

+1 мст 11:59 Мелу

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы
наименование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Ковальчук Ульяны Григорьевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«06» апреля 2025 года

Подпись участника

n1

90 (Десять) ~~АК~~ — Черновик.

УЧАСТВОВАЛО - 15 команд

2 место - ?

каждая по 1 разу

ВЫИГРЫШ - 2 очка

ПРОИГРЫШ - 0 очков

Пусть набранные командами очки образуют

арифметическую прогрессию : $a_1 ; a_2 \dots a_n$

$$d = \frac{n(n-1)}{2}$$

x - убывающая.

n - ~~коэф.~~ коэффициент набранных очков

d - количество сыгранных матчей волейбольными командами

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_n
Победа 2 0 проигрыш	2 0	2 0	2 0	2 0	2 0	2 0

Узнать, сколько очков набрала команда (2 место).

a_n	...	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
Победа 2 0 проигрыш		2 0	2 0	2 0	2 0	2 0	2 0

1. + 2

3. 0

6. + 2

2/0

8. 0

2. 0

4. + 2

7. 0

n. + 2/0

← убывающая
1

№ 2

Черновик

Даны 2 трапеции $ABCD$ и $ADEF$

основание = 12 (AD)

Высота = 16

$BC = EF = 4$

расстояние между C и $E = 2$

продолжения боковых сторон

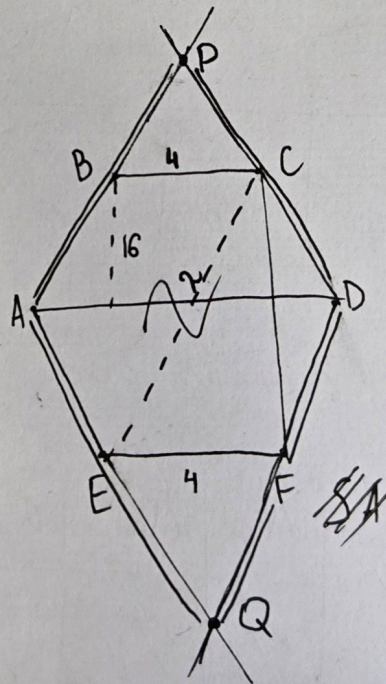
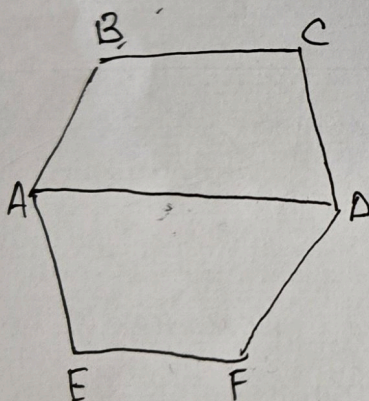
Продолжения боков. сторон. AB и CD

пересекаются в P

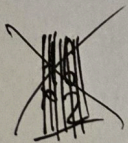
Продолжения боков. сторон. AE и DF

пересекаются в Q

Найти S четырехг. $APQD$



$S_{APQD} = ?$



т.к. $\square ABCD$ и $\square ADEF$ имеют общ. сторону

и имеют одинаковые стороны BC и EF

(основание)

$\Rightarrow$ стороны AB ; CD ; AE и DF равны.

96-16-44-64
(137.3)

N 3

$$\log_3(2-x) \cdot \log_2(7-x) = \log_2(2-x) \cdot \log_3(7-x) \quad \text{Чистовик}$$

$$\cdot \log_2^2(2-x) \cdot \log_3^2(7-x) + 16 \leq 32 \cdot \log_3(2-x) \cdot \log_4(7-x)$$

Замена переменной: $\log_2(2-x) \cdot \log_3(7-x) = t$

$$\log_2^2(2-x) \cdot \log_3^2(7-x) + 16 \leq 32 \cdot \frac{1}{2} \log_3(2-x) \cdot \frac{1}{2} \log_2(7-x)$$

$$t^2 + 16 \leq 8t$$

$$t^2 - 8t + 16 \leq 0$$

$$(t-4)^2 \leq 0$$

$$(t=4)$$

$$\log_2^3(2-x) \cdot \log_3^3(7-x) = 4$$

$$\log_3(7-x) > 0$$

$$\log_2(2-x) > 0$$

$$\log_2^2(2-x) + 16 = 32 \cdot \log_3(2-x) \cdot \log_2(7-x)$$

$$1) 1 < x < 2$$

$$\log_2(2-x) < 0$$

$$\log_2^2(2-x) \cdot \log_3^2(7-x) + 16 = 32 \cdot \log_3(2-x) \cdot \log_2(7-x)$$

$$2) x < 1 \quad \log_2(2-x) > 0$$

$$\log_2^2(2-x) \cdot \log_3^2(7-x) + 16 = 32 \cdot \log_3(2-x) \cdot \log_2(7-x)$$

В силу монотонности логарифма

$$\log_2(2-x) > 0$$

единственный корень $x = -2$

$$\log_2(2-x) > 0$$

$$\log_2(2-x) > 0$$

Ответ: -2

Черновик

$$\begin{array}{r} 49 \cdot 3 \\ \hline 147 \\ 98 \\ \hline 245 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$49 - 2491$$

$$2025 - 410025$$

$$\begin{array}{r} 2025 \\ \times 2025 \\ \hline 10125 \\ 40500 \\ 00000 \\ \hline 410025 \end{array}$$

Пусть натуральные числа $n < 2025$

$$\begin{array}{r} 85 \\ \times 5 \\ \hline 425 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 105 \\ \times 405 \\ \hline 05 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 405 \\ \times 405 \\ \hline 2025 \\ + 000 \\ \hline 1620 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2025 \\ - 20 \\ \hline 025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 2025 \end{array}$$

н4

$$\begin{array}{r} 1620 \\ + 2025 \\ + 000 \\ \hline 164025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 405 \\ \times 405 \\ \hline 2025 \\ + 000 \\ \hline 1620 \end{array}$$

Тогда, наибольшее $n < 2025$

~~A - множество, состоит из nat. n : на $\sqrt[3]{n}$~~

~~x - целая часть от числа x (не превышает x - наибольшее)~~

~~Найти кол-во чисел $[49, 2025] \in A$~~

$$\begin{array}{r} 2025 \\ \times 45 \\ \hline 91125 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{n} = x \cdot x \cdot x = n$$

№5

ЧерновикНайти все положительные a при каждом
существуют x и y .

! не удовлетворяющие!

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a+2$$

$$\frac{x^x}{y} + \frac{y^y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a+2 \quad | \cdot (x+y)$$

$$x^2 + y^2 + 2a\sqrt{xy} \geq \cancel{ax+ay} (a+2)(x+y)$$

$$x^2 + y^2 + 2a\sqrt{xy} \geq ax + ay + 2x + 2y$$

$$x^2 - ax - 2x + 2a\sqrt{xy} = -y^2 + ay + 2y$$

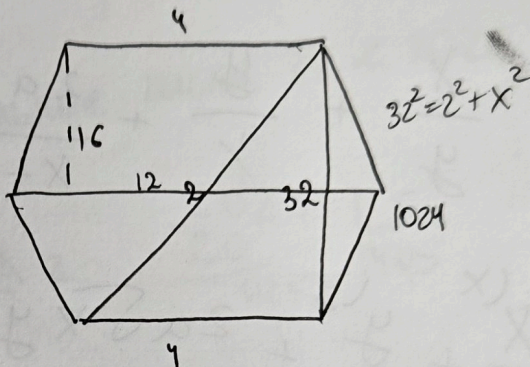
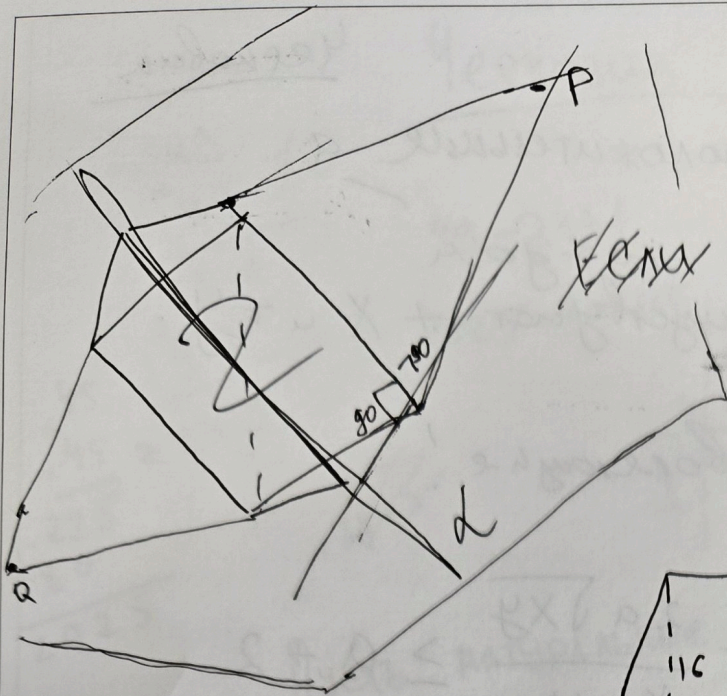
$$\cancel{b^2 + 2ab} - \cancel{a + 2ab} \neq \cancel{b} \neq \emptyset$$

 a - положительные b -

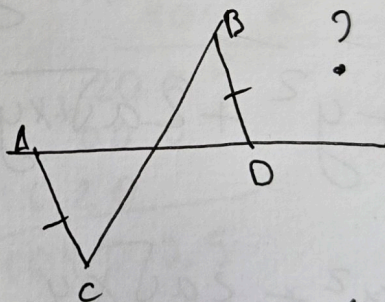
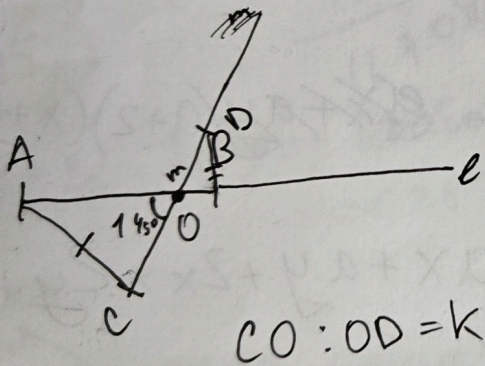
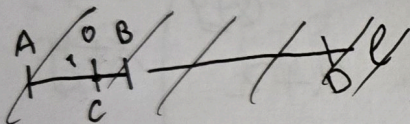
$$x^2 - bx - 2x + 2b\sqrt{xy} = -y^2 + by + 2y$$

Черновик

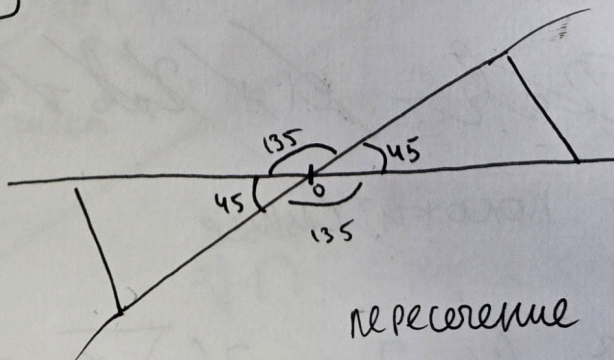
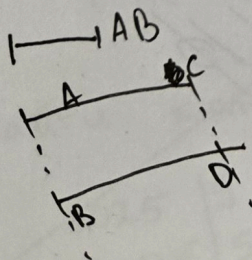
~~Если вы хотите перевернуть~~



N6



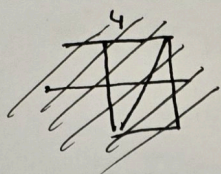
Как нужно перевернуть AB (по меньшей)
чтобы $AC = BD$



пересечение в
точке O (не может быть в B)

6

Черновик

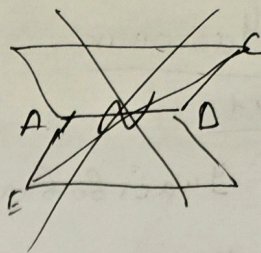


$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 32 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\frac{96}{10.24} = 4 + x^2$$

$$x = \sqrt{1024 - 4}$$

$$x = \sqrt{1020}$$



$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 14 \\ \hline 60 \\ 15 \\ \hline 210 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 420 \\ - 30 \\ \hline 120 \\ - 120 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 84 \\ \hline 120 \end{array}$$

- 15 команд

Дополнительно

111 - всего матчей.

$$20 + 15 + 20 + 26$$

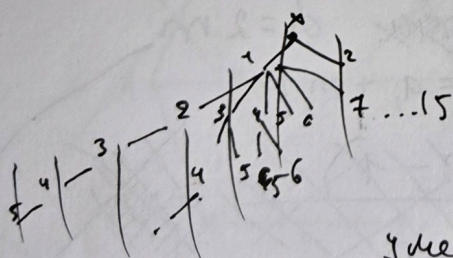
$$+ 20 + 16$$

$$80 + 15 + 16 =$$

$$95 = 111$$

$$14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6$$

$$+ 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = (15)$$



уменьш. на 1 командой

1 - 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 (14)

2 - 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 (13)

3 - 4, 5, 6 (12)

4 - 5, 6, 7 (11)

5 - (10)

6 - 9

7 - 8

8 - 7

9 - 6

10 - 5

11 - 4

12 - 3

13 - 2

14 - 1

15 - 0

Чистовик

№1

Участвовало - 15 команд (всего)

каждая по 1 разу

выигрыш - 2 очка (проигрыш 0)
(написываются)

Пусть, набранные командами очки

образуют арифметическую прогрессию (убывающая):

^{первая} $a_{15}; \dots; a_6; a_5; a_4; a_3; a_2; a_1$ ^{последн.}

~~коэффициент~~ ~~набранных~~ ~~проигрыш~~
~~всего очков:~~ $2 \cdot \frac{15 \cdot 14}{2} = 15a_1 + d \cdot \frac{15 \cdot 14}{2}$

~~коэффициент~~ ~~набранных~~ ~~проигрыш~~
~~всего очков:~~ $2 \cdot \frac{15 \cdot 14}{2} = 15a_1 + 2m \cdot \frac{15 \cdot 14}{2} \Rightarrow 14 = a_1 + m \cdot 14$

~~коэффициент~~ ~~набранных~~ ~~проигрыш~~
~~всего очков:~~ $a_1 = 14(1-m)$

~~коэффициент~~ ~~набранных~~ ~~проигрыш~~
~~всего очков:~~ $m \in \mathbb{N}$
Пусть $m=0 \Rightarrow a_1 = 14$
 $d=0$

8

~~$$n(n-1) = d \cdot 2n$$~~

~~Черновик~~

~~$$2n = d \quad 2n = \frac{n(n-1)}{d}$$~~

~~$$n = \frac{n(n-1) \cdot 2}{d}$$~~

11. 2%	4. 2%
...	3. 2%
6. 2%	2. 2%
5. 2%	1. 2%

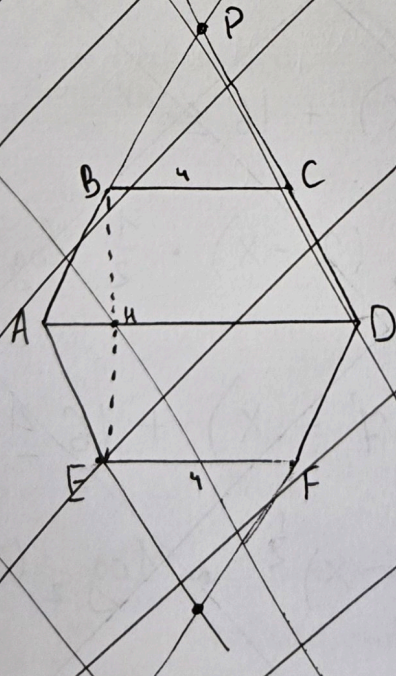
~~$$15 = \frac{15(14) \cdot 2}{d}$$~~

$$15 = \frac{420}{d} \Rightarrow d = \frac{420}{15} = 4$$

$$m=1 \Rightarrow a_1=0 \Rightarrow a_{15} = 0 + 2 \cdot 14 = 28$$

Ответ: $a_{14} = 26$

~~N 2~~



основание (AD) = 12

высота = 16

BC = EF = 4

расстояние между C и E = 2

P - точка пересечения продолжений AB и CD



1. Проведем высоту (BE) BH и EH = 16

(по условию задачи)

~~Треугольник ABCD и~~

~~### ABCD / ч. AEFB~~

~~Ответ:~~

~~$$\log_2^2(2-x) \cdot \log_3^2(7-x) + 16 \leq 32 \cdot \log_3(2-x) \cdot \log_4(7-x)$$~~

~~$$\log_2^2(2-x) \cdot \log_3^2(7-x) + 16 \leq$$~~

~~$$32 \cdot \frac{1}{2} \log_3(2-x) \cdot \frac{1}{2} \log_2(7-x)$$~~

~~$$\log_2^2(2-x) \cdot \log_3^2(7-x) + 16 \leq$$~~

~~$$32 \cdot \log_3(2-x)^{\frac{1}{2}} \cdot \log_2(7-x)^{\frac{1}{2}}$$~~

~~$$\log_2^2(2-x) \cdot \log_3^2(7-x) + 16 \leq 0$$~~

Чистовик

$$\cancel{32} \cdot \log_2 \cancel{(2 \cdot 8)^{1/2}} \cdot \log_2 \cancel{(7 \cdot 8)^{1/2}} \neq 0$$

~~Отвек:~~

$$n: \frac{N^4}{\sqrt[3]{n}}$$

$$\cancel{N^4} [\sqrt[3]{1}] = 1, [\sqrt[3]{2}] = 1, \dots$$

$$\cancel{N^4} [\sqrt[3]{8}] = 2, \dots, [\sqrt[3]{27}] = 3$$

$$\cancel{N^4} [\sqrt[3]{64}] = 4, \dots, [\sqrt[3]{125}] = 5$$

Оценим, какие числа входят в A:

$$n \in [1, 7] \text{ все 7 чисел}$$

$$n \in [8, 26] \text{ четные}$$

$$n \in [27, 63] - n = 3k_1$$

$$n \in [216, 342] \quad \Sigma_5 = 22$$

$$n \in [343, 511] \quad \Sigma_8 = 25$$

$$n \in [512, 728] \quad \Sigma_7 = 28$$

$$n \in [729, 999] \quad \Sigma_8 = 31$$

$$n \in [1000, 1330] \quad \Sigma_9 = 34$$

$$n \in [1831, 1727] \quad \Sigma_{10} = 37$$

$$n \in [1728, 2025] \quad \Sigma_{11} = 25$$

$$n \in [64, 124] \rightarrow n = 4k_2$$

$$\Sigma_3 = \frac{124-64}{4} + 1 = 16$$

$$n \in [125, 215] \rightarrow n = 5k_3$$

$$\Sigma_4 = 19$$

$$\Rightarrow \Sigma = 5 + \Sigma_3 + \dots + \Sigma_{11} = 242$$

Ответ: 242

N5

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a+2$$

$$\frac{x^2+y^2}{xy} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a+2 \Rightarrow \frac{(x+y)^2}{xy} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a+4$$

$$\frac{b_1^2}{t_2^2} + \frac{2at_2}{b_1} \geq a+4$$

$$\frac{b_1}{t_2} = p$$

$$p^2 + \frac{2a}{p} - a - 4 \geq 0$$

$$\Rightarrow p^3 + 2a - (a+4) \cdot p \geq 0$$

Проверим по теор. Безу:

$$p=2 \Rightarrow 8 - 2a - 8 + 2 = 0$$

Нужно чтобы не удовн.

$$\Rightarrow \sqrt{a+1} > 2 \Rightarrow a > 8$$

Ответ: $a \in (8; +\infty)$

$$x+y=t_1 > 0$$

$$\sqrt{xy}=t_2 > 0$$

см. дальше

$$\frac{p^3 + 0p^2 - (a+4)p + 2a}{p^3 - 2p^2} \Big| \frac{p-2}{p^2 + 2p - a}$$

$$\frac{-2p^2 - (a+4)p}{-2p^2 - 4p}$$

$$\frac{-(-a-4+4)p + 2a}{-a} = \frac{ap + 2a}{-a}$$

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{a+1}}{-1}$$

N5

Чистовик:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a+2$$

$$x \neq 0$$

$$y \neq 0$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a+2 \quad | \cdot (x+y)$$

$$\text{Ответ: } x^2 + y^2 + 2a\sqrt{xy} \geq ax + ay + 2x + 2y$$

N6

$$AB \in l$$

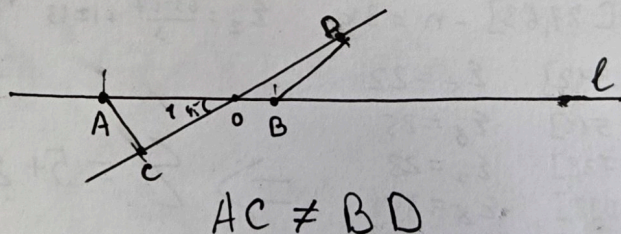
$$CD = m$$

$$AB = 1$$

$$CO: OD = k$$

$$\angle AOC = 45^\circ$$

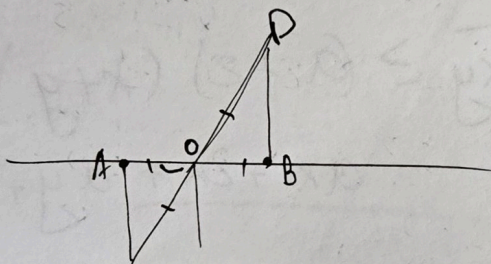
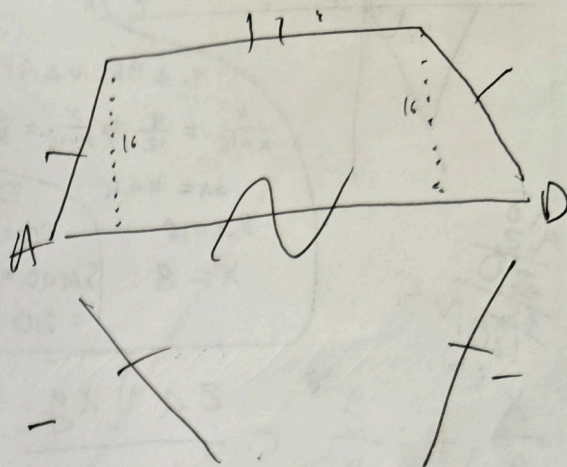
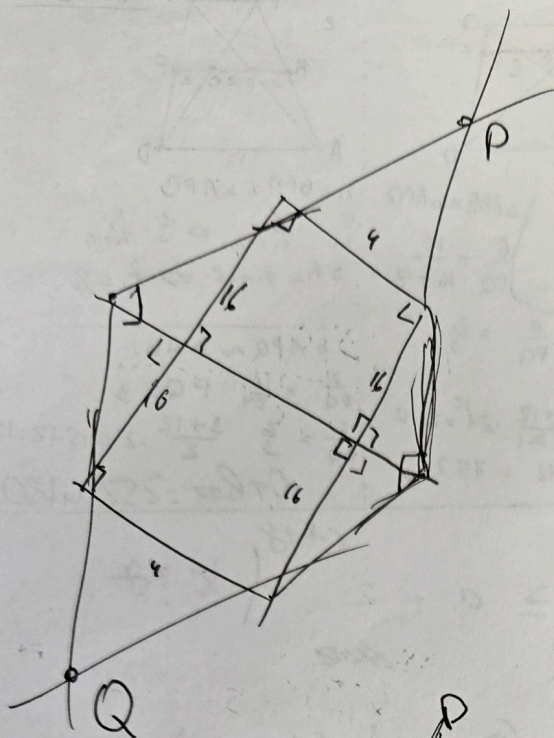
$$AC \neq BD$$



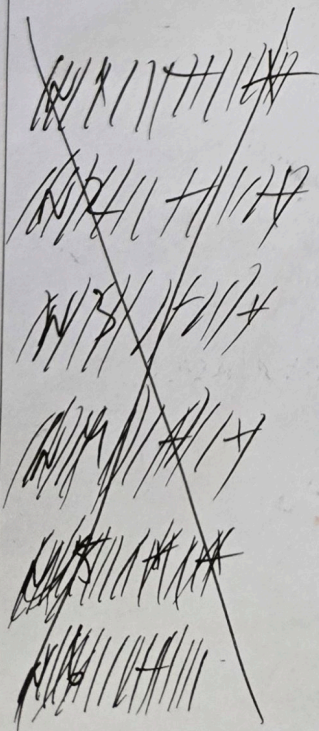
$$AC = BD$$

12 Ответ:

Черновик



$$\log_2^2(2-x) \cdot \log_3^2(7-x) + 16 \leq 32 \cdot \log_3(2-x) \cdot \log_4(7-x)$$

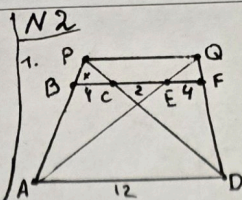
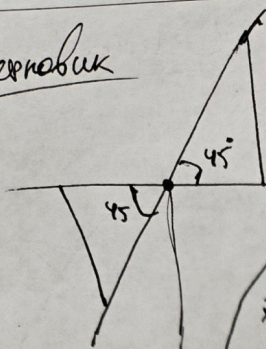


пуе.т

$$\begin{array}{r} 164 \\ \times 164 \\ \hline 656 \\ 884 \\ \hline 164 \\ \hline 25896 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} n_1 - +2 \\ n_2 - +2 \\ n_3 - 0 \\ n_4 - +2 \\ n_5 - 0. \end{array}$$

Черновик



1. $\triangle BPC \sim \triangle APD$

$$\frac{x}{x+16} = \frac{4}{12} \Rightarrow \frac{x}{x+16} = \frac{1}{3}$$

$$3x = x + 16$$

$$2x = 16$$

$$x = 8$$

$\triangle ABE \sim \triangle APQ$

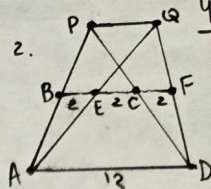
$$\frac{6}{PQ} = \frac{16}{16+8}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{PQ} = \frac{2}{3}$$

$$PQ = 9$$

$$S_{APQD} = \frac{9+12}{2} \cdot 24 = 21 \cdot 12 = 252$$

Чистовик



2. $\triangle BPC \sim \triangle APC$

$$\frac{4}{12} = \frac{h}{h+16} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{h}{h+16}$$

$$3h = h + 16 \Rightarrow h = 8$$

$\triangle APQ \sim \triangle ABE$

$$\frac{2}{PQ} = \frac{16}{24} \quad PQ = 3$$

$$\frac{2}{PQ} = \frac{2}{3} \quad \frac{3+12}{2} \cdot 24 = 15 \cdot 12 = 180$$

Ответ: 252 и 180

$$\begin{array}{r} 15 \\ 12 \\ \hline 27 \\ 180 \end{array}$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a + 2 \quad (x, y > 0)$$

$$x^2 + y^2 + \frac{2a\sqrt{xy}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}} \geq (a+2)(x+y)$$

$$ax + 2x + ay + 2y$$