0 672565 650008

67-25-65-65
(135.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант В-2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Акимовой Александры Павловны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«06» апреля 2025 года

Подпись участника
Аким

90 (Дерипосто)

67-25-65-65 (1353)

№1. Гиановик

$n = 10$

Количество игр: $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$

$a = 2$

$$S = a \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 45 \cdot 2 = 90$$

1. x
2. $x+d$
3. $x+2d$

...

n. $x+(n-1)d$

$$nx + d \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

$$nx + d \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 90$$

$$10x + 45d = 90 \quad |:5$$

$$2x + 9d = 18$$

$d = 2 \quad x = 0$ $\qquad 0, 2, 4, \ldots, 16, 18$

$$2 \cdot 0 + 9 \cdot 2 = 18$$

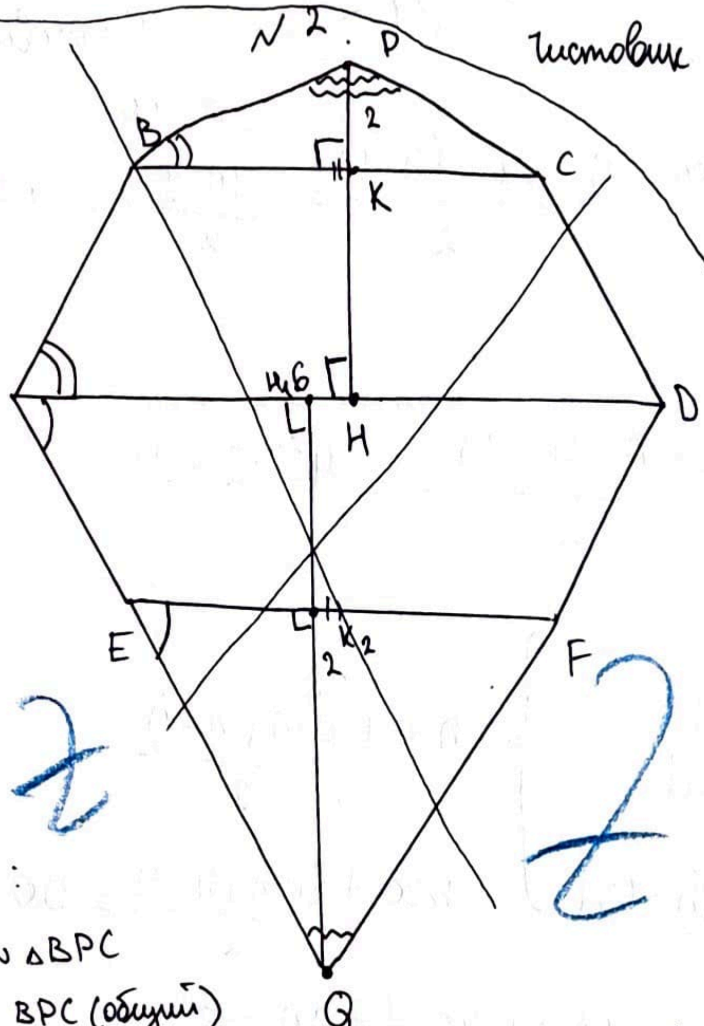
$$18 - 2 = 16$$

Ответ: 16 очков набрала команда, занявшая второе место.

№ 2. чистовик

Дано:
$AD = 6$
$BC = EF = 2$
$CE = 1$
$AB \cap CD = P$
$AE \cap DF = Q$
$H_{ABCD} = H_{AEFD}$

Найти:
S_{APQD} - ?



Решение:

1. $\triangle APD \sim \triangle BPC$
$\angle APD = \angle BPC$ (общий)
$\angle PAD = \angle PBC$ (как соответственные при ~~АР~~ $BC \parallel AD$ (основания трапеции параллельны между собой) и секущей AP.

$$\frac{BC}{AD} = \frac{BP}{AP}; \quad \frac{2}{6} = \frac{BP}{AP} = \frac{1}{3}$$

2. $\triangle AQD \sim \triangle EQF$
$\angle AQD = \angle EQF$ (общий)
$\angle DAQ = \angle FEQ$ (как соответственные при $AD \parallel EF$ (стороны трапеции параллельны между собой) и секущей AQ)

$$\frac{EF}{AD} = \frac{EQ}{AQ}; \quad \frac{2}{6} = \frac{EQ}{AQ} = \frac{1}{3}$$

См. продолжение решения задачи на стр. 4.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

67-25-65-65
(135.3)

чистовик

№3.

$$\log_2^2(x+2)\cdot\log_3^2(x+7)+16\leq 32\cdot\log_9(x+2)\cdot\log_4(x+7)$$

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x+7>0, \\ \log_2^2(x+2)\cdot\log_3^2(x+7)+16\leq 32\cdot\log_9(x+2)\cdot\log_4(x+7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2>0, \to x>-2 \\ x+7>0, \to x>-7 \end{cases} \Longrightarrow x>-2$$

$$(\log_2(x+2))^2\cdot(\log_3(x+7))^2+16\leq 32\cdot\log_{3^2}(x+2)\cdot\log_{2^2}(x+7)$$

$$(\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7))^2+16\leq 32\cdot\frac{1}{2}\log_3(x+2)\cdot\frac{1}{2}\log_2(x+7)$$

$$(\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7))^2+16\leq 32\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\log_3(x+2)\cdot\log_2(x+7)$$

$$(\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7))^2+16\leq 8\cdot\log_3(x+2)\cdot\log_2(x+7)$$

$$\log_a b\cdot\log_c d=\log_a d\cdot\log_c b$$

$$\Downarrow$$

$$\log_3(x+2)\cdot\log_2(x+7)=\log_3(x+7)\cdot\log_2(x+2)$$

$$(\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7))^2+16\leq 8\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7)$$

Замена: $\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7)=t$

$t^2+16\leq 8t \Rightarrow t^2+16-8t\leq 0 \Rightarrow t^2-8t+16\leq 0 \Rightarrow t^2-2\cdot t\cdot 4+4^2\leq 0$

$(t-4)^2\leq 0 \Rightarrow (t-4)^2=0 \Rightarrow t-4=0 \Rightarrow t=4$

Обратная замена: $t=\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7)$

$\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7)=4$

1. $x\in(-3;-2)$ $\varnothing$
2. $x=-2$ $\varnothing$
3. $x>-2$ $\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7)$

$\nearrow >0 \quad \nearrow >0$

$\nearrow >0\cdot\nearrow >0=\nearrow$

$\log_2(2+2)\cdot\log_3(x+2)=\log_2 4\cdot\log_3 9=2\cdot 2=4$

$x=2$

Ответ: 2.

3

чистовик $\qquad$ № 2 (продолжение).

3. Проведём высоту $\triangle$ ~~APD~~ PH в $\triangle APD$; $PH \cap BC = K$;

$\triangle APH$ - прямоугольный по определению.

Т.к. $BC \parallel AD$ (как основания трапеции), $PH \perp AD$, то $PH \perp BC$, следовательно, $\triangle BPK$ — прямоугольный по определению.

4. $\triangle BPK \sim \triangle APH$

$\angle BKP = \angle BHP = 90^0$

$\angle PBK = \angle PAH$ (как соответственные при $BC \parallel AD$ и секущей AP).

$\frac{BP}{AP} = \frac{PK}{PH}$; $\frac{1}{3} = \frac{PK}{PH}$; $PK = x$, $PH = KH + PK = KH + x$,

$KH = 16$ (по условию)

$PH = 16 + x \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{16+x}$

$16 + x = 3x$

$2x = 16$

$x = 8 \Rightarrow PH = 16 + 8 = 24$.

$S_{\triangle APD} = \frac{1}{2} \cdot PH \cdot AD =$

$= \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 6 = 72$

5. Проведём высоту QH_1 в $\triangle AQD$; $PH_1 \cap EF = K_2$

$\triangle AQH_1$ - прямоугольный по определению.

Т.к. $EF \parallel AD$ (как основания трапеции), $QH_1 \perp AD$, то $QH_1 \perp EF$, следовательно, $\triangle EQK_2$ - прямоугольный по определению.

См. продолжение решения задачи на стр. 6.

№ 4.

Множество A состоит из чисел n, которые кратны $[\sqrt[3]{n}]$, где $[\sqrt[3]{n}]$ - целая часть числа $\sqrt[3]{n}$.

Нужно найти количество чисел из отрезка $[36; 2025]$, принадлежащих множеству A. То есть нужно найти количество таких чисел n, которые есть среди чисел отрезка $[36, 2025]$. В первую очередь такими числами будут кубы чисел, а именно: 64, 125, 216, 329, 512, 729, 1000, 1221, 1728 (их всего 9 штук)

4

Чистовик

№6.

Дано:

$AB = 1$

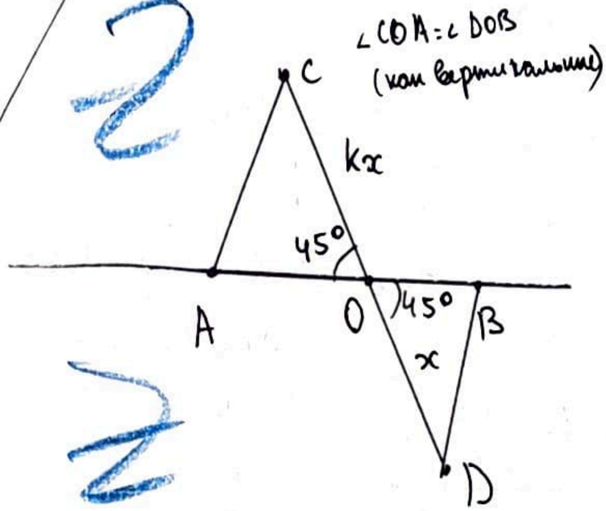
$CD = m$

$\frac{CO}{OD} = k = \frac{kx}{x}$

$\angle AOC = 45^\circ$

1) $AC \neq BD$

2) $AC = BD$



Решение:

1. Равенство $AC=BD$ будет выполняться только лишь в том случае, когда треугольники ACO и BDO равны, следовательно, должны быть равны отрезки CO и OD, тогда

$\frac{CO}{OD} = \frac{kx}{x} = 1 \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\Rightarrow k = \frac{1}{2} \cdot CD = \frac{1}{2} m$

То есть k всегда должно быть в 2 раза меньше, чем m, при этом $AO = BO = \frac{1}{2} = 0,5$.

Ответ: для любых пар чисел m и k, когда $m = 2k$, можно передвинуть отрезок AB по прямой l, чтобы выполнялось равенство $AC = BD$.

№2 (продолжение). Чистовик

6. $\triangle EQK_2 \sim \triangle AQH_1$

$\angle EK_2Q = \angle AH_1Q = 90^\circ$

$\angle K_2EQ = \angle H_1AQ$ (как соответственные при $AD \parallel EF$ и секущей AQ)

$\frac{EQ}{AQ} = \frac{K_2Q}{H_1Q}$; $\frac{1}{3} = \frac{K_2Q}{H_1Q}$; $H_1Q = K_2Q + H_1K_2$

$\triangle BPC \sim \triangle APD$

$\Downarrow$

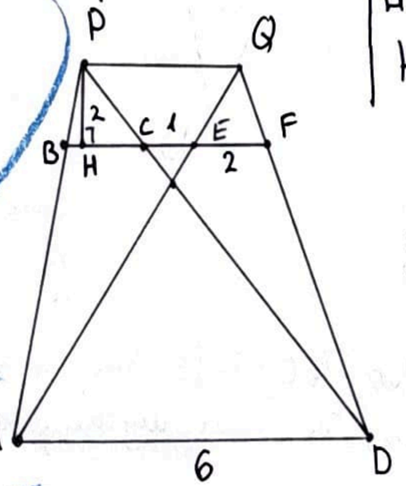
$\frac{PH}{PH+16} = \frac{2}{6} \Rightarrow PH = 8$

$K_2Q = y$

$H_1Q = y + H_1K_2$

$H_1K_2 = 16$ (по условию)

$H_1Q = y + 16$



$\frac{1}{3} = \frac{y}{y+16}$

$y + 16 = 3y$

$2y = 16$

$y = 8 \Rightarrow K_2Q = 8$

тогда $H_1Q = 8 + 16 =$

$= 24$

$S_{\triangle AQD} = \frac{1}{2} \cdot H_1Q \cdot AD$

$S_{\triangle AQD} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 6 = 72$

$\triangle APQ \sim \triangle ABE$

$\frac{3}{PQ} = \frac{16}{16+8} \Rightarrow PQ = \frac{9}{2}$

$\frac{\frac{9}{2}+6}{2} \cdot (16+8) = \boxed{126}$

7. $S_{APQD} = \cancel{S_{\triangle APD} + S_{\triangle AQD} = 72 + 72 = 144}$

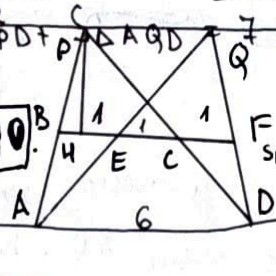
$\triangle PBC \sim \triangle PAD$

$\frac{PH}{PH+16} = \frac{2}{6} \Rightarrow PH = 8$

$\triangle ABE \sim \triangle APQ$

$\frac{1}{PQ} = \frac{16}{16+8} \Rightarrow PQ = \frac{3}{2}$

$S_{APQD} = \frac{\frac{3}{2}+6}{2} \cdot (8+16) = 90$



Ответ: $S_{APQD} = \boxed{90}$.

Черновик

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}169\\13\end{array}\\ \hline +\begin{array}{r}507\\169\end{array}\\ \hline 2197\end{array}$$

Чистовик

№ 5.

Нужно найти все положительные a, при каждом из которых существуют положительные x и y, не удовлетворяющие неравенству $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}\geqslant\frac{a}{2}+2$

Т.к. в неравенстве происходит деление на y и x, то можно было бы принять x и y за ноль, но они могут быть только положительными. Также в неравенстве происходит деление на (x+y). Нужно, чтобы сумма (x+y) равнялась нулю, но такого быть не может, так как числа x и y оба положительные, и в сумме дают положительное число. Подкоренное выражение x·y должно быть отрицательным, но произведение двух положительных чисел может быть только положительным. Тогда решим неравенство с совершенно обратным знаком, то есть $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}<\frac{a}{2}+2$ при a > 0, x > 0, y > 0.

см. продолжение решения задачи на стр. 8.

Чистовик №5 (продолжение).

$$\begin{cases} x>0, \\ y>0, \\ a>0, \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \dfrac{a}{2}+2 \end{cases} \Big| \cdot (y\cdot x\cdot 2\cdot(x+y))$$

$$\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2}+2 \qquad \frac{(x+y)^2-2xy}{xy}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2}+2$$

$$\cancel{x\cdot x\cdot 2(x+y)+y\cdot y\cdot 2(x+y)+a\sqrt{xy}\cdot 2xy < axy(x+y)+}$$

$$\cancel{+2(yx\cdot 2(x+y))} \qquad \frac{(x+y)^2}{xy}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2}+4$$

Пусть $x+y=t_1$; $\sqrt{xy}=t_2$, $t_1>0$, $t_2>0$

$$\cancel{2x^3+2x^2y+2xy^2+2y^3+a\sqrt{xy}\cdot 2xy < ax^2y+axy^2+}$$

$$\cancel{+4x^2y+4xy^2} \qquad \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2+a\left(\frac{t_2}{t_1}\right) \geq \frac{a}{2}+4 \qquad \frac{t_1}{t_2}=p$$

$$p^2+\frac{a}{p}-\frac{a}{2}-4 \geq 0 \quad p>0 \Rightarrow p^3+a-\left(\frac{a}{2}+4\right)p \geq 0$$

$$\cancel{2xy\cdot a\sqrt{xy}-ax^2y-axy^2 < -2x^3-2y^3+2x^2y+2xy^2}$$

По теореме Безу:

$p=2$

$2\cdot p^3-(a+8)\cdot 2+2a=0$

$$\cancel{xy(2a\sqrt{xy}-ax-ay) < xy}$$

$$\cancel{a(2xy\sqrt{xy}-x^2y-xy^2) < -2x^3-2y^3+2x^2y+2xy^2}$$

$$\cancel{a < \frac{-2x^3-2y^3+2x^2y+2xy^2}{2xy\sqrt{xy}-x^2y-xy^2}}$$

см. далее

~~Ответ:~~ $\cancel{a \in \left(0; \frac{-2x^3-2y^3+2x^2y+2xy^2}{2xy\sqrt{xy}-x^2y-xy^2}\right)}$.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

№4

$n: \sqrt[3]{n}$

$[\sqrt[3]{1}] = 1$, $[\sqrt[3]{2}] = 1, \dots$ $[\sqrt[3]{64}] = 4, \dots$ $[\sqrt[3]{125}] = 5$

$[\sqrt[3]{8}] = 2, \dots, [\sqrt[3]{27}] = 3$, Оценим, какие числа входят в A:

$n \in [1;7]$ - все 7 чисел $n \in [8, 26]$ - четные $\Sigma_1 = \frac{26-8}{2} + 1 = 10$

$n \in [8;26]$ - четные $\Sigma_2 = \frac{63-27}{3} + 1 = 13$ $n \in [27, 63]$ $\Sigma_3 = \frac{124-64}{4} + 1 = 16$

$n = 3k_1$ $n \in [64;124]$ $n = 4k_2$

$n \in [125;215] \Rightarrow n = 5k_3$ $\Sigma_4 = 19$

$n \in [216;342]$ $\Sigma_5 = 22$ $n \in [343;511]$ $\Sigma_6 = 25$ $n \in [512;728]$ $\Sigma_7 = 28$

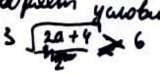
$n \in [729;999]$ $\Sigma_8 = 31$ $n \in [1000;1330]$ $\Sigma_9 = 34$ $n \in [1331;1727]$ $\Sigma_{10} = 37$

$n \in [1728;2025]$ $\Sigma_{11} = 25$

$\Sigma = 10 + \Sigma_3 + \dots + \Sigma_{11} = 247$ Ответ: 247.

№5.

продолжение



$2p^3 - (a+8)p + 2a \,|\, p-2$

$-2p^3 - 4p^2 \quad | \; 2p^2 + 4p - a$

$4p^2 - (a+8)p$

$-4p^2 - 8p$

$(-a-8+8)p + 2a$

$ap + 2a$

0

$p_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{2a+4}}{2} - 1$ не удовлетворяет условию следовательно,

$\frac{\sqrt{2a+4}}{2} - 1 > 2$ $\frac{\sqrt{2a+4}}{2} > 3$ $\sqrt{2a+4} > 6$ $2a+4 > 36$

$2a > 32$

$a > 16$ Ответ: $a \in (16; +\infty)$.

10