0736186240007

73-61-86-24
(136.1)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант В-3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ковальчука Владислава Константиновича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1 11:59 Melz

Дата

«06» апреля 2025 года

Подпись участника

Черновик:

№1) • всего команд - 12

• каждая команда играла со всеми остальными по одному разу

• За выигрыш начисляют 3 очка

• За проигрыш - 0 очков

• Очки, набранные командами, образуют убывающую арифметическую прогрессию.

Найти: сколько очков набрала команда, занявшая 2-ое место?

Всего матчей: $\frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\cancel{12}^{6} \cdot 11}{\cancel{2}_{1}} = 66.$

Так же, ничьих в волейболе нет.

Пусть a - 3 очка, начисленные за выигрыш.

Пусть x - 0 очков, начисленные за проигрыш. $\Rightarrow$ чтобы занять 1-ое место, нужно выиграть все (~~12~~ матчи.)

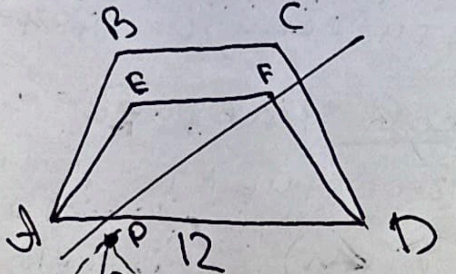
- команды: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 $\Rightarrow$

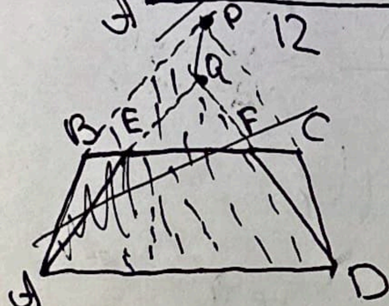
$\Rightarrow$ что бы ~~нужно~~ занять 1-ое, нужно выиграть 11 матчей, а чтобы занять 2-ое место, нужно дойти до финала, т.е. выиграть 10 матчей, и финал проиграть.

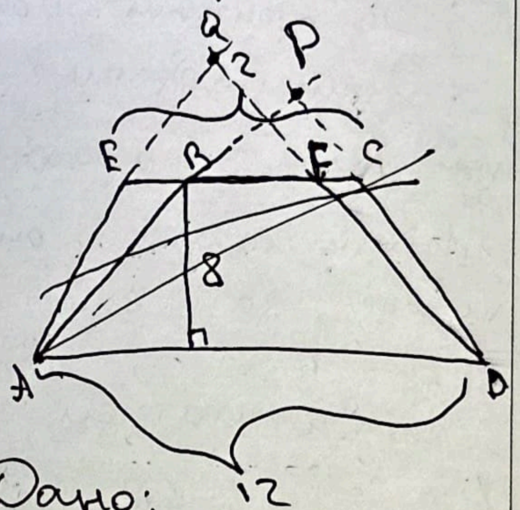
Черновик:

№1) => за 10 выигранных матчей. команда получает 30 очков, а за проигранный матч в финале 0 очков => команда, занявшая 2-ое место набрала 30 очков.

№2)



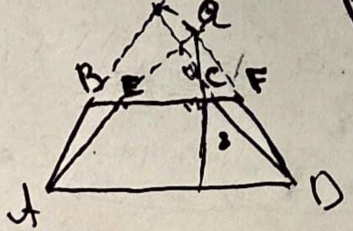


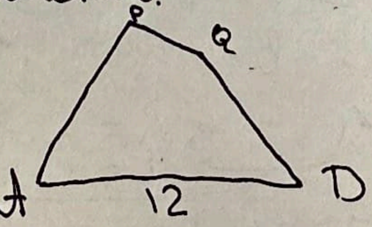


Дано:
- ABCD и AEFD – Трапеции.
- AD – общее основание., $h = 8$
- $BC = EF = 4$
- $CE = 2$

Найти: площадь APQD-?

Решение.





$S_{\triangle APD} =$
$= S_{\triangle AQD} =>$
ср. линия

$= 6$

2

Черновик:

№3) $2\log_4^2(3-x)\cdot\log_9^2(8-x)\le\log_3(3-x)\cdot$

$\cdot\log_2(8-x)-2$

ОДР: $\begin{cases}3-x>0\\8-x>0\end{cases}$ $\begin{cases}x<3\\x<8\end{cases}$ Итоговое ОГР: $\boxed{x<8}$

$2\cdot\frac{1}{\cancel{4}}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}\log_2^2(3-x)\cdot\log_3^2(8-x)\le\log_3(3-x)\cdot\log_2(8-x)-2$

Пусть $\log_2(3-x)\cdot\log_3(8-x)=t$, тогда $\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{1}{8}t^2\le t-2\;|\cdot8$

$\cancel{(t-4)(t-4)\le0}$

$\cancel{t^2-4t-4t+16\le0}$

$t^2-8t+16\le0$

$t^2\le8t-16$

$t^2-8t+16\le0$ $\cancel{|\cdot8}$

$\cancel{D}$ $t_1=4$ $t_2=4\Rightarrow$

$\Rightarrow\cancel{(t-4)^2\le0}$ $\cancel{t^2-4^2\le0}$

Обр. замена: $\cancel{(\log_2(3-x)\cdot\log_3(8-x)-4)}$

$(\log_2(3-x)\cdot\log_3(8-x)-4)(\log_2(3-x)\cdot\log_3(8-x)-4)\le0$

-1 2 $\cdot$ 2 -4

$+$ $-$

-1 8 x

$x=-1$

$\cancel{x\in[-1;8)}$

с учётом итогового

ограничения.

Черновик:

№4) ~~№4~~

• Множество A состоит из натуральных чисел $\underline{n}$.

• числа $\underline{n}$ делятся на $[\sqrt[3]{n}]$

• $[x]$ - целая часть числа $\underset{\sim}{x}$, т.е. наибольшее целое число, не превышающее $\underset{\sim}{x}$.

Найти:

Количество чисел из отрезка $[16, 2025]$, принадлежащих множеству A.

$$\frac{n}{\sqrt[3]{n}}$$

№5) $$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}\geq$$

$\geq a+2$

$$-2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}\geq a \qquad a\leq$$

Чистовик:

№1) • Всего команд - 12

• Каждая играла со всеми по 1-му разу

• За выигрыш - 3 очка.

• За проигрыш - 0 чков.

продолжение №1):

Найти: сколько очков набрала команда, занявшее 2-ое место.

Что бы занять 1-ое место, нужно выиграть все матчи:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 => т.е. 11 матчей

Тогда, для того что бы занять 2-ое место, нужно дойти до финала и проиграть его => выиграть 10 матчей и проиграть 1 матч. Тогда, команда занявшее 2-ое место набирает 30 очков.

Ответ:

№5) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a+2$

$a-?$

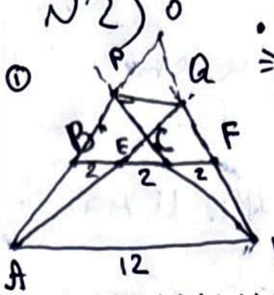
$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$

$$a \leq \frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}-2$$

$$a \leq \frac{x^2(x+y)+y^2(x+y)+2ayx\sqrt{xy}-2yx(x+y)}{yx(x+y)}$$

Чистовик: Решение: По обратной теореме Фалеса $PQ \parallel AD$:

№2)



- $BPC \sim APD \Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{h}{h+8} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{h}{h+8} \Rightarrow h = 4$
- $\triangle ABE \sim \triangle APQ \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{2}{PQ} = \frac{8}{12}$ $PQ = 3$
- $S_{APQD} = \frac{3+12}{2} \cdot 12 = 90$

Дано:

$ABCD$ - трапеция

$AEFD$ - трапеция

$AD = 12$

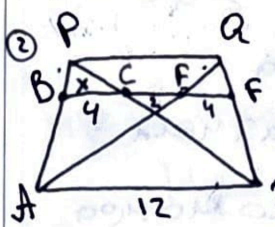
~~$h = 8$~~

$BC = EF = 4$

$CE = 2$

Найти:

S_{APQD} - ?



- $\triangle BPC \sim \triangle APD \Rightarrow \frac{x}{x+8} = \frac{4}{12} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{x}{x+8} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 4$
- $\triangle ABE \sim \triangle APQ$ $\frac{6}{PQ} = \frac{8}{8+4}$ $PQ = 9$
- $S_{APQD} = \frac{9+12}{2} \cdot 12 = 126$

Решение:

1) Рассмотрим $\triangle APD$ и AQD, осн. AD - общ. $\Rightarrow$
~~(ср. линия 6) (т.к. AD = 12 по усл.)), значит~~
~~ср. линии $\triangle APD$ и AQD - равны между~~
~~собой~~

2) Рассмотрим трапецию $ABFD$, $h = 8$ (по усл.)

3) $BF = 6$ (из $\triangle AQD$)

Ответ: $S_{APQD} = 126$ и 90

Ответ:

6

Чистовик: $\boxed{\log_3(3-x)\cdot\log_2(8-x)=\log_2(3-x)\cdot\log_3(8-x)}$ - формула

№3) $2\log_4^2(3-x)\cdot\log_3^2(8-x)\le\log_3(3-x)\cdot\log_2(8-x)-2$

ОГР: $\begin{cases}3-x>0\\8-x>0\end{cases}$ $\begin{cases}x<3\\x<8\end{cases}$ $\boxed{x<8}$

Пусть $\log_2(3-x)\cdot\log_3(8-x)=t$, тогда - замена.

$2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\log_2^2(3-x)\cdot\log_3^2(8-x)\le\log_3(3-x)\cdot\log_2(8-x)-2$

Замена:

$\frac{1}{8}t^2<t-2\,|\cdot8$

$t^2\le8t-16$

$t^2-8t+16\le0$

$\cancel{(t-4)(t-4)\le0}$ $(t-4)^2\le0$

$+$ $+$

4 t

$t=4$

Обратная замена:

$\log_2(3-x)\cdot\log_3(8-x)=4$

Ответ:

$x=-1$

Ответ:

Чистовик:

№4) • A состоит из натуральных чисел $\underline{n}$.

• Числа n делятся на $[\sqrt[3]{n}]$

• $[x]$ - целая часть, т.е. наибольшее целое число, не превышающее x

Найти: кол-во чисел из отрезка $[16, 2025]$, принадлежащих множеству A.

$n \vdots \sqrt[3]{n}$

$[\sqrt[3]{1}]=1$, $[\sqrt[3]{2}]=1$, ... $[\sqrt[3]{8}]=2$, ... $[\sqrt[3]{27}]=3$, $[\sqrt[3]{64}]=4$, $[\sqrt[3]{125}]=5$. Оценим, какие числа входят в A: $n \in [1,7]$ - все 7 чисел. $n \in [8,26]$ - чётные $\sum_1 = \frac{26 \cdot 8}{2} + 1 = 10$; $n \in [27,63]$ - $n = 3k_1$ $\sum_2 = \frac{63-27}{3} + 1 = 13$

$n \in [\cancel{100}\ 64, \cancel{215}\ 124] \Rightarrow n = 4k_2$ $\sum_3 = \frac{127-64}{4} + 1 = 16$; $n \in [125, 215] \Rightarrow n = 5k_3$ $\sum_4 = 19$

$n \in [216, 342]$ $\sum_5 = 22$; $n \in [343, 541]$ $\sum_6 = 25$; $n \in [512, 728]$ $\sum_7 = 28$; $n \in [729, 999]$ $\sum_2 = 31$; $n \in [1000; 1330]$ $\sum_9 = 34$;

$n \in [1331; 1727]$ $\sum_{10} = 37$; $n \in [1728, 2025]$ $\sum_{11} = 25$

$\sum = 6 + \sum_2 + \ldots + \sum_{11} = 256$

Ответ: 256

Ответ:

Черновик:

№4) $A = n$

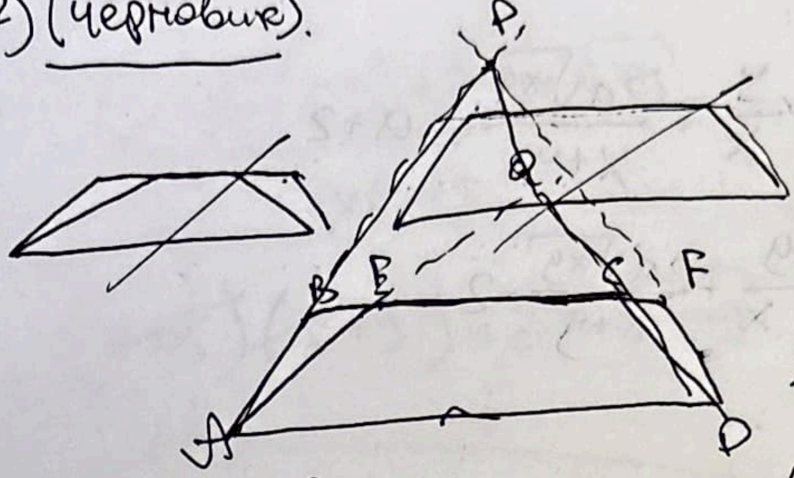
n ~~могут~~ дел. на $[\sqrt[3]{n}]$

№5) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a+2 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

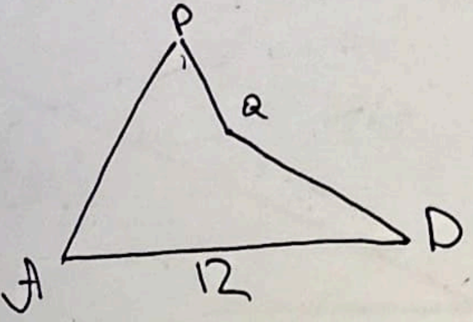
$a \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} -$

8 $\qquad -2$

№2) (черновик).



$BC = EF =$
$= 4$
$CE = 2$



№1) 12 команд 11 матчей - для выигрыша нужно победить, за каждый выигранный матч дают 3 очка, за проигранные 0, => ~~1-ое место~~ для первого места нужно набрать 33 очка, а для второго 30 очков (т.к. финал команда проигрывает, а за проигрыш дают 0 очков)

№3) $2\log_4^2(3-x)\cdot\log_5^2(8-x) \le \log_3(3-x)\cdot$
$\cdot\log_2(8-x)-2$

ОДЗ: $\begin{cases} 3-x>0 \\ 8-x>0 \end{cases}$ $\cancel{x\geq}\, x<8$

9

Чистовик:

№5) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}\geq a+2$

$$\begin{cases} a\leq \frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}-2 \\ \begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ:

Черновик: $a\leq \frac{x^2(x+y)+y^2(x+y)+2ayx\sqrt{xy}-2yx(x+y)}{yx(x+y)}$

$$a\leq \frac{x^3+yx^2+y^2x+y^3+2ayx\sqrt{xy}-2yx^2+2y^2x}{yx(x+y)}$$

$$x^3+y^3+yx^2+y^2x+2ayx\sqrt{xy}-2yx^2-2y^2x$$

$$x^3+y^3-yx^2-y^2x+2ayx\sqrt{xy}$$

$$x^2(x-y)+y^2(y-x)+2ayx\sqrt{xy}$$

10

Черновик:

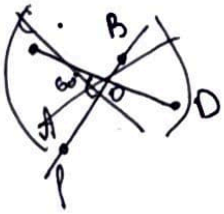
$$\frac{\cancel{x}^2(x+y)+y^2(x+y)+2ayx\sqrt{xy}}{yx(\cancel{x+y})}$$

$$(\cancel{x+y})(\cancel{x}^2+y^2)+2\cancel{ayx\sqrt{xy}}$$

$(x-$

Чистовик:

№5)



~~Дано: AB=1~~
~~CO·OD=k~~
∠AOC=60°
~~AC≠BD~~
Найти:
для ~~каких~~ пар
чисел m и k отрезок
~~AB можно~~ передвинуть
по прямой p так
чтобы AC=BD

Решение:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}\geq a+2$$

$$\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}\geq a+2$$

$$\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}\geq a+2$$

$$\frac{(x+y)^2}{xy}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}\geq a+4$$

Пусть $x+y=t_1>0$; $\sqrt{xy}=t_2>0$

$$\frac{t_1^2}{t_2^2}+\frac{2at_2}{t_1}\geq a+4$$

$\frac{t_1}{t_2}=p \Rightarrow p^2+\frac{2a}{p}-a-4\geq 0$; $p>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p^3+2a-(a+4)p\geq 0$

Проверим по т. Безу:

$p=2 \Rightarrow 8-2a-8+2a=0$

$$\begin{array}{l|l} p^3+0p^2-(a+4)p+2a & p-2 \\ \hline -\,p^3-2p^2 & p^2+2p-a \\ \quad 2p^2-(a+4)p & \\ \quad -\,2p^2-4p & \\ \qquad -(-a-4+4)p+2a & \\ \qquad -\,-a\,p+2a & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$\Downarrow$

$(p-2)(p^2+2p-a)\geq 0$

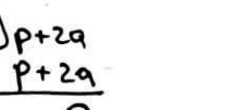
$p_1=-\sqrt{a+1}-1$

$p_2=\sqrt{a+1}-1$

$\sqrt{a+1}-1\leq 2$

$a+1\leq 9$

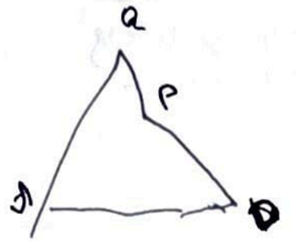
$a\leq 8$



Ответ: $a\in(0;8]$

11

Черновик:



№3) $2\log_4^2(3-x)\cdot\log_3^2(8-x)\le\log_3(3-x)\cdot\log_2(8-x)-2$

ОГР: $\begin{cases}3-x>0\\8-x>0\end{cases}$ $\Rightarrow$ итог: $x<8$

$2\log_{2^2}^2(3-x)\cdot\log_{3^2}^2(8-x)\le\log_3(3-x)\cdot\log_2(8-x)-2$

$2\cdot\frac{1}{4_2}\cdot\frac{1}{4^2}(3-x)\cdot\log_3^2(8-x)\le\log_3(3-x)\cdot\log_2(8-x)-2$

$\frac{1}{8}\log_2^2(3-x)\cdot\log_3^2(8-x)\le\log_3(3-x)\cdot\log(8-x)-2$

$\log_2^2(3-x)\cdot\log_3^2(8-x)\le 8\cdot(\log_3(3-x)\cdot\log(8-x))-16$

Пусть $\log_2(3-x)\cdot\log_3(8-x)=t$, тогда $\Rightarrow$

$\Rightarrow t^2\le 8t-16$

$t^2-8t+16\le 0$

$(t-4)^2\le 0$

~~$(t-4)^2$~~

$+$ 4 $+$ t

$t=4$

Обр. замена: $\log_2(3-x)\cdot\log_3(8-x)=4$

$x=-1$

12

Черновик:

№3)

$2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\log_2^2(3-x)\cdot\log_3^2(8-x)\le\log_3(3-x)\cdot$

$\cdot\log_2(8-x)-2$

Пусть $\log_2(3-x)\cdot\log_3(8-x)=t$, тогда

$\Rightarrow\ \frac{1}{8}t^2\le t-2\,|\cdot 8$

$t^2\le 8t-16$

$t^2-8t+16\le 0$ $\quad t=4$

$(t-4)(t-4)\le 0$ $\quad$ t=4

Обратная замена: $(\log_2(3-x)\cdot\log_3(8-x)-4)$

$\cdot(\log_2(3-x)\cdot\log_3(8-x)-4)\le 0$

$2 \quad 2 \quad -4$

0

$+$ $\quad -1 \quad 8 \quad x$

$x=-1$ – подбором

С учётом ОГР: $+$ $\ -$ $\quad -1 \quad 8 \quad x$ $\quad \cancel{x\in}$

$x\in[-1;8)$.

№4) • A состоит из натуральных чисел n числа n делятся на $[\sqrt[3]{n}]$ • $[x]$ - целая часть

Черновик:

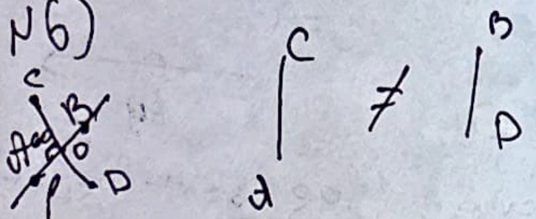
№4, Т.е. наибольшее целое число не превышающее x.

Найти: кол-во чисел из отрезка [16, 2025]

Принадлежащих множеству A

$$\frac{x^2(x+y)+y^2(x+y)+2ayx\sqrt{xy}-2yx(x+y)}{yx(x+y)}$$

N6)



$$x^3+yx^2+y^3+xy^2+2ayx\sqrt{xy}-2yx^2-2y^2x$$

$$x^3+y^3+yx^2-y^2x+2ayx\sqrt{xy}$$

$$\frac{x^2(x+y)+y^2(y+x)+2ayx\sqrt{xy}}{yx\cancel{(x+y)}}$$

$$\frac{\cancel{(x+y)}(x^2+y^2)+2a\cancel{yx}\sqrt{xy}}{\cancel{yx}}$$

$$(x+y)(y+x)+2ayx\sqrt{x+y}$$

$\cancel{(x+y)}$ $x^2+y^2+2a\sqrt{xy}\ge a$

$x^2+y^2\ge$