14-07-36-36
(134.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробёвы горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Эрдх Александра Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«06» 04 2025 года

Подпись участника

100 (сто)

14-07-36-36 (134.1)

Чистовик. №1.

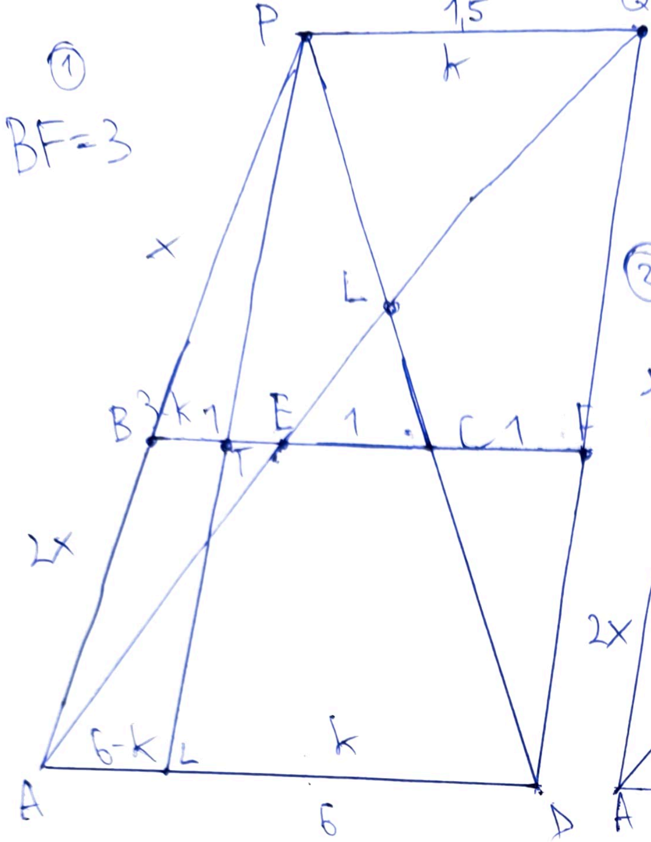
~~Заметим, что не может быть двух команд с одинаковым числом очков, иначе у всех команд будет столько же очков~~

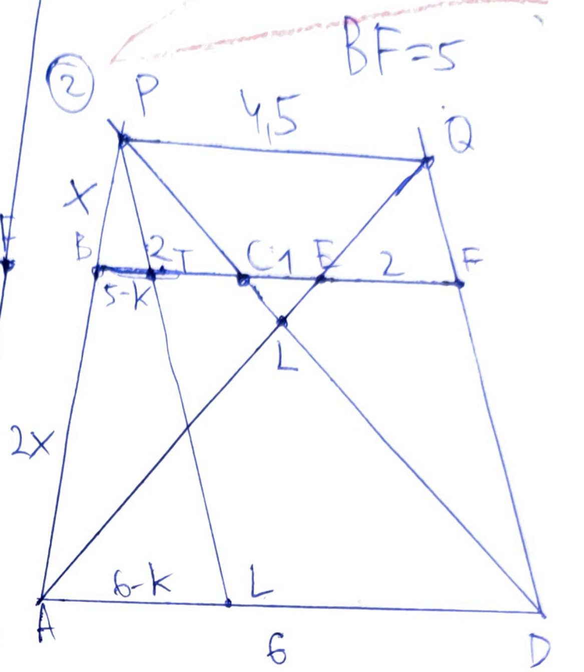
Обозначим за a_i число побед у i-й команды (занявшей i-е место). ~~Пусть НУО~~ Тогда $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{20}$. Заметим, что тогда число очков, набранных i-й командой с номером i, равно $3a_i$, тогда $3a_1 \geq 3a_2 \ldots \geq 3a_{20}$. Заметим, что в силу образования арифм. прогрессии $d = 3a_1 - 3a_2 = 3a_2 - 3a_3 = 3a_3 - 3a_4 = \ldots = 3a_{19} - 3a_{20}$, ~~тогда~~ если для какого-то $i \in [1, 19]$ $a_i = a_{i+1}$, то $d = 0$, и арифм. прогрессия не является убывающей. Значит, $a_1 > a_2 > a_3 \ldots > a_{20}$, но тогда поскольку все команды сыграли со всеми по 1 разу, то $a_1 \leq 19$. Если $a_1 \leq 18$, то $a_2 \leq 17$, $a_3 \leq 16$, $a_4 \leq 15 \ldots a_{18} \leq 1$, $a_{19} \leq 0$, $a_{20} \leq -1$, что невозможно**. Тогда $a_1 = 19$. Если $a_2 \leq 17$, то $a_3 \leq 16$, $a_4 \leq 15 \ldots a_{18} \leq 1$, $a_{19} \leq 0$, $a_{20} \leq -1$, что невозможно**. Тогда $a_2 = 18$. Тогда $d = 3a_1 - 3a_2 = 3$, значит 1-я команда набрала 57 очков, 2-я — 54, 3-я — 51, 4-я — 48 … 19-я — 3, 20-я — 0. Данная ситуация реализуется (i-я команда обыгрывает все команды с большим индексом и проигрывает всем с меньшим: 1-я выигрывает у всех, 2-я — у всех, кроме 1 … 20-я — всем проигрывает), и, как было показано, является единственной возможной. Тогда 2-я команда набрала 54 очка.

Ответ: 2-я команда (занявшая 2-е место) набрала 54 очка.

** используем $a_1 > a_2 \ldots > a_{20}$ в виде $a_1 \geq a_2 + 1$, $a_2 \leq a_1 - 1$, $a_3 \leq a_2 - 1$, $a_4 \leq a_3 - 1 \ldots$ $a_{20} \leq a_{19} - 1$.

Чистовик. N.2.





Положим, что BE и CF лежат в разных полуплоскостях относительно AD. Тогда $\rho(BE;AD)=\rho(CF;AD)=8$, но тогда $\rho(BE;CF)=16$, и $\rho(C;E)\geq 16\neq 1$. Значит, BE и CF в одной полуплоскости относительно AD, т.к. $\rho(AD;BE)=\rho(CF;AD)$, то B, E, C, F на 1 прямой. Т.к. $\rho(C;E)=1=\frac{1}{2}BC$, то E либо середина BC (1), либо $E\in[BC)$, (2). ~~если $E\in[BC)$, $F\in[BC]$, то~~ (поменяли E и F). ~~случай симметричен случаю (1), а если $E\in[BC]$, $F\in[BC$~~ $[CB)$, ABCD ~~то случаю (1) [illegible]~~ Ввиду порядка точек $AEFD$ ~~нарисованные случаи, нет~~ случаев, кроме нарисованных нет.

В обоих случаях $BC=EF$ и $\triangle APD\sim\triangle BPC$ ($\angle P$-общий, $\angle PBC=\angle PAD$ в силу $AD\parallel BC$), тогда $\frac{BC}{AD}=\frac{\rho(P;BC)}{\rho(P;AD)}=\frac{\rho(BC;P)}{8+\rho(P;BC)}$, аналогично $\frac{EF}{AD}=\frac{\rho(Q;EF)}{\rho(Q;AD)}=\frac{\rho(Q;EF)}{8+\rho(Q;EF)}$. Но $BC=EF$, тогда пусть $\rho(BC;P)=x$, ~~$\rho(AD;$~~ $\rho(Q;EF)=y$, $x>0$, $y>0$, $x+8>0$, $y>0$:

14-07-36-36
(134.1)

Чистовик.

$\frac{x}{8+x}=\frac{y}{8+y}$; $8x+xy=8y+xy$; $8x=8y$; $x=y$.

Тогда $\rho(Q;EF)=\rho(P;BC)$, но B,C,E,F на 1 прямой и P,Q в одной полуплоскости относительно этой прямой, тогда $PQ\parallel BF$, но тогда $PQ\parallel BF\parallel AD \Rightarrow APQD$ - трапеция.

Найдем высоту трапеции $APQD$ (в обоих случаях она одинаковая ~~высо~~). Имеем $\frac{\rho(P;BC)}{8+\rho(P;BC)}=\frac{BC}{AD}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, тогда

$3\rho(P;BC)=8+\rho(P;BC) \Rightarrow \rho(P;BC)=4$. Тогда $\rho(P;AD)=\rho(P;BC)+\rho(BC;AD)=4+8=12$.

(1) Пусть $BP=x$, тогда из $\triangle PBC\sim\triangle PAD$ $\frac{2}{6}=\frac{x}{AB+x}$, $6x=2x+2AB$, $AB=2x$. $PL\parallel DQ$, $L\in AD$, $PL\cap BF=T$. Тогда $PQFT$ - параллелограмм по определению, $TF=PQ$, но $\triangle PBT\sim\triangle PAL$ ($\angle P$-общий, $\angle PBF=\angle PAD$ из $BT\parallel AL$), тогда $BT=BF-PQ=3-k$, $PQ=k$, $LD=PQ=TF$, $AL=6-k$, но тогда $\frac{PB}{\cancel{AB}\ PA}=\frac{1}{3}=\frac{BT}{AL}=\frac{3-k}{6-k}$,

($PQLD$-параллелограмм по опр.)

$9-3k=6-k$, $k=1{,}5$. Тогда $S_{APQD}=\cancel{\frac{1}{2}}\cdot 12\cdot\frac{6+1{,}5}{2}=36+9=45$

(2) Аналогично $PQ=k$, только теперь $BF=2+1+2=5$, и $\frac{1}{3}=\frac{5-k}{6-k}$, $6-k=15-3k$, $k=4{,}5$. Тогда

$S_{APQD}=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot(4{,}5+6)=36+6\cdot 4{,}5=36+27=63$.

Ответ: $S_{APQD}=45$ или $S_{APQD}=63$

Чистовик №3.

$2\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8)\le\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2$

$\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)=\dfrac{\log_4(x+3)\cdot\log_9(x+8)}{\log_4 3\cdot\log_9 2}$

$\log_4 3\cdot\log_9 2=\log_4 3\cdot\dfrac{1}{\log_2 9}=\log_2\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{4\cdot\log_2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{4}.$

Тогда $\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)=4\cdot\log_4(x+3)\cdot\log_9(x+8)$

Пусть $\log_4(x+3)=a$, $\log_9(x+8)=b$. Тогда имеем неравенство:

$2a^2b^2\le 4ab-2$

$a^2b^2\le 2ab-1$

$a^2b^2-2ab+1\le 0$

$(ab-1)^2\le 0$, что возможно лишь при $ab=1$, то есть

$\log_4(x+3)\cdot\log_9(x+8)=1$

~~$\log_{x+3}4=\log_9(x+8)$, тогда~~ $\begin{cases}\cancel{(x+3)^k=9}\\ 4^k=x+8\end{cases}$

~~$(4^k-5)^k=9$~~ Ясно, что $\begin{cases}x+3>0\\ x+8>0\end{cases}$ $x>-3$, тогда $x+8>5$, значит

$\log_9(x+8)>0$, тогда т.к. $1>0$, то $\log_4(x+3)>0$, откуда $x+3>1$, $x>-2$ (иначе при $x\in(-3;-2]$ $\log_4(x+3)\cdot\log_9(x+8)\le 0$). Но тогда при $x\in(-2;+\infty)$ $f(x)=\log_4(x+3)$ возрастает и >0, $g(x)=\log_9(x+8)$ возрастает и >0, тогда $Q(x)=f(x)\cdot g(x)$ возрастает на $(-2;+\infty)$, значит уравнение $Q(x)=a$ имеет не более 1 решения. Очевидно подходит $x=1$: $\log_4(x+3)\cdot\log_9(x+8)=\log_4 4\cdot\log_9 9=1\cdot 1=1.$

Ответ: $x=1$.

14-07-36-36 (134.1)

Чистовик. №4.

Заметим, что $2^3=8$, $3^3=27$, $4^3=64$, $5^3=125$, $6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=$
$=512$, $9^3=729$, $10^3=1000$, $11^3=121\cdot11=1331$, $12^3=144\cdot12=$
$=1440+288=1728$, $13^3=169\cdot13=1690+510-3=1690+507=2000+197=$
$=2197>2025$. Тогда надо найти кол-во чисел от 25 до 26, кратных 2; от 27 до 63, кратных 3; от 64 до 124, кратных 4 ... от 1728 до 2025, кратных 12.

Утверждение: $a\in N$, $b\in N$, $a<b$, $k\in N$, $a\vdots k$, $b\vdots k$. Тогда на $[a;b]$ ровно $\frac{b-a}{k}+1$ число $\vdots k$. Действительно, от 1 до b ровно $\frac{b}{k}$ чисел $\vdots k$, от 1 до $a-k$ — ровно $\frac{a}{k}-1$, тогда на $[a;b]$ ровно $\frac{b}{k}-\frac{a}{k}+1=\frac{b-a}{k}+1$ число $\vdots k$.

От 25 до 26 ровно 1 число, кратное 2 (1).

От 27 до 63 ровно $\underbrace{\frac{63-27}{3}}_{12}+1=13$ чисел $\vdots 3$ (2) (т.к. $27\vdots3$, $63\vdots3$, и $63+3>64$).

От 64 до 124 ровно $\frac{124-64}{4}+1=16$ чисел $\vdots 4$ (3) (т.к. $124\vdots4$, $64\vdots4$, $124+4>123$)

От 125 до 215 ровно $\frac{215-125}{5}+1=19$ чисел $\vdots5$ ($215\vdots5$, $125\vdots5$, $215+5>216$). (4)

От 216 до 342 ровно $\frac{342-216}{6}+1=\frac{126}{6}+1=22$ чисел $\vdots6$ ($342\vdots6$, $216\vdots6$, $342+6>343$) (5)

От 343 до 511 ровно $\frac{511-343}{7}+1=73-49+1=25$ чисел $\vdots7$ ($343\vdots7$, $511\vdots7$, $511+7>512$) (6)

От 512 до 728 ровно $\frac{728-512}{8}+1=91-64+1=28$ чисел $\vdots8$ ($728\vdots8$, $512\vdots8$, $728+8>729$) (7)

От 729 до 999 ровно $\frac{999-729}{9}+1=31$ чисел $\vdots9$ ($999\underset{9}{\equiv}729\underset{9}{\equiv}0$, $999+9>1000$) (8)

От 1000 до 1330 ровно $\frac{1330-1000}{10}+1=34$ чисел $\vdots10$ ($1330\underset{10}{\equiv}1000\underset{10}{\equiv}0$, $1330+10>1331$) (9)

От 1331 до 1727 ровно $\frac{1727-1331}{11}+1=\frac{396}{11}+1=37$ чисел $\vdots11$ ($1727\underset{11}{\equiv}1331\underset{11}{\equiv}0$, $1727+11>1728$) (10)

От 1728 до 2025 ровно $\frac{2016-1728}{12}+1=\frac{288}{12}+1=25$ чисел $\vdots12$ (т.к. $1728\vdots12$, $2016\vdots12$, $2016+12>2025$). (11)

Чистовик.

из промежутка $[25, 2025]$.

Тогда всего чисел, принадлежащих A:

$(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(6)+(7)+(8)+(9)+(10)+(11) = 1+13+16+19+22+$

$+25+28+31+34+37+25 = \frac{13+37}{2}\cdot 9+1+25 = 25\cdot 9+25+1 = 251.$

Ответ: 251.

N.5.

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geqslant \frac{a}{2}+2$$

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{(x+y)^2-2xy}{xy} = \frac{(x+y)^2}{xy}-2$, пусть $\frac{\sqrt{xy}}{x+y}=t$, тогда нер-во имеет вид

$\frac{1}{t^2}-2+at \geqslant \frac{a}{2}+2$ $\quad \frac{1}{t^2}+at \geqslant \frac{a}{2}+4$, причём по нер-ву о средних $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$, то есть $\frac{\sqrt{xy}}{x+y} \leqslant \frac{1}{2}$, причём для любого $\alpha \in (0;0,5]$ найдется (x,y): $\frac{\sqrt{xy}}{x+y}=\alpha$, ведь

$\alpha x+\alpha y=\sqrt{xy}$ $(x+y>0$, $x+y\neq 0)$, $\alpha x+\alpha y>0$, $\sqrt{xy}>0$, $|^2$

$xy=\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+2\alpha^2xy$, $\quad \alpha^2x^2+x(2\alpha^2y-y)+\alpha^2y^2=0$,

$D=(2\alpha^2y-y)^2-4\alpha^2\cdot\alpha^2y^2=4\alpha^4y^2-4\alpha^2y^2+y^2-4\alpha^4y^2=y^2(1-4\alpha^2)\geqslant 0$,

т.к. $\alpha\in[0;0,5]$ и $1-4\alpha^2\geqslant 0$, $\alpha^2\leqslant 0,25$, $-4\alpha^2\geqslant -1$, тогда при заданном $y>0$ найдется соответствующий ему $x>0$, что $\frac{\sqrt{xy}}{x+y}=\alpha$, $\alpha\in(0;0,5]$.

$(\alpha^2y^2:\alpha^2=y^2>0$, $\frac{2\alpha^2y-y}{\alpha^2}=\frac{y}{\alpha^2}(2\alpha^2-1)<0$, тогда произведение и сумма корней >0 (теорема Виета), значит оба корня >0, т.е. найденный $x>0$).

Тогда необходимо, чтобы $\frac{1}{t^2}+a(t-\frac{1}{2})\geqslant 4$ выполнялось при всех $t\in(0;0,5]$. $\quad f(t)=\frac{1}{t^2}+a(t-\frac{1}{2})$.

$f'=\frac{-2t}{t^4}+a=-\frac{2}{t^3}+a$ $\quad f'=0$: $-\frac{2}{t^3}=-a$, $a=\frac{2}{t^3}$, $t=\sqrt[3]{\frac{2}{a}}$

Черновик.

При $t\in(0;\sqrt[3]{\frac{2}{a}}]$ $f(t)$ убывает, при $t\in[\sqrt[3]{\frac{2}{a}};0{,}5]$ $f(t)$ возрастает, тогда $\cancel{a}=t=\sqrt[3]{\frac{2}{a}}$ – точка минимума $f(t)$, и в ней достаточно проверить неравенство, если $a\geq \cancel{\frac{1}{8}}\,16$. Если $0<a\leq \cancel{\frac{1}{8}}\,16$, то $\frac{2}{a}\geq\frac{1}{8}$,

$$\cancel{\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{4}{a}}}+a\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{a}}-\frac{a}{2}\geq 2}$$

$\sqrt[3]{\frac{2}{a}}\geq\frac{1}{2}$, значит $f(t)$ монотонна на $[0;0{,}5]$, проверим нер-во при $t=0{,}5$: $\frac{1}{(0{,}5)^2}+a(0{,}5-0{,}5)=4\geq 4$, причем $f'\leq 0$, значит нер-во верно при всех $t\in[0;0{,}5]$, значит (т.к. $-\frac{2}{t^3}\leq -16$, $0<a<16$) $a\in[0;16]$ подходят. При $a>16$ (проверяем в $t=\sqrt[3]{\frac{2}{a}}$):

$$\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{2}{a}}\right)^2}+a\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{a}}-\frac{a}{2}\geq 4;$$

$$\cancel{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{2}}+\sqrt[3]{2a^2}-\frac{a}{2}\geq 4}, \text{ пусть } \cancel{\sqrt[3]{a}=k}:$$

$$\cancel{\frac{k}{\sqrt[3]{4}}+k^2\sqrt[3]{2}-\frac{k^3}{2}\geq 4;\quad k^3-2k^2\sqrt[3]{2}-k\sqrt[3]{2}+8\leq 9}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{4}}+a\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{a}}-\frac{a}{2}\geq 4$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{4}}+\sqrt[3]{2a^2}-\frac{a}{2}\geq 4;\quad \sqrt[3]{a}=k;\ k>\sqrt[3]{16}$$

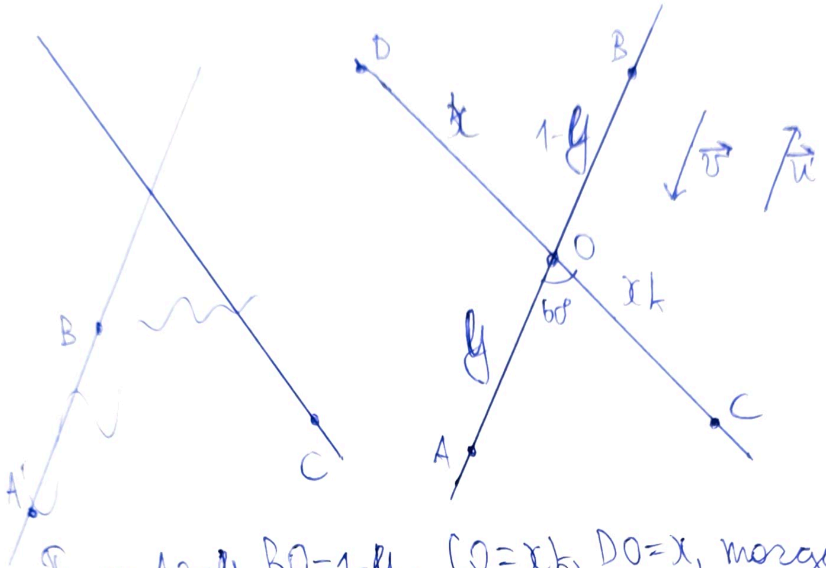
$$\frac{k^2}{\sqrt[3]{4}}+\sqrt[3]{2}\cdot k^2-\frac{k^3}{2}\geq 4;$$

$$k^3-2\sqrt[3]{2}\,k^2-\sqrt[3]{2}\cdot k^2+8\leq 0$$

$(k-\underset{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}})(k^2-k\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{32})\leq 0$. При $k>\sqrt[3]{16}$ необходимо $k^2-k\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}\leq 0$, но $f(k)=k^2-k\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}$ – парабола ветвями вверх, и $D=\sqrt[3]{4}-4\cdot 2\cdot\sqrt[3]{4}=-7\sqrt[3]{4}<0$, значит $f(k)>0$. Тогда при $k>\sqrt[3]{16}$ нер-во не выполнено, значит $a>16$ не подходят.

Ответ: $a\in[0;16]$.

Чистовик. № 6.



Пусть $AO=y$, $BO=1-y$, $CO=xk$, $DO=x$, тогда $m=x(k+1)$, $x=\frac{m}{k+1}$. По теореме косинусов для $\triangle AOC$, $\triangle BOD$:

$BD^2=x^2+(1-y)^2+x(1-y)$ $\quad BD^2=AC^2$:

$AC^2=y^2+x^2k^2-y\cdot(xk)$ $\quad$ ~~$x^2+1+y^2-2y-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}xy=y^2+x^2k^2-$~~

~~$-\frac{1}{2}xky$ тогда~~

~~$\frac{1}{2}xky-2y+\frac{1}{2}xy=x^2k^2-x^2+\frac{1}{2}x-1$~~

$$y=\frac{x^2k^2-x^2+\frac{1}{2}x-1}{\frac{1}{2}xk-2+\frac{1}{2}x}=\frac{\frac{m^2}{(k+1)^2}(k^2-1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{(k+1)}-1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{mk}{k+1}-2+\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{k+1}}=$$

$$=\frac{\frac{m^2(k-1)}{k+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{k+1}-1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{m(k+1)}{k+1}-2}=$$

$$x^2+1+y^2-2y-x+xy=y^2+x^2k^2-kxy$$

$$y(kx-2+x)=x^2k^2+x-1-x^2 \quad (kx-2+x)=(k+1)\cdot x-2=m-2$$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик.

$$x^2k^2+x-1-x^2=x^2(k^2-1)+x-1=\frac{m^2}{(k+1)^2}(k-1)(k+1)+\frac{m}{k+1}-1=$$

$$=\frac{m^2(k-1)}{k+1}+\frac{m}{k+1}-1=\frac{m^2k-\cancel{m}+\cancel{m}-k-1}{k+1}=\frac{m^2k-k-1}{k+1}$$

Тогда $y=\frac{m^2k-k-1}{(k+1)(m-2)}$, и при таком y можно сдвинуть отрезок AB требуемым образом (если $y<0$, то значит отрезок двигаем вниз вдоль $\vec{v}$, $\vec{v} \parallel l$, если $y>0$, то вверх, вдоль $\vec{u}$, $\vec{u} \parallel l$) ~~если~~ $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{AB}$ ~~a~~ 2i $\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{BA}$). При $k \neq -1$ и $m=2$ такого y не существует, но $k>0$, значит при всех $m \neq 2$ есть требуемое перемещение отрезка.

Ответ: при $k>0$, $m \in (0;2) \cup (2;+\infty)$ существует требуемое перемещение AB.