0 880539 260003

88-05-39-26
(139.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы Горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Пак Дианы Александровны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«06» апреля 2025 года

Подпись участника

88-05-39-26
(139.1)

чистовик

№1

100 (сто)

$2025 : (20+25) = \frac{2025}{45} = 45$ замечательный

Решение:

$\frac{2026}{20+26} = \frac{2026}{46}$ $\frac{2027}{20+27} = \frac{2027}{47}$

2026 : 46 = 44, ост. 2

2027 : 47 = 43, ост. 6

2028 : 48 = 42, ост. 2

2029 : 49 = 41, ост. 20

2030 : 50 = 40, ост. 3

2031 : 51 = 39, ост. 42

2032 : 52 = 39, ост. 4

2033 : 53 = 38, ост. 19

2034 : 54 = 37, ост. 36

2035 : 55 = 37, ост. 0

$\Rightarrow$ 2035 следующий ближайший замечательный год после 2025

Ответ: 2035

Пусть число вида $\overline{20ab}$, тогда $\frac{\overline{20ab}}{20+\overline{ab}}$

$\frac{\overline{20ab}}{20+\overline{ab}}$ = целое $\Rightarrow \frac{\overline{20ab}-(20+\overline{ab})}{20+\overline{ab}}$ тоже целое

$\overline{20ab}-(20+\overline{ab}) = \overline{20ab} - 20 - \overline{ab} = 2000-20 = 1980 =$

1980	2
990	2
495	5
99	3
33	3
11	11
1	

$= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$

всего делителей: $(2+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 36$

Делители должны быть > 45, т.к нам нужен следующий год

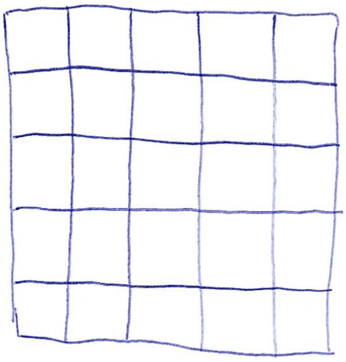
55; 60; 90 ...

$20+35=55 \rightarrow 2035$; $20+40 \rightarrow 2040$; $20+70 \rightarrow 2070$

Ответ: 2035

№2

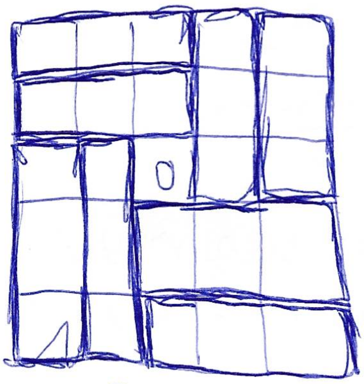
Дано: 5×5



Решение:

1	1	0	1	1
1	1	0	1	1
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	0	1	1

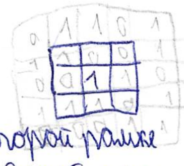
1) Пусть в центре стоит 0



2) Пусть в центре 1, тогда

1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	0

0	0	1	1	0
1	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1



всегда не больше 14

на второй рамке не может быть больше ~~трех~~ четырех единиц, иначе противоречит условию

2) Разобьем оставшиеся клетки на прямоугольники по 3 квадрата в каждом

3) Всего получилось 8 таких прямоугольников

4) А всего клеток, не считая 0:

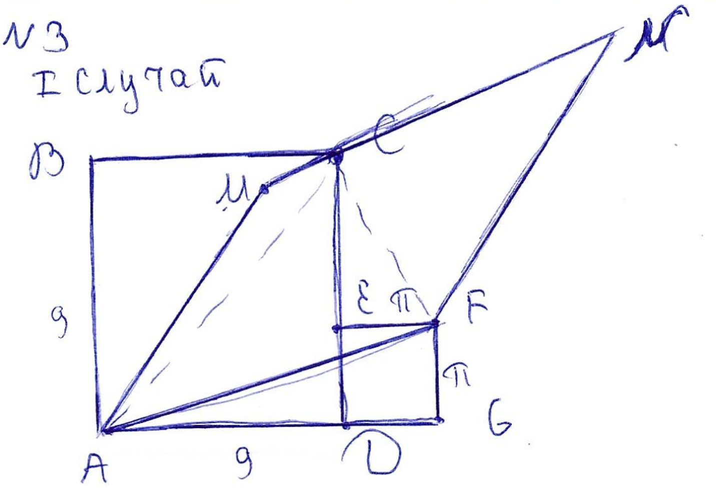
25−1=24

24:3=8, но нельзя, чтобы 3 единицы стояли подряд по горизонтали, верт., диаг => максимум две единицы могут стоять вместе по вертикали, горизонтали и диагонали => 2·8=16 − наибольшее число единиц может быть на доске

Ответ: 16

88-05-39-26
(139.1)

№3
I случай



Дано: $ABCD$ - квадрат
$EFGD$ - квадрат
$AB = 9$
$DE = \pi$
$E \in CD$
$C \in MN$
$AMNF$ - пар-м
$MC : CN = 1 : \pi$
Найти: $S_{AMNF\,max}$

Решение:

1) Доп построение: соединим A с C, C с F

2) По т. Пифагора:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 2 \cdot 81$

$AC = 9\sqrt{2}$

3) $AG = AD + DG = 9 + \pi$

4) По т. Пифагора:

$AF^2 = AG^2 + FG^2$

$AF^2 = (9+\pi)^2 + \pi^2 = 81 + 18\pi + \pi^2 + \pi^2 = 2\pi^2 + 18\pi + 81$

$AF = \sqrt{2\pi^2 + 18\pi + 81}$

5) $CE = CD - ED$

$CE = 9 - \pi$

6) $CF^2 = CE^2 + EF^2$

$CF^2 = (9-\pi)^2 + \pi^2 = 81 - 18\pi + \pi^2 + \pi^2 = 2\pi^2 - 18\pi + 81$

$CF = \sqrt{2\pi^2 - 18\pi + 81}$

7) $S_{AMNF} = 2\, S_{\triangle ACF}$

8) $S_{\triangle ACF} = S_{ABCD} + S_{EFGD} - S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AFG} + S_{\triangle CFE}$

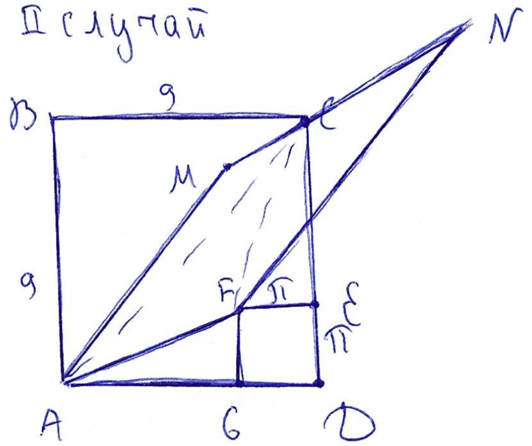
$S_{\triangle ACF} = 9^2 + \pi^2 - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 - \frac{1}{2}\pi(9+\pi) + \frac{1}{2}\pi(9-\pi) =$

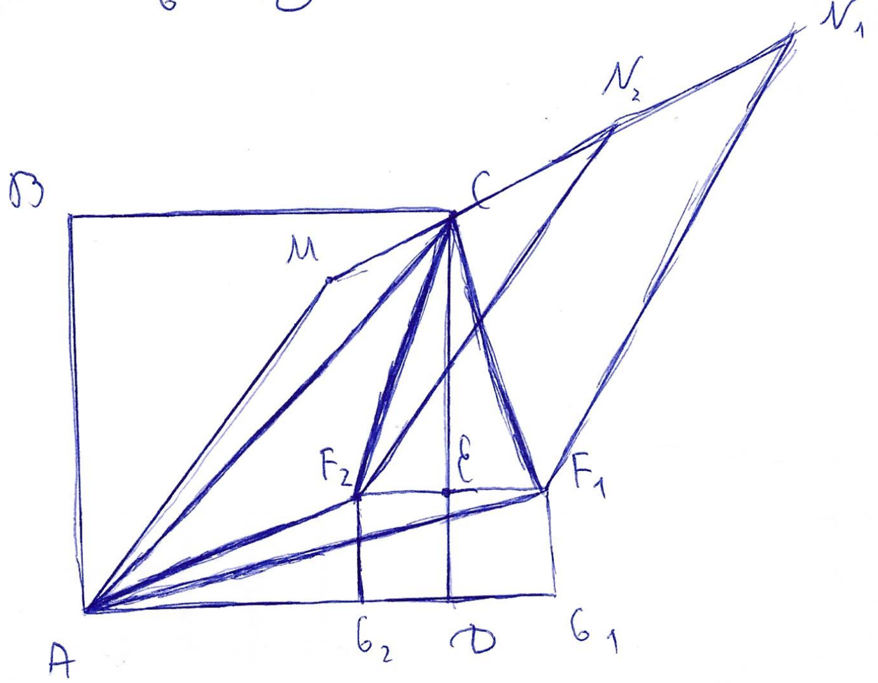
$= 81^{\backslash 2} + \pi^{2\,\backslash 2} - \frac{81}{2} - \frac{9\pi + \pi^2}{2} + \frac{9\pi - \pi^2}{2} =$

$= \frac{162 + \cancel{2\pi^2} - 81 - \cancel{9\pi} - \cancel{\pi^2} + \cancel{9\pi} - \cancel{\pi^2}}{2} = \frac{81}{2}$

9) $S_{AMNF} = 2 S_{ACF} = 2 \cdot \frac{81}{2} = 81$

II случай





$S_{\Delta ACF_1} > S_{\Delta ACF_2} \Rightarrow S_{AMN_1F_1} > S_{AMN_2F_2}$

$S_{max\,AMNF} = 81$

Ответ: 81

N 4

88-05-39-26
(139.1)

Дано:

$$\frac{ab}{(1+a)(a+b)(b+8)} = max \quad a, b > 0$$

$a, b = ?$

Решение:

1) $\frac{ab}{(1+a)(a+b)(b+8)} = max \Rightarrow \frac{(1+a)(a+b)(b+8)}{ab} = min$

2) Пусть $a = const$, тогда:

$$\frac{(a+b)(b+8)}{b} = \frac{ab + 8a + b^2 + 8b}{b} = \cancel{a} + \frac{8a}{b} + b + 8 =$$

$$= \left(b + \frac{8a}{b}\right) + (a+8)$$

3) Неравенство о среднем

$$b + \frac{8a}{b} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{8a}{b}}$$

Минимум достигается, когда $b = \frac{8a}{b}$

$b^2 = 8a$

4) Пусть $b = const$, тогда:

$$\frac{(1+a)(a+b)}{a} = \frac{a + b + a^2 + ab}{a} = 1 + \frac{b}{a} + a + b =$$

$$= \left(a + \frac{b}{a}\right) + (b+1)$$

5) Неравенство о среднем

$$a + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{b}{a}}$$

Минимум достигается, когда $a = \frac{b}{a}$

$a^2 = b$

6) $\begin{cases} b^2=8a \\ a^2=b \quad |^{\wedge} \end{cases}$

$\begin{cases} b^2=8a \\ a^4=b^2 \end{cases}$

$a^4=8a \quad |:a\neq 0$

$a^3=8$

$a=2$

$b^2=8\cdot 2$

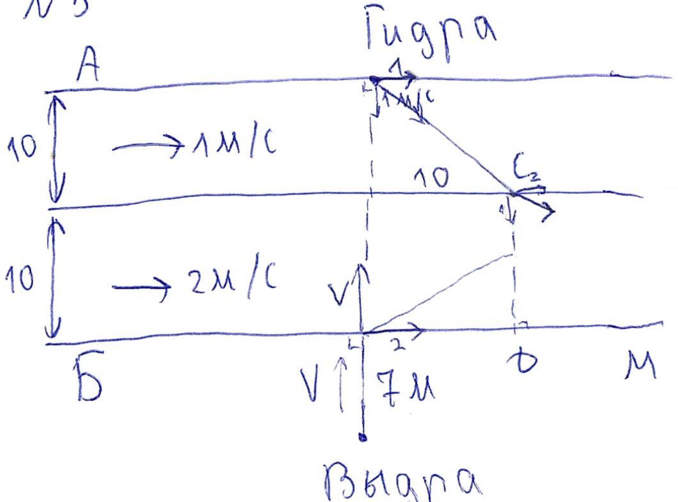
$b^2=16$

$b=\pm 4$, но $b>0 \Rightarrow b=4$

7) Значит, при $a=2$, $b=4$ $\dfrac{ab}{(1+a)(a+b)(b+8)}$ достигает наибольшее значение

Ответ: при $a=2$
$b=4$

№5

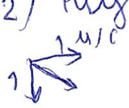


Гидра Решение:

1) Пусть гидра доплывет до середины быстрее, тогда, когда в точке С (середине АБ) окажется гидра, то на отрезке CD должна оказаться выдра (CD ⊥ МБ). Только тогда они

сможут встретиться.

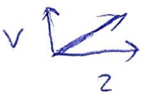
2) Гидра:



до середины


после середины

Выдра:



3) Время выдры $\frac{7}{V}$

4) $\cancel{\frac{7}{V} + \frac{10}{2} = 10}$

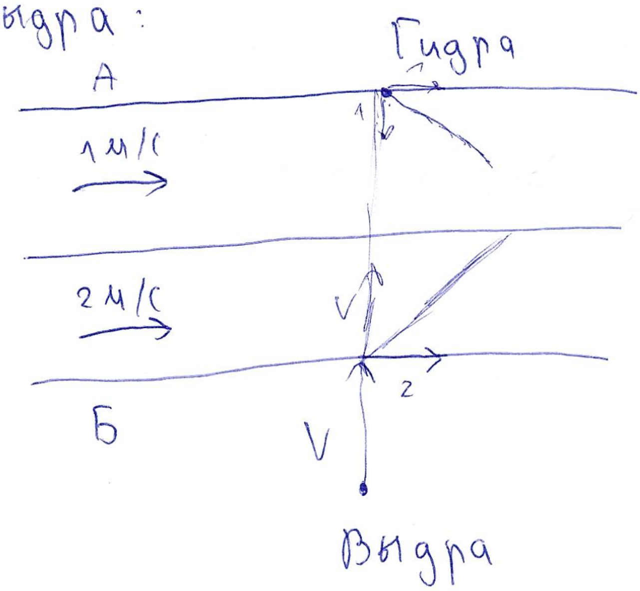
$\cancel{\frac{7}{V} = 2}$

$\cancel{V = 3,5}$

4) $\frac{7}{V} = \frac{10}{2}$

$V = \frac{14}{10} = 1,4$ м/с

Выдра:



$\frac{10}{V} + \frac{7}{V} = \frac{17}{V}$

$\frac{17}{V} \neq \frac{20}{V}$

Ответ: 1,4 м/с

№6

Дано:

$(x_1, \dots, x_{2025})$ с размахом 1

$(y_1, \dots, y_{2025})$ размах max - ?

$y_1 = x_1$

$y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$y_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$

$\vdots$

$y_{2025} = \frac{x_1 + \dots + x_{2025}}{2025}$

Решение:

$(x_1, \dots, x_{2025})$ с размахом 1, тогда

$(x_1, \dots, x_{2025}) \in [0; 1]$

1) Пусть $\left.\begin{matrix} y_1 = x_1 = 0 \\ (x_2, x_3, \dots, x_{2025}) = 1 \end{matrix}\right\}$ тогда получится наиб

2) $y_1 = x_1 = 0$

$y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

$y_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{0+1+1}{3} = \frac{2}{3}$

$y_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{0+1+1+1}{4} = \frac{3}{4}$

$y_5 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = \frac{0+1+1+1+1}{5} = \frac{4}{5}$

$\vdots$

$y_{2025} = \frac{x_1 + \dots + x_{2025}}{2025} = \frac{0+1+1+\dots+1}{2025} = \frac{2024}{2025}$

Наибольший возможный размах:

$\frac{2024}{2025} - 0 = \frac{2024}{2025}$

Больше не может быть, потому что $(x_1, \ldots, x_{2025})$

будет с размахом <1

Ответ: $\frac{2024}{2025}$

Черновик

№1

$\frac{2025}{20+25} = \frac{2025}{45} = 45$

перебор

$\frac{2026}{20+26} = \frac{2026}{46}$ $\frac{2027}{20+27} = \frac{2027}{47}$ $\frac{2028}{48}$ $\frac{2029}{49}$ × $\frac{2030}{50}$ × $\frac{2033}{53}$ × $\frac{2034}{54}$

$\frac{2031}{51}$ × $\frac{2032}{52}$

2026 | 46, 184 | 44, 186, 184, 2

2027 | 47, 188 | 43, 147, 141, 6

2028 | 48, 192 | 42, 108, 96, 12

2032 | 52, 156 | 39, 472, 468, 4

2034 | 54, 162 | 37, 414, 378, 36

2035 | 55, 165 | 37, 385, 385, 0

Пусть число вида $\overline{20ab}$, тогда $\frac{\overline{20ab}}{20+\overline{ab}}$

$\frac{\overline{20ab}}{20+\overline{ab}}$ = целое ⇒ $\frac{\overline{20ab}-(20+\overline{ab})}{20+\overline{ab}}$

$\overline{20ab}-(20+\overline{ab}) = \overline{20ab} - 20 - \overline{ab} = 2000 - 20 = 1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$

1980 | 2, 990 | 2, 495 | 5, 99 | 3, 33 | 3, 11 | 11, 1

Всего делителей: $(2+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 3^2 \cdot 2^2 = 36$

Делители больше 45: 55; 60; ...

$20+35 \to 2035$; $20+40 \to 2040$

Перебор

№2

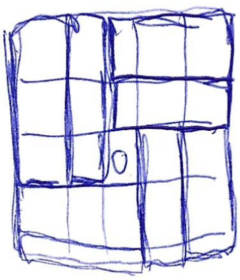
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	0

0	0	0	1	1
1	1	0	1	1
1	1	0	0	0
0	0	0	1	1
1	1	0	1	1

Максимальное кол-во единиц получится, если в центр написать 0

1	1	0	1	1
1	1	0	1	1
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	0	1	1

16

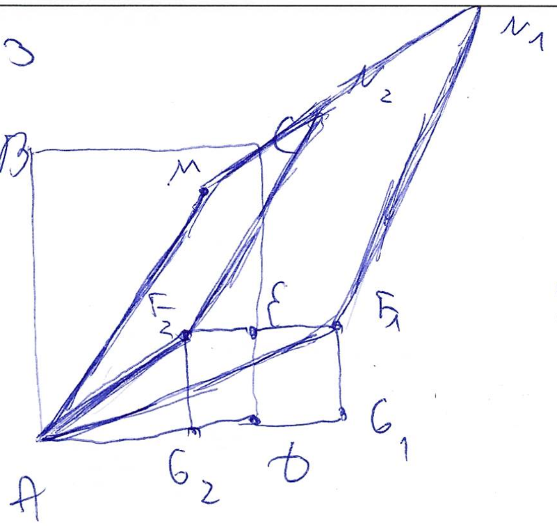


$25 - 1 = 24$

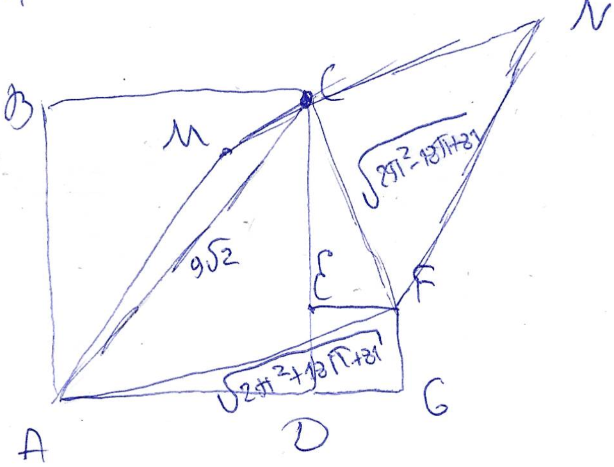
$24 : 3 = 8$

$8 \cdot 2 = 16$

N3

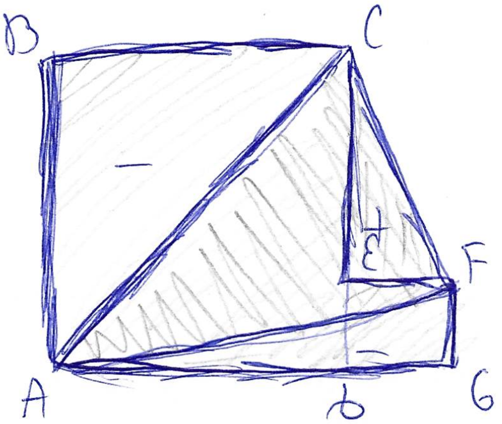


$S_{AMN_2F_2} < S_{AMN_1F_2}$



$2S_{\triangle ACF} = S_{AMNF}$

$S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$



$S_{ACF} = S_{ABCD} + S_{EFGD} - S_{ABC} - S_{AFG} + S_{CFE}$

№4

$$\frac{ab}{(1+a)(a+b)(b+8)} = max$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(1+a)(a+b)(b+8)}{ab} = min$$

$a = const$

$$\frac{(a+b)(b+8)}{b} = \frac{ab+8a+b^2+8b}{b} = a+\frac{8a}{b}+b+8 = \underline{\underline{b+\frac{8a}{b}}}+a+b$$

$b+\frac{8a}{b}$

$b = \frac{8a}{b}$

$b^2 = 8a$

$$\begin{cases} b^2 = 8a \\ a^2 = b \quad |^4 \end{cases}$$

$a^4 = 8a$

$\boxed{\begin{matrix} a = 2 \\ b = 4 \end{matrix}}$ Отв: $(2;4)$

$b = const$ $\frac{(1+a)(a+b)}{a} = \frac{a+b+a^2+ab}{a} = 1+\frac{b}{a}+a+b = \underline{\left(\frac{b}{a}+a\right)}+(1+b)$

$a^2 = b$

№5