{n}{\sqrt{m}}$

Пусть ~~$t = \frac{\sqrt{m}}{n}$~~, $t > 0$, тогда:

$$t^2+\frac{a}{t} \geq \frac{a}{2}+4$$

$$\left(\frac{a}{t}-\frac{a}{2}\right)+\left(t^2-4\right) \geq 0$$

Чистовик 12

$$a\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)+(t^2-4)\geq 0$$

$$a\left(\frac{2-t}{2t}\right)+(t-2)(t+2)\geq 0$$

$$\cancel{-a\frac{(t+2)}{2t}}$$

$$-a\left(\frac{t-2}{2t}\right)+(t-2)(t+2)\geq 0$$

$$(t-2)\left(-\frac{a}{2t}+t+2\right)\geq 0$$

$$t=\frac{a}{\sqrt{m}}=\frac{x+y}{\sqrt{xy}}$$

$x,y>0;\quad x+y\geq 2\sqrt{xy}$ $\Rightarrow t\geq 2$ (рав-во достигается при $x=y$)

$$\Rightarrow (t-2)\geq 0$$

$\Rightarrow -\frac{a}{2t}+t+2\geq 0$ или $t=2$ (выполняется не при всех x,y)

1)

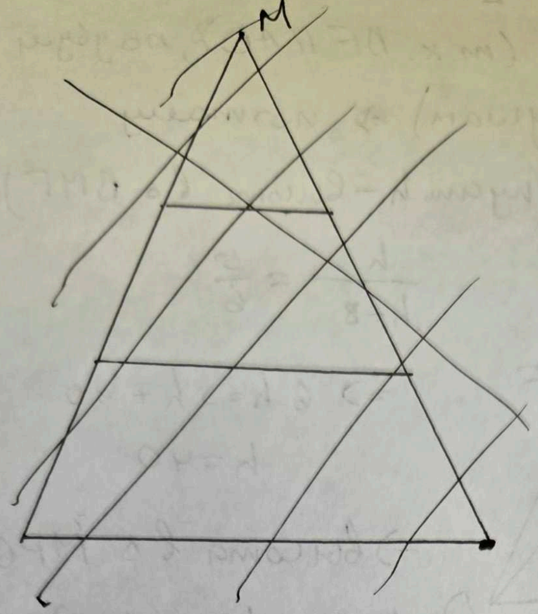
$-\frac{a}{2t}+t+2\geq 0 \quad \Big| \cdot 2t,\ t>0$

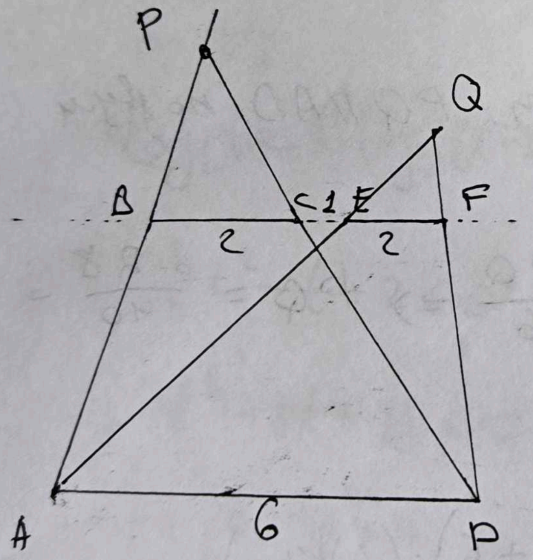
$$-a+t\cdot 2t+2\cdot 2t\geq 0$$

$$2t^2+4t-a\geq 0$$

$$\cancel{\Rightarrow D=16+4\cdot a\cdot 2=16+8a\geq 0}$$

Чистовик 7





1) $BF < AD$

2) $\triangle PBC \sim \triangle PAD$ (т.к. $BC \parallel AD$, по двум углам), тогда:

(пусть x – высота в $\triangle PBC$):

$$\frac{x}{x+8} = \frac{2}{6}$$

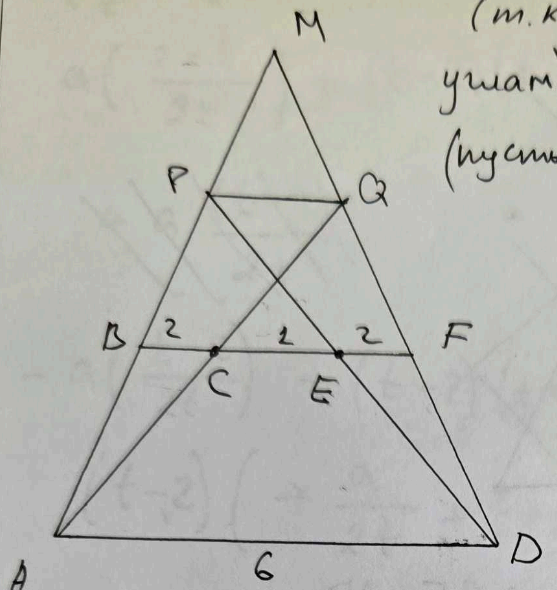
$6x = 2x + 16 \Rightarrow x = 4$

Аналогично считаем, ~~что~~ высоту в $\triangle EQF$, она тоже равна $x = 4$.

$\Rightarrow$ точки P и Q равноудалены от AD

$\Rightarrow PQ \parallel AD$.

Чистовик 8



$\triangle MBF \sim \triangle MAD$ (т.к. $BF \parallel AD$, по двум углам), поэтому:
(пусть h – высота в $\triangle BMF$)

$$\frac{h}{h+8} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow 6h = 5h + 40$$
$$h = 40$$

$\Rightarrow$ высота в $\triangle MPQ$ равна $40-(4+8)=$
$= 40-12 = 28$

$\triangle MPQ \sim \triangle MAD$ (т.к. $PQ \parallel AD$, по двум углам), тогда:

$$\frac{28}{40} = \frac{PQ}{6} \Rightarrow PQ = \frac{6 \cdot 28}{40} =$$
$$= \frac{6 \cdot 7}{10} = \frac{42}{10}$$

$$\Rightarrow S_{APQD} = \frac{1}{2}\left(\frac{42}{10}+6\right)\cdot(4+8)$$
(т.к. $APQD$ – трапеция)

$$S_{APQD} = \frac{1}{2}\cdot 12 \cdot \frac{42+60}{10} = 6 \cdot \frac{102}{10} =$$
$$= \frac{612}{10} = 61{,}2$$

Ответ: 61,2; 45.

53-50-65-24
(134.1)

Черновик 3

$2\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8)\le\log_3(x+3)\log_2(x+8)-2$

$\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_2}\log_2^2(x+3)\cdot\frac{1}{4}\log_3^2(x+8)\le\log_3(x+3)\log_2(x+8)-2$

$\frac{1}{8}\left(\log_2(x+3)\log_3(x+8)\right)^2-\log_3(x+3)\log_2(x+8)+2\le0$

условие:

$\begin{cases}x+3>0\\x+8>0\end{cases}\Rightarrow x>-3$

$\cancel{\frac{1}{2}t^2-t+2\le0}$

$\cancel{t^2-2t+4\le0}$

$\cancel{4-16}$

$\cancel{\frac{1}{2}t^2-t+2\le0}$

$t^2-2t+4\le0$

$\cancel{(t-2)^2\le0}$ $\cancel{A}$ $\cancel{(t-1)^2+3\le0}$

$\cancel{\Rightarrow t=2}$

$\cancel{\log_2(x+3)\log_3(x+8)=2}$

$\frac{1}{8}t^2-t+2\le0$

$t^2-8t+16\le0$

$(t-4)^2\le0$

$t=4$

$\log_2(x+3)\log_3(x+8)=4$

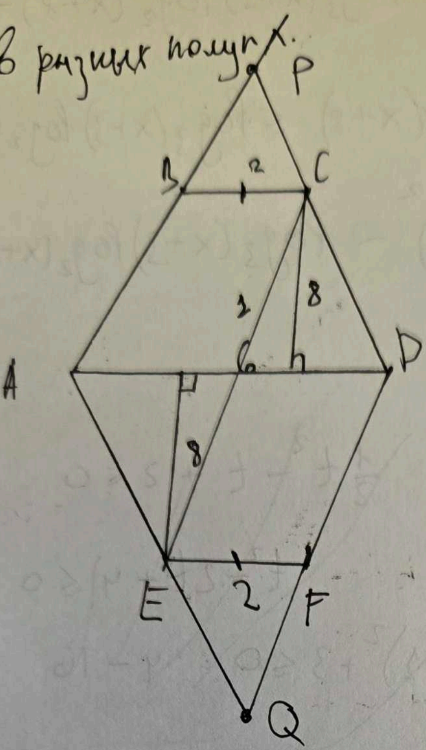
$x=1$ – корень.

$\cancel{x<-1}$ $x<1:$

$x>1:$

Черновик 4 3,75×2

① в разных полупл.



S_{APQD}

$$\frac{x}{8+x}=\frac{2}{6}$$

$$6x=16+2x$$

$$4x=16$$

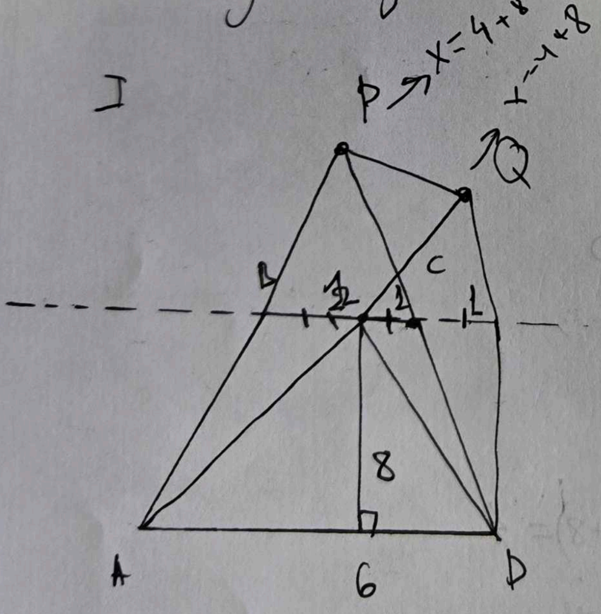
$$x=4$$

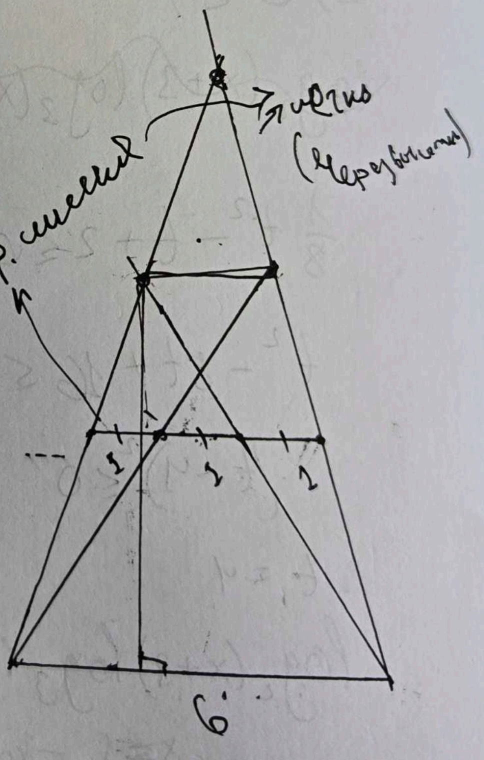
$$S_{APQD}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot(4+8)\cdot 2=$$

$$=6\cdot 12=72$$

② в одной полупл.

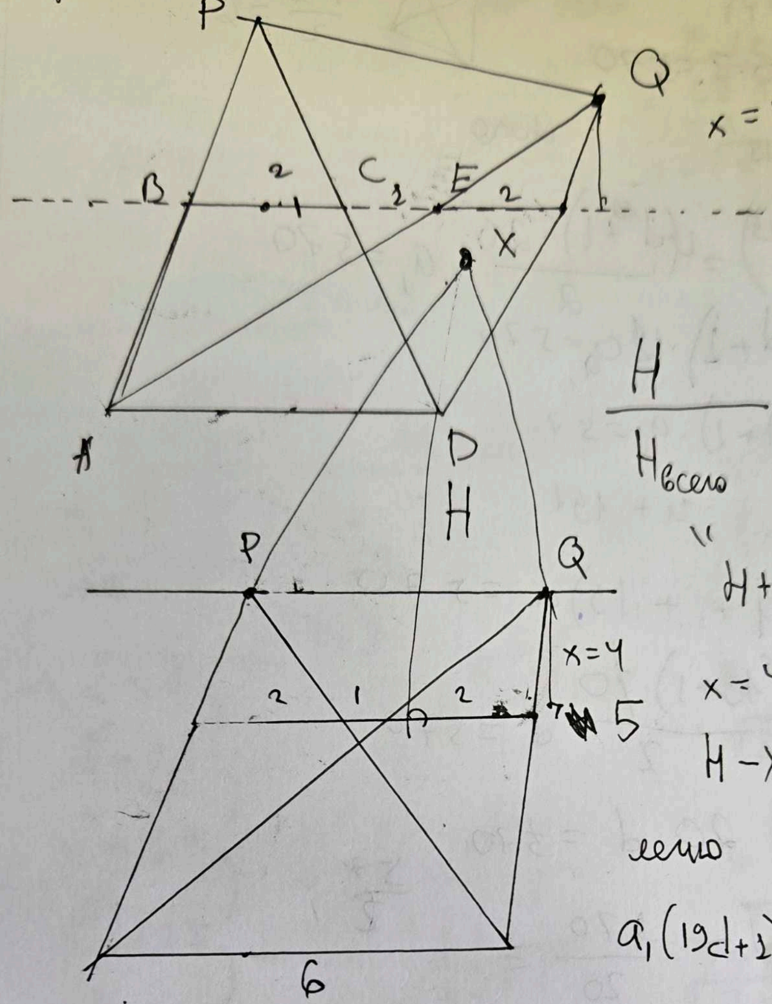
I





53-50-65-24
(134.1)

Черновик 5



x = 4

$$\frac{H}{H_{всего}} = \frac{5}{6}$$

H – знам

〃 H+8

x = 4

H – x

лемю

$a_1(19d+1)\cdot 10 = 570$

$a_1(19d+1) = 57$

Б2

20

$\frac{20\cdot 19}{2}$ – игр   190 $190\cdot 3 = \underline{570}$

0

~~+3 к ач~~

d : 3

$a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n$

~~$a_1($~~ ~~$a_1(1+\dots+d) = a_1$~~

$a_1(1+d+2d+\dots+19d) = a_1\cdot\frac{(19d+1)\cdot 20}{2} =$

$= 570$

Черновик 6

$\frac{4\cdot 3}{2}=6$

$\frac{20\cdot 19}{2}\cdot 3=190\cdot 3=570$

$a_1;\ a_1 d;\ \dots;\ a_1 d^{19}$

$a_1(d+2+\dots+d^{19})=\frac{(d^{19}+1)\cdot 20}{2}\cdot a_1=570$

$(19d+1)\cdot 20a_1=570$

$(19d+1)\cdot a_1=57$

$a_1;\ a_1+d;\ \dots;\ a+19d$

$20a_1+(1+\dots+19)d=570$

$20a_1+\frac{(19+1)\cdot 20}{2}d=570$

$20a_1+20\cdot d=570$

$a_1+d=\frac{570}{20}=$ $\frac{57}{2}$

20

$19\cdot 3=57$

$a_1;\ a_1+d;\ \dots;\ a_1+19d$

$d=3$

$a_1=0$

$20a_1+(1+\dots+19)d=570$

a_1+18d

$20a_1+\frac{20\cdot 19}{2}d=570$

$0+18\cdot 3=$

$=54$

$20a_1+10\cdot 19d=570$

$2a_1+19d=57$

Черновик 7

$n : [\sqrt[3]{n}]$

$[25; 2025]$

$[\sqrt[3]{25}] = 2$

$[\sqrt[3]{2025}] = 12$

12^3

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times\ 12 \\ \hline 288 \\ +144\ \ \\ \hline 1728 \end{array}$$

$15^3 = 225 \cdot 15$

$$\begin{array}{r} 225 \\ \times\ 15 \\ \hline 1125 \\ +225\ \ \\ \hline 3375 \end{array}$$

$14^3 = 196$

$$\begin{array}{r} 196 \\ \times\ 14 \\ \hline 784 \\ +196\ \ \\ \hline 2744 \end{array}$$

$13^3 = 169 \cdot 13$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times\ 13 \\ \hline 507 \\ +169\ \ \\ \hline 2197 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times\ 7 \\ \hline 343 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times\ 8 \\ \hline 512 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times\ 9 \\ \hline 729 \end{array}$$

$2^3 = 8$

$3^3 = 27$

$4^3 = 64$

$5^3 = 125$

$6^3 = 216$

$7^3 = 343$

$8^3 = 512$

$9^3 = 729$

$10^3 = 1000$

$11^3 = 1331$

$12^3 = 1728$

$13^3 = 2197$

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times\ 11 \\ \hline 121 \\ 121\ \ \\ \hline 1331 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times\ 12 \\ \hline 288 \\ +144\ \ \\ \hline 1728 \end{array}$$

$4; 6$

$:2\ [25; 27)$

$25 = 2 \cdot$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times\ 13 \\ \hline 507 \\ +169\ \ \\ \hline 2297 \end{array}$$

$:2\ [4; 7)$

$4 = 2 \cdot 0$

$7 = 2 \cdot 3 + 1$

$3 - 1 = 2$

$:2 \quad [25; 27)$

$:3 \quad [27; 64)$

$:4 \quad [64; 125)$

$:5 \quad [125; 216)$

$9 - 1 = 8$

Черновик 8

$8 \cdot 16 + 16 = 16 \cdot 9$

$n^3; (n+1)^3$

$[n^3; (n+1)^3) \ \vdots \ n$

$(n+1)^3 = n^3 + 1 + 3n^2 + 3n$

$\frac{(n^3-1)}{n} = n^2 + 3n + 3 + \frac{1}{n}$

$12 \times 4 = 48$

$n^2 + 3n + 3 - (n^2 - 1) = 3n + 3 + 1 = 3n + 4$

$\vdots 3 \ [27; 64)$

$12 \times 4 = 76$

$1728 : 12 = 144$

$3 \cdot 3 + 4 = 9 + 4 = 13$

$27 = 9 \cdot 3 \quad 8$

$64 = 3 \cdot 21 + 1 \quad 21$

$21 - 8 = 13$

$\sum_{n=3}^{11} (3n+4) + 2\text{края}$

$2025 : 12 = 170$, ост. 5

$12 \times 8 = 96$

$12 \times 6 = 72$

$170 \cdot 12 + 5$

$170 \times 12 = 2040$

$2025 : 12 = 168$, ост. 105

$2025 : 12 = 168$, ост. 9

$168 \cdot 12 + 9$

$168 \times 12 = 2016$

3 4 5 6 7 8 9 10 11

9

$42 + 10 = 52$

$52 + 11 = 63$

$12 + 6 = 18$

$18 + 7 = 25$

$3 + 4 = 7$

$7 + 5 = 12$

$25 + 8 = 33$

$33 + 9 = 42$

Чистовик 1

№1.

Всего игр: $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$

В каждой игре ~~[illegible]~~ одна команда получала 3 очка, вторая 0.

$\Rightarrow$ всего очков было получено: $190 \cdot 3 = 570$.

Для удобства подсчета будем расм. нашу прогрессию „наоборот" (т.е. a_1 – последний член теперь будет первым прогрессии; шаг d равен по модулю изначальному, но теперь положительный), тогда:

a_1; a_1+d, ... a_1+19d – очки, набранные командами.

Всего очков:

$a_1+(a_1+d)+\ldots+(a_1+19d) = 20a_1+(1+\ldots+19)d =$

$= 20a_1 + \frac{20 \cdot 19}{2} d = 20a_1 + 10 \cdot 19d = 570$

$\Rightarrow 2a_1 + 19d = 57$

$d > 0$; $d \vdots 3$ (т.к. по усл. очки можно получать только по 3); $a_1 \geqslant 0$ (из условия, т.к. ~~[illegible]~~ нет отрицательных очков)

① $d > 3$:

$19d > 19 \cdot 3 = 57 \Rightarrow 2a_1 < 0 \Rightarrow$ не подх.

$\Rightarrow d$ может быть только 3.

② $d = 3$:

$2 \cdot a_1 + 19 \cdot 3 = 57 \Rightarrow a_1 = 0$

Чистовик 2

$\Rightarrow a_1 = 0;\ d = 3.$ ~~+ данный пример подходит под условие~~

⇒ искомая прогрессия:

$0+19d;\ 0+18d;\ \dots;\ 0;$ где $d=3$ ~~+ данный пример подходит под условие (сумма 570, прогрессия убывающая, начисляют по 3 очка).~~

Пример:

1ая команда выигрывает у всех.

2ая проигрывает только 1ой

3я проигрыв. только 1 и 2

⋮

20я проигрывает ~~в~~ всем. (с 1 по 19)

Данный пример подходит.

⇒ команда, занявшая второе место, набрала $18 \cdot 3 = 54$ очка.

Ответ: 54.

№3.

$$2\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8) \le \log_3(x+3)\log_2(x+8)-2$$

$$2\cdot\frac{1}{4}\log_2^2(x+3)\cdot\frac{1}{4}\log_3^2(x+8) \le \log_3(x+3)\log_2(x+8)-2$$

[illegible] $\frac{3}{2}$

$$\frac{1}{8}\log_2^2(x+3)\log_3^2(x+8)-\log_3(x+3)\log_2(x+8)+2\leq 0$$

$$\log_2^2(x+3)(\log_3^2(x+8))-8\log_3(x+3)\log_2(x+8)+16\leq 0$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+3>0 \\ x+8>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-3 \\ x>-8 \end{cases} \Rightarrow x\in(-3;+\infty)$

Пусть $t=\log_2(x+3)\log_3(x+8)$, тогда:

$$t^2-8t+16\leq 0$$

$$(t-4)^2\leq 0$$

т.к. $(t-4)^2\geq 0 \Rightarrow (t-4)^2=0 \Rightarrow t=4$

Обратная замена:

$$\log_2(x+3)\log_3(x+8)=4$$

1) Если $x>1$, тогда:

$\log_2(x+3)>\log_2(1+3)=\log_2 4=2$ (т.к. $\log_2 x$ – ~~монотонная~~ возраст. функция)

$\log_3(x+8)>\log_3(1+8)=\log_3 9=2$

$\Rightarrow \log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)>4$

$\Rightarrow$ нет реш.

2) Если $x<1$, то:

$\log_2(x+3)<\log_2(1+3)=2$

$\log_2(x+8)<\log_2(1+8)=2$

$\Rightarrow \log_2(x+3)\log_3(x+8)<4 \Rightarrow$ нет.реш.

Чистовик 4

3) $x = 1$:

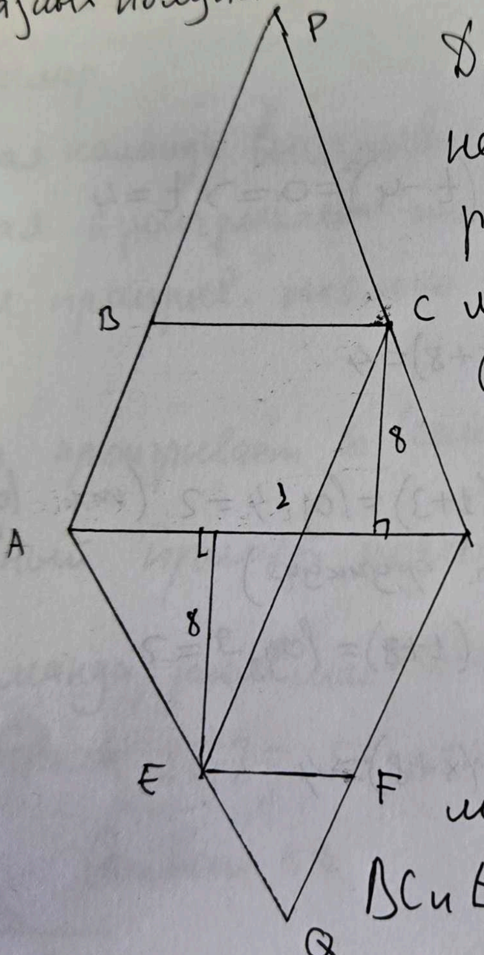
$\log_2(1+3)\log_3(1+8) = 4$ - верно

$\Rightarrow x = 1$ - реш.

Ответ: 1.

№2.

① Трапеции ABCD и AEFD лежат в разных полуплоскостях относит. AD:



Данный случай невозможен; т.к. расстояние между точками C и E больше или равно расст. между парал. прямыми BC и EF, ~~AD~~ 1 а расст. между прямыми BC и EF равно $8+8=16$ ($BC \parallel AD \parallel EF$; AD между BC и EF), $16>1$

$\Rightarrow$ трапеции не могут лежать в разных полуплоскостях.