

13-15-87-05
(150.2)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс В-1

Место проведения Ростов-на-Дону
город

Время: 13:42-

13:48

Рез

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори вершины горы!
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Терентьева Лёва Евгеньевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

« 6 » апреля 2025 года

Подпись участника

Рез

№1.

чистовик

85 (всего 85 мест)

$$\frac{20 \cdot 19}{2} = 190, \text{ в каждой игре разыграно}$$

3 очка, то есть очков суммарно $190 \cdot 3 = 570$.

Далее, заметим, что разность прогрессии равна 3, (т.к. у каждой команды число очков кратно 3), тогда у победившей очков больше 0, у 19-й — не менее 3, у команды, которая заняла место k — не менее $3(20-k)$, ~~суммарно~~ ~~игр~~ ~~не менее~~ а значит в сумме у них не менее $0+3+6+\dots+3 \cdot 19 = 570$, при этом разница достигается только в том случае когда у команды на месте k ровно $3(20-k)$ очков, а значит у второго места ровно $3 \cdot 18 = 54$ очка, также заметим, что это возможно, если каждая команда выиграла у тех и только тех команд, которые заняли место ниже.

Ответ: 54.

№3.

0000

(x-3)

образцы пер-во:

$$2 \log_2^2(x+3) + \log_3^2(x+8) \leq \log_3(x+3) + \log_2(x+8) - 2$$

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \log_2^2(x+3) \cdot \log_3^2(x+8) \leq \frac{\log_3(x+3)}{\log_3 2} \cdot \frac{\log_2(x+8)}{\log_2 3} - 2$$

Заметим, что $\log_2 3 \cdot \log_3 2 = 1$
неравенство имеет вид:

$$(\log_2(x+3) \cdot \log_3(x+8))^2 - 8 \cdot \log_2(x+3) \cdot \log_3(x+8) + 4 \leq 0$$

$$(\log_2(x+3) \cdot \log_3(x+8) - 4)^2 \leq 0$$

$\log_2(x+3) \cdot \log_3(x+8) = 4$, т.к. квадрат не может быть отриц.

Заметим, что при $x > -3 \Rightarrow x+8 > 5$,
а значит $\log_3(x+8) > \log_3(5) > 1$, при $x > -3$.
Разделим обе части на $\log_3(x+8) > 1$:

$$\log_2(x+3) = \frac{4}{\log_3(x+8)} \quad (*)$$

т.к. правая $y = \log_2(x+3)$ возр. при $x > -3$, то

$y = \log_3(x+8)$ - возр. при $x > -3$, то $y = \frac{4}{\log_3(x+8)}$
убыв. при $x > -3$.

А значит ур-о:

$$\log_2(x+3) = \frac{4}{\log_3(x+8)} \text{ имеет одно решение, но}$$

13-15-87-05
(150/2)

маленьку возр. и убыв. функции > 1 , пере-
се не пересекаются и это реш-ие очевидно
 $k \neq 1$. Проверка:

$$\log_2 4 = \frac{4}{\log_3 9} - \text{верно}$$

Ответ: $k = 1$

и ч.

Заметим, что $[\sqrt[3]{n}] = k$, тогда и только
тогда $k^3 \leq n < (k+1)^3$, когда $k^3 \leq n < (k+1)^3$, такими
образом наименьшее число, у которого $[\sqrt[3]{n}] = k$
— это k^3 , наибольшее — $(k+1)^3 - 1$, заметим,
что по $(25; 2025)$ только у двух случаев
 $[\sqrt[3]{n}] = 2$ — это 25 и 26, при чём 26 — это
А принадлежит только 26, Факел, для
каждого натурального $k \in [3; 14]$. Наименьшее
число, принадлежащее А — это k^3 , наибольшее:
 $(k+1)^3 - 1$, т.к. $(k+1)^3 - 1 = k(k^2 + 3k + 3)$, тогда
ка-бо таких чисел, то есть делителей
на k из отрезка $[k \cdot k^2; k \cdot (k^2 + 3k + 3)]$ — равно
 $k^2 + 3k + 3 - (k^2 - 1) = 3k + 4$. Для $k = 12$: наименьшее
число из множества А на $[25; 2025]$ это
 $12^3 = 1728$, а наибольшее — $12 \cdot 168 = 2016$
($12 \cdot 169 = 2028 > 2025$), то есть $2016 - 1728 = 288$,
также заметим, что $k > 1$ (т.к. $25 > 2^3 = 8$) и $k < 13$

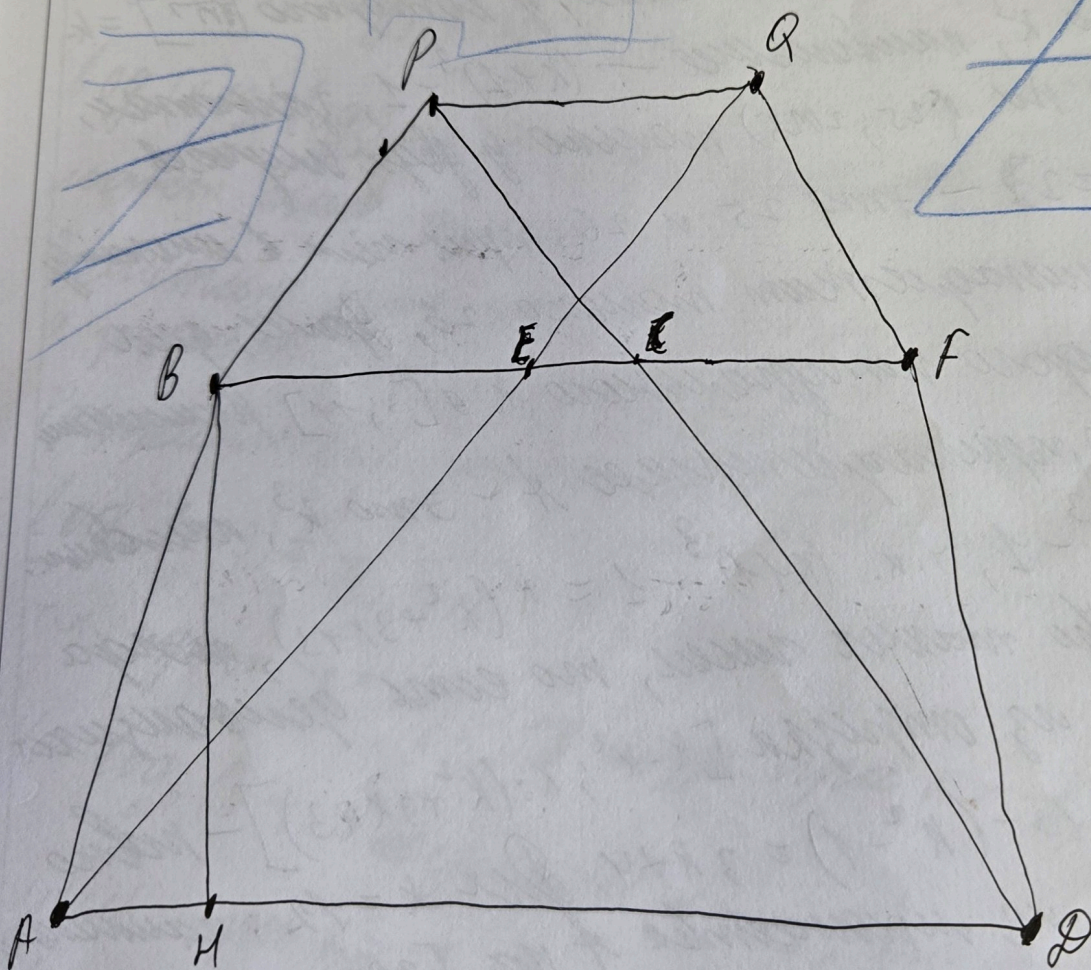
(т.е. $13^3 = 2197 > 2025$). Таким образом, какое-то число из множества A на отрезке $[25; 2025]$

Наблюд: $1 + (3 \cdot 3 + 4) + (3 \cdot 4 + 4) + \dots + (3 \cdot 11 + 4) \neq 25 =$
 $= 26 + 4 \cdot 9 + 3 \cdot (3 + 4 + \dots + 11) = 26 + 36 + 119 = 251$

Ответ: 251

22.

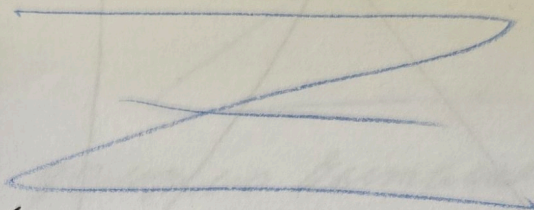
дано:
 $BN = 9$; $AD = 6$; $BE = EF = 2$
 $CE = 1$



Заметим, что если $ВСЕF$ лежат по разные стороны от отрезка AD , то расстояние от C до E не менее двух длин трапеции, т.е. есть $\Rightarrow B, E, C, F$ лежат на одной прямой. Если возможно 2 варианта:

1 пункт: $E \in BC$

2 пункт: $F \in BC$



Рассмотрим 1 вариант:

$$F \in BC \Rightarrow BF = EC = CF = 1 \Rightarrow BF = 3.$$

Пусть h - высота $ABPC$, т.к. $\triangle BPC$ подобен $\triangle APD$, то $\frac{AP}{BC} = \frac{h+8}{h} \Rightarrow \frac{6}{2} = \frac{h+8}{h} \Rightarrow h=4$.

Аналогично, если q - высота $\triangle EQF$, то $\triangle EQF$ подобен $\triangle APD$, то $q=4$, т.к. коэф. подобия равен $\frac{3}{2}$. Т.к.

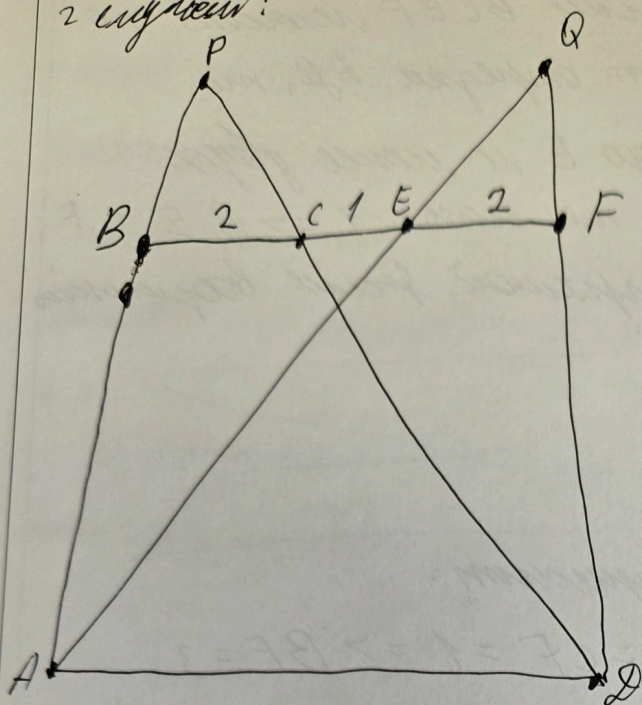
Т.к. $q=h=4$, то $BPCQF$ - трапеция ($QF \parallel PQ$), т.к. $PQ \parallel BE$, то $\triangle APQ$ подобен $\triangle ABE$:

$$\frac{PQ}{BE} = \frac{AP}{AB} = \frac{4h+8}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow PQ = \frac{3}{2} BE = \frac{3}{2}.$$

$$S_{APQD} = S_{ABFD} + S_{BPQF} = \frac{1}{2} (6+3) \cdot 8 + \frac{1}{2} \left(3 + \frac{3}{2}\right) \cdot 4 =$$

$$= 45$$

2 случая:



Рассуждая аналогично пункту 1:

h - высота $\triangle BPC$ и $h = 4$

q - высота $\triangle QEF$ и $q = 4$

$BPQF$ - трапеция.

$$\triangle APQ \sim \triangle ABE \Rightarrow \frac{PQ}{BE} = \frac{AP}{BA} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PQ = \frac{9}{2}$$

$$S_{APQF} = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} + 4 \right) \cdot 12 = 63$$

Ответ: 48 + 63

15.

перепишем исходное неравенство в виде:

$$\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x} \geq \frac{a}{2} \left(1 - \frac{2\sqrt{xy}}{x+y} \right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \right)^2 \geq \frac{a}{2} \left(\frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{x+y} \right)$$

$$\frac{(x-y)^2}{xy} \geq \frac{a}{2} \left(\frac{(x-\sqrt{y})^2}{x+y} \right)$$

т.к. неравенство должно выполняться при любых x и $y > 0$, тогда при $x \neq y$ можно разделить на $\frac{(x-y)^2}{x+y} \neq 0$:

$$\frac{a}{2} \leq \frac{(x-y)^2 (x+y)}{(xy)(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 (x+y)}{xy(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$$

$$\text{то есть } \frac{a}{2} \geq \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 (x+y)}{x+y} = \frac{4(x+y)}{\left(\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}} \right)^2} \leq \frac{4(x+y)}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}$$

по неравенству средних гармоническим и арифметическим.

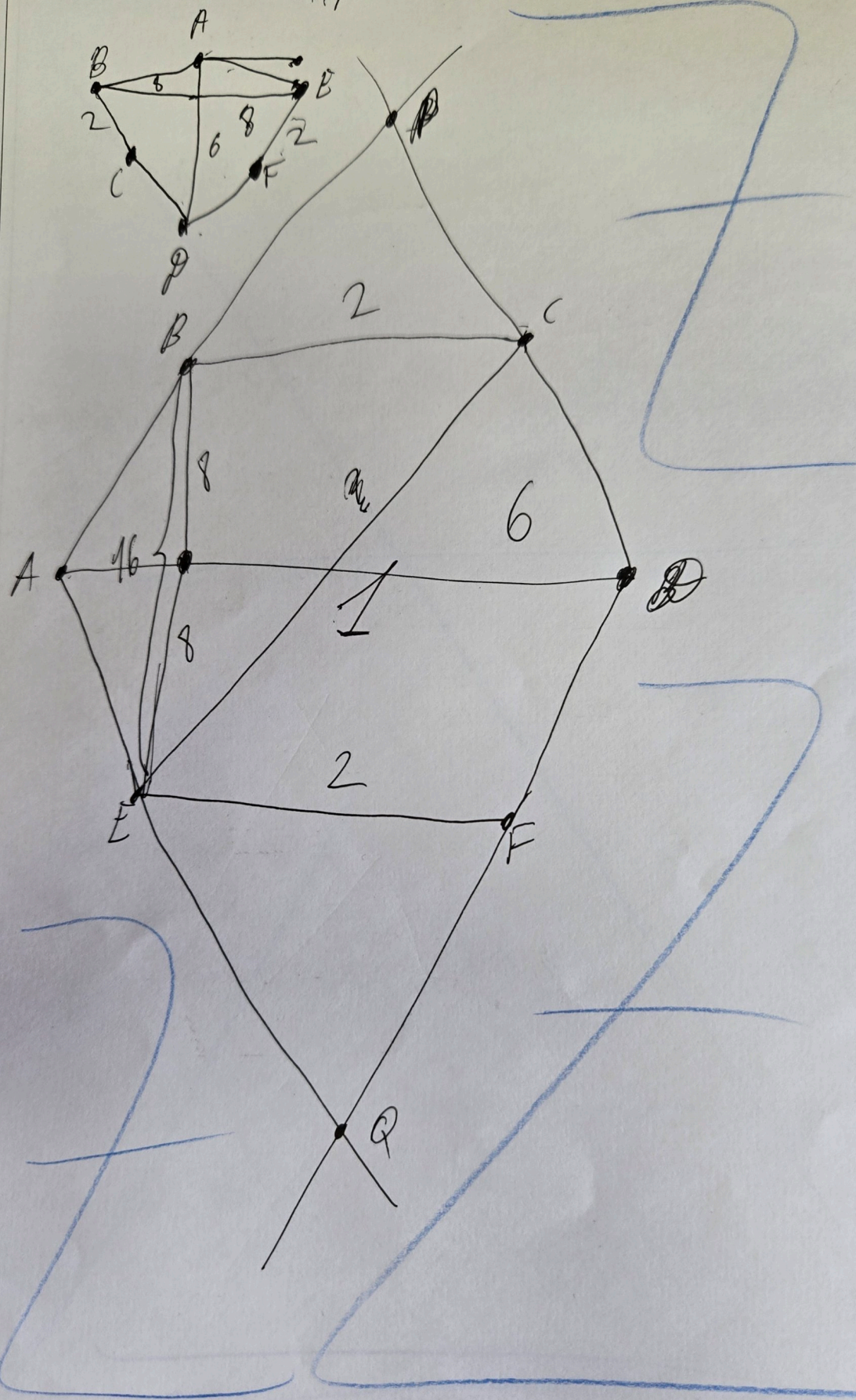
$$\frac{a}{2} \leq \frac{4(x+y)}{\sqrt{xy}} = 4 \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \right), \text{ заметим, что}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \geq 2 \text{ по проб. Коши.}$$

и т.к. наше неравенство должно выполняться при любых x и y

Отв.: $0 < a \leq 15$

черновик



черновик

$$2 \log_4^2(x+3) \cdot \log_9^2(x+8) \leq \log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) - 2$$

$$\frac{1}{8} \log_2^2(x+3) \cdot \log_3^2(x+8) \leq \log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) - 2$$

$$\begin{cases} x+3=4 \\ x+8=v \end{cases}$$

$$\frac{1}{8} \log_2^2 u \cdot \log_3^2 v \leq \log_3 4 \cdot \log_2 v - 2$$

$$\log_2 \left(\frac{1}{8} (\log_2(x+3) \log_3(x+8))^2 \right) \leq \dots$$

$$2 \log_2 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} (\log_2(x+3) \log_3(x+8)) \right) \leq \log_2(\log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) - 2)$$

$$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$$

$$\frac{2 \log_4^2(x+3) \cdot \log_9^2(x+8)}{\log_3 4 \cdot \log_2 9} \leq \frac{\log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) - 2}{\log_3 4 \cdot \log_2 9}$$

$$2 \log_4(x+3) = t$$

$$\frac{2t^2}{\log_3 4 \cdot \log_2 9} \leq \frac{t}{\log_2} - \frac{2}{\log_3 4 \cdot \log_2 9}$$

$$2t^2 + (\log_2 9 - \log_3 4)t + 2 \leq 0$$

$$t = \frac{\log_3 4 - \log_2 9 \pm \sqrt{\log_2^2 9 - 2 \log_2 9 \log_3 4 + \log_3^2 4 - 16}}{4}$$

черновики

$a; a-b; a-2b; a-3b; a-4b; a-5b; a-6b; a-7b; a-8b; a-9b; a-10b; a-11b; a-12b; a-13b; a-14b; a-15b; a-16b; a-17b; a-18b; a-19b$

$$\frac{19}{57}$$

54

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2} + 2 \quad \text{for } x=y=1: a \in \mathbb{R}$$

$$x+x+\frac{a}{2} \geq \frac{a}{2} + 2$$

$$2x + \frac{2a}{4} \geq \frac{a}{2} + 2 \quad \square \quad x=y, a \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x^2+y^2}{xy} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} + 1 \geq \frac{a}{2} + 2$$

$$\frac{2x^2}{2x} + \frac{a\sqrt{x}}{2x} + 1 \geq \frac{a}{2} + 2$$

