0 813101 350000

81-31-01-35
(150.4)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Выход 13:29 – 13:33

Вариант 11 класс. В-1
Ростов-на-Дону

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори воробьевы горы!

по математике

Чумаченко Дмитрия Олеговича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«06» 04 2025 года

Подпись участника

81-31-01-35 (150.4)

черновик

№1. Графы (полный) ~~А~~ В - 3

П - 0

Н - 0

20 комнат.

$(19\cdot 3)-3=$ $\quad$ $\begin{array}{r}\overset{2}{19}\\ \times\ 3\\ \hline 57\end{array}$

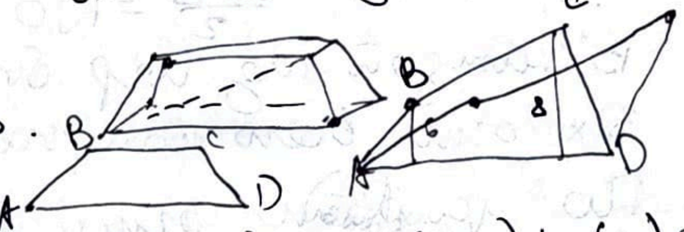
$57-3=54$ — $\boxed{\text{огни}}$.

№3.

$$2\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8)\le\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2$$

ОДЗ:

$\begin{cases}x+3>0\\ x+8>0\end{cases} \Rightarrow x>-3.$



$$2\cdot\frac14\cdot\log_2^2(x+3)\cdot\frac14\cdot\log_3^2(x+8)\le\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2$$

$$\log_2^2(x+3)\cdot\log_3^2(x+8)\le 8\cdot\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2.$$

Заметим, что $\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)=\frac{\log_2(x+3)}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_3(x+8)}{\log_3 2}=\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8).$

Т.к. $\log_2 3\cdot\log_3 2=1\Rightarrow$ исходное ≠:

$$\log_2^2(x+3)\cdot\log_3^2(x+8)\le 8\cdot\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)-16$$

$y=\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)$, огр на y: .

$y^2\le 8\cdot y-16.$

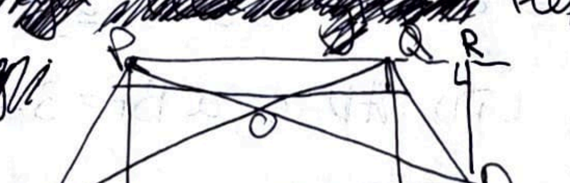
$y^2-8y+16\le 0.\quad (y-4)^2\le 0.\Rightarrow y=4\Rightarrow$

$\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)=4$

~~Воспользовавшись~~ . что ~~т.к.~~ $\log_2 3\cdot\log_3 2=1$

~~[illegible]~~ неравенство ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~



129

черновик

$1+13+16+19+22+25+28+31+34+37+25=$

$m, k>0$ и $m=2, k=1$

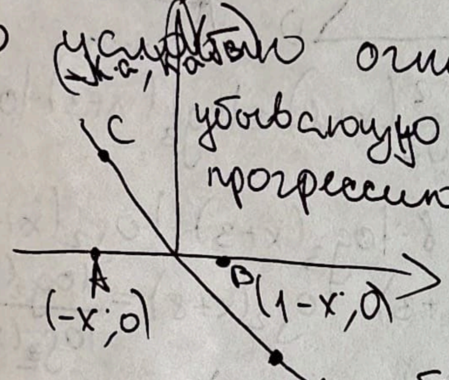
$50+20+56+50+65=$

2a №1 Всего игр $\frac{20\cdot 19}{2}$ (можно рассмотреть относительно [illegible]).

$a(2+2k)$ $\frac{20\cdot19}{2}=190$ игр.

В каждой из игр был разыгран 3-х очков, всего которых $190\cdot 3=570$.

По условию очки помощ образуют убывающую арифметическую прогрессию. Тогда запишем:



$20\cdot\frac{(x(x+19d))}{2}=570$

$10(x+(x+19d))=570 \mid :10$

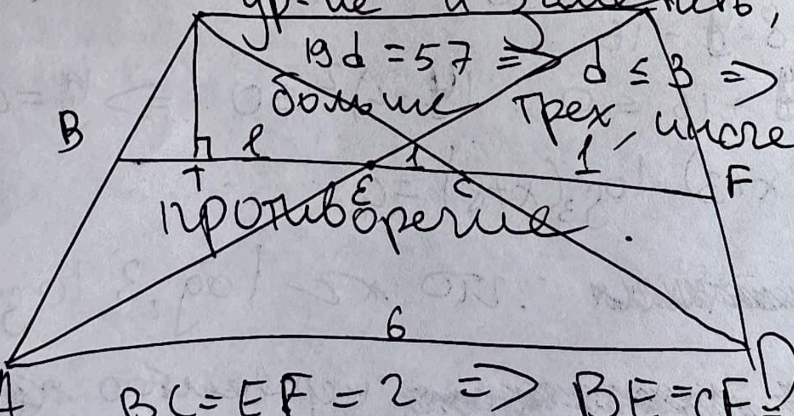
$x+(x+19d)=57$.

$2x+19d=57$.

$B \Rightarrow B'(1+t-x;0)$

$19\cdot 3=57$

Можно оценить данное ур-не и заметить, что $19d=57 \Rightarrow d\le 3 \Rightarrow d$ - не больше трех, иначе противоречие.



$BC=EF=2 \Rightarrow BE=CF=1$

исходя из того, что $AD=6$, а $BF=3 \Rightarrow$

81-31-01-35 (150-4)

Чистовик

№3

$2\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8)\le\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2$

Запишем ОДЗ:

ОДЗ

$\begin{cases} x+3>0 \\ x+8>0 \end{cases} \Rightarrow x>-3$

Тогда:

$2\cdot\frac{1}{4}\cdot\log_2^2(x+3)\cdot\frac{1}{4}\cdot\log_3^2(x+8)\le\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2$

$\log_2^2(x+3)\cdot\log_3^2(x+8)\le 8\cdot\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2$

Заметим: $\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)=\frac{\log_2(x+3)}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_3(x+8)}{\log_3 2}=$

$=\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)$. Т.к. $\log_2 3\cdot\log_3 2=1$,

тогда исходное неравенство:

$\log_2^2(x+3)\cdot\log_3^2(x+8)\le 8\cdot\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)-16$

Пусть

$y=\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)$

$y^2\le 8\cdot y-16$

$y^2-8y+16\le 0 \Rightarrow (y-4)^2\le 0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow$

$\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)=4$.

$\frac{\log_e(x+3)}{\log_e 2}\cdot\frac{\log_e(x+8)}{\log_e 3}=4$

$\log_e(x+3)\cdot\log_e(x+8)=4\cdot\log_e 2\cdot\log_e 3$

Пусть $x+3=c$, $c>0 \Rightarrow x+8=c+5$

В силу монотонного возрастание функции $f(z)=\ln z$

$\ln c<\ln 4$, при $c<4$.

$\log_e(c+5)<\log_e 9$, при $c<4$. $\Rightarrow$ левая часть ур-ие меньше правой. При $c>4 \Rightarrow$

$\log_e c>\log_e 4$, $\log_e c+5>\log_e 9 \Rightarrow$ л.ч больше правой $\Rightarrow$ равенство достигается, только при $c=4$, тогда:

черновик

$x+3=4 \Rightarrow x=1$ - подходит под ОДЗ.

Ответ: $x=1$

№1

Всего игр - $\frac{20\cdot 19}{2}=190$. В каждой игре разыграно ровно 3 очка, т.к ничьих нет

Всего очков $190\cdot 3=570$.

Пусть последняя команда имеет x-очков, т.к очки всех команд образуют прогрессию с некоторой разностью - d, то общая сумма очков: $20\cdot\frac{x+(x+19d)}{2}=570$

$2x+19d=57$. Т.к. в каждой давалось кол-во очков $\vdots 3$, то x делится на 3, при $d=0 \Rightarrow$ $2x=57 \Rightarrow x$ - не целое. При $d=1$. $2x=38$ $\Rightarrow x=19$ - не $\vdots 3$. При $d=2$. $2x=19 \Rightarrow$ x - не целое. При $d=3$. $x=0$ - подходит.

При $d>3$, $2x<0$ - невозможно.

При $x=0$, $d=3$, вторая команда заняла $18d = 54$ очка.

Приведем пример распределения очков:

$0; 3; 6; 9; \ldots; 54; 57$.

По возрастанию, где команда набравшая 57 очков - победила всех.

Если дать нумерацию, где x_1 - самая слабая (последняя), а x_{20} - самая сильная $\Rightarrow$ x_n будет выигрывать у всех команд с более низким номером, и проигрывать с более высоким.

Ответ: 54.

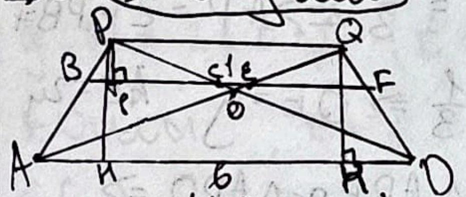
чистовик.

№2

Замечание по задаче: т.к. высоты трапеции равны 8, а расстояние между C и E = 1, то (·) B, E, C, F лежат в одной полуплоскости AD (иначе расстояние между C и E не меньше 16) причем т.к. высоты трапеции равны, ~~A~~ AD – общее основание, то (·) B, E, C, F – лежат на одной прямой.

Рассм. 2 случая, когда BC и EF пересекаются и не пересекаются:

~~Лем~~ I случай: BC и EF – не пересек.



$BC = EF = 2$; $DE = 1$

$AD = 6$. $h_{тр} = 8$.

1) $BC \parallel AD \Rightarrow \triangle PBC \sim \triangle PAD \Rightarrow k\ \frac{BC}{AD} = \frac{PB}{PA} = \frac{1}{3} \Rightarrow$
$PB = x$, $AB = 2x$

2) $EF \parallel AD \Rightarrow \triangle QED \sim \triangle QAD \Rightarrow \frac{EF}{AD} = \frac{QE}{AQ} = \frac{1}{3} \Rightarrow$
$QE = y$, $AE = 2y$.

3) $\frac{AB}{AP} = \frac{AE}{AQ} = \frac{2}{3}$, $\angle A$ – общий $\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle APQ$, с $k = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ \parallel PE \Rightarrow PQ \parallel AD \Rightarrow APQD$ – трапеция

$\frac{BE}{PQ} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ = \frac{3BE}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$

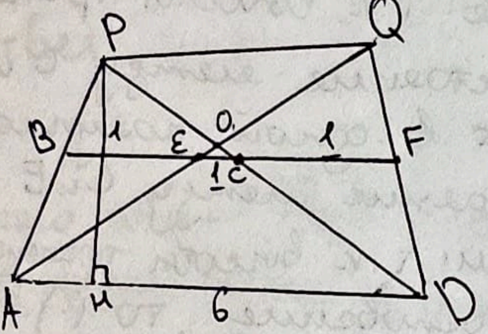
4) Из пункта ① $\Rightarrow$ что $\triangle PBC \sim \triangle PAD \Rightarrow$ их высоты относятся $\frac{1}{3} = \frac{PT}{PH}$ (PT – высота в $\triangle PBC$, PH – высота $\triangle APD$).

$$\begin{cases} PH = 3PT \\ PH - PT = 8 \text{ – высота трапеции} \end{cases} \Rightarrow PT = 4,\ PH = 12.$$

$$S_{APQD} = \frac{PQ + AD}{2} \cdot PH = \cancel{\frac{9}{2}+}\ \frac{\frac{9}{2}+6}{2} \cdot 12 = 10{,}5 \cdot 6 =$$
$= 63$.

чистовик

II случай: BC и EF - пересекаются.



$CE=1$, $BC=EF=2$

$AD=6$

1) $BC=2$; $CE=1 \Rightarrow BE=1$, $CF=1$ (т.к BC и EF - пересекаются)

2) Аналогичное рассуждение:

$\Delta PBC \sim \Delta PAD \Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{PB}{PA} = \frac{1}{3} \Rightarrow AP = 2x, PB = x$

$\Delta QEF \sim \Delta QAP \Rightarrow \frac{EF}{AD} = \frac{QE}{QA} = \frac{1}{3} \Rightarrow QE = y$; $AE = 2y$

3) $\begin{cases} \angle A \text{ - общий}; \frac{AB}{AP} = \frac{AE}{AQ} = \frac{2}{3} \Rightarrow \Delta ABE \sim \Delta APQ \Rightarrow \\ \frac{BE}{PQ} = \frac{AB}{AP} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ = \frac{3 \cdot BE}{2} = 1{,}5. \end{cases}$

4) Высота будет такой же длины как и в случае ①. Т.к ΔPBC и ΔPAD - не меняются

5) $S_{APQD} = \frac{6+1{,}5}{2} \cdot 12 = 45$.

Ответ: $S_{APQD} = 45$ или $S_{APQD} = 63$

№5

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2} + 2$; $x, y > 0$.

Пусть $t = \sqrt{\frac{x}{y}} \Rightarrow \frac{x}{y} = t^2 \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{t^2}$.

$\frac{\sqrt{xy}}{x+y} = \frac{\sqrt{t^2 \cdot y \cdot y}}{t^2 \cdot y + y} = \frac{ty}{y(t^2+1)} = \frac{t}{t^2+1}$

$\frac{t^2+1}{t^2} + \frac{at}{t^2+1} \geq \frac{a}{2} + 2$.

$\left(t^2 + \frac{1}{t^2} - 2\right) + a \cdot \left(\frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{2}\right) \geq 0$.

чистовик

$\left(\frac{(t-1)^2(t+1)}{t^2}\right)^2 - a\cdot\frac{(t-1)^2}{2(t^2+1)} \geq 0.$

$(t-1)^2\left(\left(\frac{t+1}{t}\right)^2 - \left(\frac{a}{2(t^2+1)}\right)\right) \geq 0.$

$(t-1)^2 \geq 0$, а при $t=1 \Rightarrow 0 \geq 0 \Rightarrow$

поделим на $(t-1)^2$.

$\left(\frac{t+1}{t}\right)^2 \geq \frac{a}{2(t^2+1)}$

$a \leq \left(\frac{2(t^2+1)(t+1)^2}{t^2}\right) = g(t)$.

Неравенство должно быть истинным, при $\forall t > 0$

$g(t) = 2\left(t+\frac{1}{t}\right)\cdot\left(t+2+\frac{1}{t}\right)$ по неравенству Коши $t+\frac{1}{t} \geq 2$. Пусть $x = t+\frac{1}{t}$, $x \geq 2$.

$G(x) = 2x^2+4x$ - парабола, ветви вверх

Вершина $= \frac{-4}{2\cdot 2} = -1 \Rightarrow G(x)$ возрастает при $x > -1 \Rightarrow$ мин. функции $G(x)$ достигается при $x = 2$: $G(2) = 8+8 = 16$.

$a \leq g(t)$ - истина для любого $t > 0. \Rightarrow$

$a \leq 16$, но a - положительное $\Rightarrow a \in (0;16]$

Ответ: $a \in (0;16]$.

№4

$k = [\sqrt[3]{n}]$, тогда, по определению $[\ldots]$ (целой части)

$k^3 \leq n < (k+1)^3$. Т.к. n должно делится на k, запишем:

$n = k\cdot q$, и подставим в нер-во: $k^3 \leq k\cdot q < (k+1)^3$,

Т.к $k \geq 1$ делим нер-во на k:

$k^2 \leq q < \frac{(k+1)^3}{k}$

Т.к $n \in [25; 2025]$, то при $n = 25$, $k = 2$

при $n = 2025$, $k = 12$, т.е. $k \in [2;12]$

весь интервал $[k^3; (k+1)^3 - 1]$ лежит в $[25; 2025]$

$\frac{(k+1)^3}{k} = k^2 + 3k + 3 + \frac{1}{k}$, т.к q - целое, то макс $q = k^2+3k+3$, тогда кол-во чисел удовлетворяющих условию для данного k: $k^2+3k+3-k^2+1 = 3k+4$, но для крайних значений $k=2$ и $k=12$ интервал может не полностью лежать в $[25; 2025]$, рассм. случаи: $k=2$: $2^3 \le n \le 3^3$ при пересечении с $[25; 2025]$ дает $n \in [25; 26]$, при $n = 26$ - условие выполн. т.к $26 = 2 \cdot 13$. $\Rightarrow$ одно число

$k=3$: $27 \le 3q < 64$. эквивалентно $9 \le q \le 21$ кол-во $q = 21 - 9 + 1$, что соответствует формуле $3k+4 = 13$ целых чисел. $k=4$: $64 \le 4q < 125 \Rightarrow 16 \le q \le 31$ кол-во $q = 31 - 16 + 1 = 16$, что соответствует $3k+4 = 16$. $k=5$: $125 \le 5q < 216 \Rightarrow 25 \le q \le 43$, кол-во $q = 43 - 25 + 1 = 19$, что соответств $3k+4 = 19$. $k=6$: $216 \le 6q \le 343 \Rightarrow 36 \le q \le 57$, кол-во $q = 57 - 36 + 1 = 22$, $3k+4 = 22$. $k=7$: $343 \le 7q < 512 \Rightarrow 49 \le q \le 73$ кол-во $q = 73 - 49 + 1 = 25$. $3k+4 = 25$. $k=8$. $512 \le 8q < 729 \Rightarrow 64 \le q < 91$, кол-во $q = 91 - 64 + 1 = 28$. $3k+4 = 28$. $k=9$: $729 \le 9q < 1000 \Rightarrow 81 \le q < 111$. кол-во $q = 111 - 81 + 1 = 31$, $3k+4 = 31$. $k=10$: $1000 \le 10q < 1331 \Rightarrow 100 \le q \le 133$, кол-во $q = 133 - 100 + 1 = 34$. $3k+4 = 34$. $k=11$: $1331 \le 11q < 1728 \Rightarrow$

чистовик

$121 \le q \le 157$, кол-во $q = 157-121+1=37$,

$3k+4=37$. $k=12$: $1728 \le n \le 2196$ при

пересечении с $[25; 2025]$:

$1728 \le 12q \le 2025 \Rightarrow 144 \le q \le 168$, кол-во

$q = 168-144+1 = 25$.

Итого: $1+13+16+19+22+25+28+31+34+37+25=251$

Ответ: 251.

№6

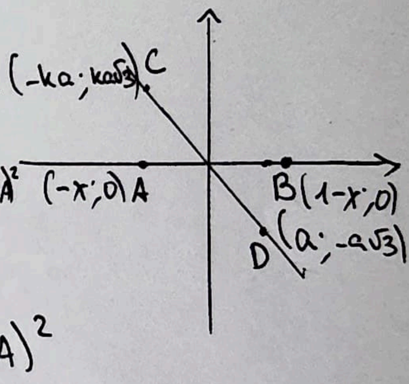
Обознач: $x \in [0;1]$, $2A+2Ak=m \Rightarrow$

$A = \frac{m}{2}+2k$

Движение $AB \Leftrightarrow A \Rightarrow A'(t-x;0)$

$B \Rightarrow B'(1+t-x;0)$

$$\left\{\begin{aligned} A'C^2 &= 3\cdot k^2\cdot A^2+(k\cdot A-x+t)^2 \\ B'D^2 &= 3A^2+(1+t-x-A)^2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$



$\Rightarrow 3k^2\cdot A^2+(k\cdot A-x+t)^2 = 3A^2+(1+t-x-A)^2$

Пусть $t-x=z$, тогда:

$3k^2A^2+(kA+z)^2 = 3A^2+(1+z-A)^2$

$4k^2A^2+2kAz+\cancel{z^2} = 4A^2+1+2z-2Az-2A$

$2z(Ak+A-1) = 4A^2+1-2A-4k^2A^2 \Rightarrow$

z существует всегда, кроме $Ak+A-1=0$,

исключая случаи:

$$\begin{cases} Ak+A-1=0 \;\star \\ 4A^2+1-2A-4k^2A^2=0 \end{cases} \Rightarrow \text{исключаем } A(k+1)=1.$$

т.е. $\frac{1}{k+1} = \frac{m}{2+2k} \Rightarrow$

исключим $m=2$

Рассмотрим $\star$: $Ak = 1-A \Rightarrow 4A^2+1-2A-4(1-A)^2 =$

$=0$

чистовик.

$A = \frac{1}{2}$, $k = 1$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2} = \frac{m}{2+2}$ $\Rightarrow$ $m = 2$. $\Rightarrow$ при $m = 2$ подойдет только $k = 1$

Ответ: Отрезок AB можно передвинуть так, чтобы выполнялось равенство $AC = BD$, для всех пар положительных чисел $(m; k)$, для которых $m \neq 2$, а при $m = 2$, $k = 1$.