0 508781 600001

50-87-81-60
(140.5)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Топорковой Кристини Ивановны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«6» апреля 2025 года

Подпись участника

Топор

Чистовик.

85 (Восемьдесят пять)

№ 1.

$4 \cdot 60 = 240$ (руб.) за пирожки с картошкой

$13 - 4 = 9$ (пирожков) не с картошкой

Т.к. с яблоком больше всего пирожков, то их как минимум 5, но среди 9 пирожков есть хотя бы по 1 с капустой, малиной, клубникой => максимум с яблоком $9 - 3 = 6$ пирожков.

1) Чтобы сумма была максимальной, нужно как можно больше самых дорогих пирожков — с клубникой, но так как минимум 5 с яблоком и хотя бы по 1 с капустой и малиной, то с клубникой максимум $9 - 5 - 2 = 2$ пирожка. Тогда за все пирожки Маша получит:

$240 + 70 + 5 \cdot 80 + 90 + 2 \cdot 100 = 1000$ (руб.) наиб. сумма

2) Чтобы сумма была минимальной, нужно как можно больше самых дешёвых пирожков — с капустой (с картошкой фиксированное кол-во). Но кроме них ещё минимум 5 с яблоком, а также хотя бы по 1 с малиной и клубникой, тогда с капустой максимум $9 - 5 - 2 = 2$ п. Тогда за все пирожки Маша получит:

$240 + 2 \cdot 70 + 5 \cdot 80 + 90 + 100 = 970$ (руб.) наимен. сумма

Ответ: наибольшая — 1000 руб.,
наименьшая — 970 руб.

Чистовик.

№ 2.

Ответ: 2035 год.

Решение.

~~Будем искать [illegible] в 21 веке, года~~

~~20n : (20+n)~~

Нетрудно догадаться, что номер года должен быть кратен 5. Число 2030 не подходит, т.к. 2030 ⋮̸ 50. Следующее число — 2035, 2035 ⋮ 55 => этот год подходит. С помощью полного перебора чисел между 2025 и 2035 можно доказать, что ближайший следующий замечательный год именно 2035.

50-87-81-60
(140.5)

Чистовик.

№ 3.

Так как 3 единицы подряд не могут стоять по вертикалям, то в каждом столбце максимум 4 единицы $\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline 1\\ \hline 0\\ \hline 1\\ \hline 1\\ \hline\end{array}$, и центральная строка будет без единиц.

3 единицы подряд не могут стоять и по горизонталям, значит в каждой строке максимум 4 единицы $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&0&1&1\\ \hline\end{array}$, и центральный столбец будет без единиц.

Значит, суммарно на доске $5+5-1=9$ клеток, в которых стоит 0 (минимум).

Тогда наибольшее возможное количество единиц — $25-9=16$.

Ответ: 16.

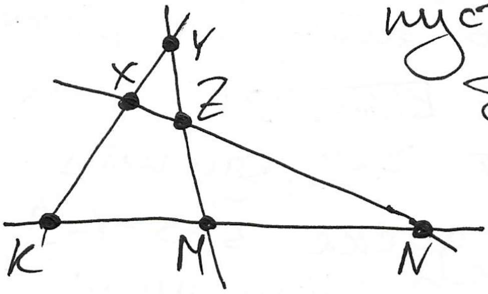
Пример:

1	1	0	1	1
1	1	0	1	1
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	0	1	1

Чистовик.

№ 4.

1) Заметим, что при данном условии если определить ~~расстановку 2 букв~~ буквы для 2 соседних точек, то все остальные буквы определяются однозначно:



пусть мы определили буквы X и Y, тогда Z — буква, которая должна быть на 1 прямой с X и на 1 прямой с Y (но при этом эти прямые разные); K — буква на 1 прямой сразу с X и Y; M — буква на 1 прямой ~~его~~ только с Y; N — на 1 прямой только с X.

2) Для первой точки мы можем выбрать любую из 6 букв; для второй точки можно выбрать одну из 4 букв, которые должны быть соседними с первой буквой. Итого $6 \cdot 4 = 24$ варианта.

3) Т.к. нам нужно найти другие способы, то их $24 - 1 = 23$.

Ответ: 23.

Чистовик.

№ 6.

1) Так как в наборе x размах 1, то ~~все~~
~~числа $x_1, \dots, x_{2025}$ равны либо~~
$n \le x_i \le n+1$. ~~=> размах y не больше n+1.~~

2) ~~Чтобы размах y был наиб~~
Заметим, что число y_i — это среднее арифметическое чисел $x_1, x_2, \dots, x_i$. Тогда $n \le y_i \le n+1$ => размах y не больше $n+1-n=\underline{1}$.

3) Чтобы размах был наибольшим, пусть в наборе x только числа n и n+1.

3.1) Пусть $x_1=n=y_1$, тогда нужно, чтобы y_i было как можно больше => пусть $x_2=x_3=\dots=x_{2025}=n+1$, тогда

$$y_{2025}=\frac{n+(n+1)+\dots+(n+1)}{2025}=\frac{2025n+2024}{2025}=$$

$$=n+\frac{2024}{2025}$$ и $y_1<y_2<\dots<y_{2025}$ =>

размах $y=y_{2025}-y_1=\frac{2024}{2025}$.

При $x_1=n$ это наиб. возмож. разм.

3.2) Пусть $x_1=n+1=y_1$, тогда нужно, чтобы y_i было как можно меньше → пусть $x_2=x_3=\dots=x_{2025}=n$, тогда

$$y_{2025}=\frac{n+1+n+\dots+n}{2025}=\frac{2025n+1}{2025}=n+\frac{1}{2025}$$ и

$y_1>y_2>\dots>y_{2025}$ => размах $y=y_1-y_{2025}=\frac{2024}{2025}$

Чистовик.

№ 6 (продолжение).

При $x_1 = n+1$ это наиб. возмож. размах.

4) Заметим, что при $x_1 = n$ и $x_1 = n+1$ размахи одинаковы, но, как было замечено ранее, эти размахи наибольшие среди всех возможных размахов.

Ответ: $\frac{2024}{2025}$.

Черновик.

№6 (продолж.) √

при $x_1 = n$ это наибольший возм. разм.

Пусть $x_1 = n+1 = y_1$, тогда нужно чтобы y_i было как можно меньше => пусть $x_2 = x_3 = \ldots = x_{2025} = n$

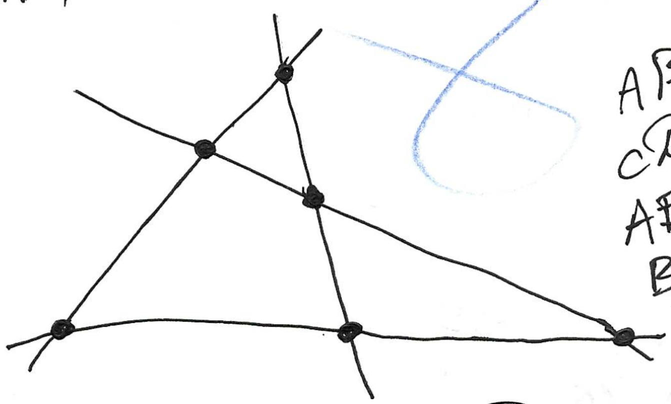
$y_{2025} = \frac{n+1+n+\ldots+n}{2025} = \frac{2025n+1}{2025} = n + \frac{1}{2025}$,

и $y_1 > y_2 > \ldots > y_{2025}$ => размах $= y_1 - y_{2025} = \frac{2024}{2025}$,

это наиб. возм. размах при $x_1 = n+1$

других вариантов для x_1 нет => наиб. размах $= \frac{2024}{2025}$

№4 √



ABC
CDE
AEF
BDF

если определить расстановку ~~букв~~ ~~где~~ ~~1~~ ~~на~~ ~~пер~~ 3 (соседи. точки) соседних букв,

1 буква — любая из 6 то остальные опред. однозначно.

2 буква — одна из 4, которые должны быть на 1 прям. с 1й б.

3 буква — опред. однозначно, т.к. должна быть соседней и с 1, и с 2б.

Итого $6 \cdot 4 = 24$ варианта, но тк мы ищем другие способы, то $24 - 1 = 23$ варианта

Черновик.

№1 ✓

$4 \cdot 60 = 240$ руб за картошку, 9п. не с карт.

Минимум:

яб > к => яб. мин. 5, остаётся 4п., из которых хотя бы по 1 с м. и кл.

2 с кап. — $2 \cdot 70 = 140$ руб

1 с мал. — $1 \cdot 90 = 90$ руб

1 с кл. — $1 \cdot 100 = 100$ руб

$5 \cdot 80 = 400$ руб — ябл.

$240 + 140 + 90 + 100 + 400 = 970$ мин.

Максимум

яб > к => яб. мин 5, но хотя бы 3 п из оставшихся не с яб. => яб макс 6

~~[illegible]~~ яб. — 5 $5 \cdot 80 = 400$

кап. — 1 $1 \cdot 70 = 70$

мал. — 1 $1 \cdot 90 = 90$

кл. — 2 $2 \cdot 100 = 200$

$240 + 400 + 70 + 90 + 200 = 1000$ макс.

№2 ✓ 2035

~~2026 | 46~~

~~2028 | 48~~

2035 | 55
165 | 37
385
385
0

~~2032 | 52~~ ~~2033 | 53~~ ~~2034 | 54~~

$\times$ 37
55
185
+185
2035

~~2029 | 49~~ ~~2030 | 50~~ ~~2031 | 51~~

Черновик.

№3 √

1	1	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0

16?

1	1	0	1	1
1	1	0	1	1
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	0	1	1

1	1	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	0	1	1	0

1	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0

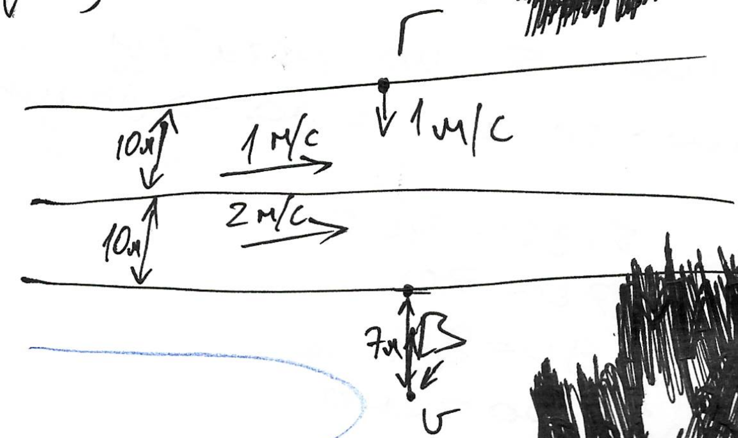
$4 \cdot 5 = 20$

[redacted]

1	0	1		
1	1	0		
0	1	1	0	
1	0	0		
1	1	1		

[redacted]

№5



№6 √

Размах в $x = 1$ => в этом наборе только числа n и $n+1$

число y_i — ср. ар. первых i чисел набора x,

значит $\boxed{n \le y_i \le n+1}$, т.е. размах y точно не больше единицы.

Пусть $x_1 = n = y_1$, тогда нужно чтобы y_i было как можно больше => пусть $x_2 = \ldots = x_{2025} = n+1$

$$y_{2025} = \frac{n + (n+1) + \ldots + (n+1)}{2025} = \frac{2025n + 2024}{2025} = n + \frac{2024}{2025}$$

при этом $y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_{2025}$ => размах $y_{2025} - y_1 = \frac{2024}{2025}$,