



15-28-10-19
(150.2)



Дески

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант В - 1

Место проведения ПЕНЗА
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!“
наименование олимпиады

ПО МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

БЕССОНОВА ЗАХАРА АНДРЕЕВИЧА
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Т1 лист К

Т1 лист К

Дата

«06» АПРЕЛЯ 2025 года

Подпись участника

Бесс

Демид

ЧИСТОВИК

Вариант В-1

95 (девяносто пять)

20

Задача 1

Есть команд 20, то переведено было $\frac{20(20-1)}{2} = 190$ игр. Каждая игра добавила в общую сумму +3 очка
 $\Rightarrow$ Всего всеми командами набрано $190 \cdot 3$ очка.

Обозначим $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{19}, a_{20}$ — кол-во очков, набранное командой $N^{\circ}1, N^{\circ}2, \dots, N^{\circ}20$ соответственно. Так как за игру команде либо начисляется +3, либо не начисляется ничего, количество очков, набранное командой, кратно 3.

Пусть a_1 — это команда, набравшая минимальный балл, a_2 — следующая по кол-ву баллов после a_1 и так далее до a_{20} (a_{20} — команда, набравшая больше всех баллов)

Допустим, что a_1 набрала 0 баллов (то есть всем проиграла), а разность между кол-вом баллов между двумя соседними командами в турнирной таблице равна 3 (минимально возможная разность). Тогда сумма баллов у 20 команд по формуле суммы n первых членов арифмет. прогрессии равна:

ЧИСТОВИК

$$S_{20} = \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot (20-1) \cdot 20}{2} = 3 \cdot 19 \cdot 10 = 190 \cdot 3$$

Мы знаем, что всего было набрано $190 \cdot 3$ очков. Если допустить, что $a_1 > 3$ или $d > 3$, то получим ~~S_{20}~~

$S_{20} > 190 \cdot 3$, что будет противоречить тому, что в сумме все команды набрали $190 \cdot 3$ очка

$$\Rightarrow a_1 = 0 \quad d = 3 \Rightarrow a_n = 3n$$

$\Rightarrow$ Команда, занявшая 2-ое место (то есть команда a_{19}) набрала $a_{19} = 3 \cdot 19 = 57$ ~~очков~~ очков

Из той модели, которую мы получили, вытекает, что a_{20} выиграла у всех; a_{19} выиграла у всех, кроме a_{20} ; a_{18} выиграла у всех, кроме a_{20} и a_{19} ; a_{17} выиграла у всех, кроме a_{20} , a_{19} и a_{18} и так далее до a_1 , которая всем проиграла.

Ответ: 57 очков

Задача 3

$$2 \log_4^2(x+3) \cdot \log_9^2(x+8) \leq \log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) - 2$$

ЧИСТОВИК

15-28-10-19
(150.2)

$$2 \cdot \frac{1}{4} \log_2^2(x+3) \cdot \frac{1}{4} \log_3^2(x+8) \leq \log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) - 2$$

$$\frac{1}{8} \log_2^2(x+3) \cdot \log_3^2(x+8) \leq \log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) - 2 \quad | \cdot 8$$

$$\log_2^2(x+3) \cdot \log_3^2(x+8) \leq 8 \log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) - 16$$

$$\log_2^2(x+3) \cdot \log_3^2(x+8) \leq 8 \cdot \frac{\ln(x+3)}{\ln 3} \cdot \frac{\ln(x+8)}{\ln 2} - 16$$

$$\log_2^2(x+3) \cdot \log_3^2(x+8) \leq 8 \cdot \frac{\ln(x+3)}{\ln 2} \cdot \frac{\ln(x+8)}{\ln 3} - 16$$

$$\log_2^2(x+3) \cdot \log_3^2(x+8) \leq 8 \cdot \log_2(x+3) \cdot \log_3(x+8) - 16$$

~~Замечание~~ Условие: $\begin{cases} x+3 > 0 \\ x+8 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x > -8 \end{cases}$
 $\Downarrow$
 $\underline{x > -3}$

Замени $t = \log_2(x+3) \cdot \log_3(x+8)$

$$\Rightarrow t^2 = \log_2^2(x+3) \cdot \log_3^2(x+8)$$

$$\Rightarrow t^2 \leq 8t - 16$$

$$t^2 - 8t + 16 \leq 0$$

$$(t-4)^2 \leq 0 \Rightarrow t=4$$

$$\Rightarrow \log_2(x+3) \cdot \log_3(x+8) = 4$$

Если $x \in (-3; -2]$, то $0 < x+3 \leq 1$
 $5 < x+8 \leq 6$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_2(x+3) \leq 0 \\ \log_3(x+8) > 0 \end{cases} \Rightarrow \log_2(x+3) \cdot \log_3(x+8) \leq 0;$$

4 не входит в промежуток $(-\infty; 0] \Rightarrow \emptyset$

ЧИСТОВИК

$$\text{Если } x > -2, \text{ то } \begin{cases} x+3 > 1 \\ x+8 > 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_2(x+3) > 0 \\ \log_3(x+8) > 0 \end{cases}$$

Функция $f(x) = \log_2(x+3)$ при $x > -2$ ~~строго возрастает~~ является монотонно возрастающей и принимает только строго положительные значения.

Функция $g(x) = \log_3(x+8)$ при $x > -2$ также является монотонно возрастающей и принимает только строго положительные значения.

$\Rightarrow$ Функция $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ при $x > -2$ является монотонно возрастающей и принимающей только положительные значения.

$\Rightarrow$ По теореме о корне, уравнение $h(x) = 4$ имеет лишь один корень (или не имеет корней вообще)

Корень нетрудно подобрать: $x = 1$

$$\text{Проверка } \log_2(1+3) \cdot \log_3(1+8) = 4$$

$$\log_2 4 \cdot \log_3 9 = 4$$

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$4 = 4 \checkmark$$

Ответ: $x = 1$

Задача №5

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2} + 2 \quad ; \quad \begin{cases} a > 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + a \cdot \frac{1}{\frac{x+y}{\sqrt{xy}}} \geq \frac{a}{2} + 2$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + a \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}} \geq \frac{a}{2} + 2$$

Если $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$, то дробь $\frac{x}{y}$ может принимать любые значения в интервале $(0; +\infty)$. То же самое можно сказать про дробь $\sqrt{\frac{x}{y}}$ — она также может принимать любые значения в интервале $(0; +\infty)$.

Сделаем замену $\sqrt{\frac{x}{y}} = t, t \in (0; +\infty)$
 $\Rightarrow \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = t + \frac{1}{t}$; рассмотрим функцию $f(t) = t + \frac{1}{t}$ при $t > 0$
 $f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2}$

Видим, когда t малее, то функция $f(t)$ возрастает, а когда t убывает:

$$\frac{t^2 - 1}{t^2} \geq 0$$

ЧИСТОВИК

При $t > 0$: $t^2 > 0$ - истина

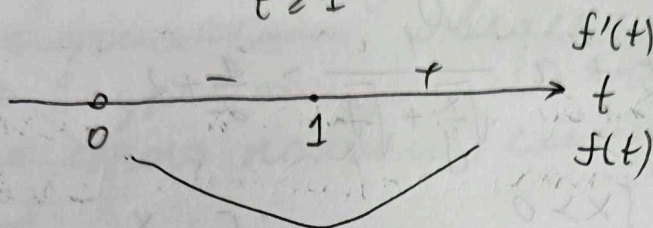
$$\Rightarrow t^2 - 1 \geq 0$$

$$(t-1)(t+1) \geq 0$$

При $t > 0$: $t+1 > 0$ - истина

$$\Rightarrow t-1 \geq 0$$

$$t \geq 1$$

 $\Rightarrow t=1$ - точка минимума

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

$\Rightarrow$ Область значений функции при $t > 0$ представляет собой промежуток $[2; +\infty)$ (действительно, при $t > 1$ можно брать сколь угодно большую t и получать сколь угодно большое $f(t)$; аналогично при $t < 1$)

 $\Rightarrow$ Сделаем замену $k = t + \frac{1}{t}$, $k \geq 2$ Выразим $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ через k :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t^2 + \frac{1}{t^2} = k^2 - 2$$

Подставим всё в исходное ~~урав-~~ неравенство:

$$k^2 - 2 + \frac{a}{k} \geq \frac{a}{2} + 2$$

$$k^2 + \frac{a}{k} \geq \frac{a}{2} + 4$$

Умножим обе части неравенства

ЧИСТОВИК

$$10) n \in [1331; 1727] \Rightarrow [\sqrt[3]{n}] = 11$$

$$1331 : 11 \text{ и } 1727 : 11$$

$$\Rightarrow \frac{1727-1331}{11} + 1 = 36 + 1 = 37 = (x + 37)$$

$$11) n \in [1728; 2025] \Rightarrow [\sqrt[3]{n}] = 12$$

Последнее число в промежутке
 $n \in [1728; 2025]$, которое делится на 12 -
 это число 2016 ; $1728 : 12$

$$\Rightarrow \frac{2016-1728}{12} + 1 = 24 + 1 = 25 \Rightarrow (+25)$$

$\Rightarrow$ Всего чисел:

$$1 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28 + 31 + 34 + 37 + 25$$

Обратим внимание, что числа с 13
 по 37 включительно (всего таких чисел

9) образуют арифметическую прогрессию
 с разностью 3 и первым членом 13

$$\Rightarrow S_9 = \frac{2 \cdot 13 + 3 \cdot (9-1)}{2} \cdot 9 = \frac{2 \cdot 13 + 3 \cdot 8}{2} \cdot 9 =$$

$$= 9(13 + 12) = 9 \cdot 25 = 225$$

$$\Rightarrow S_{\text{общая}} = 1 + 25 + S_9 = 26 + 225 = 251$$

Ответ: 251

Задача №2

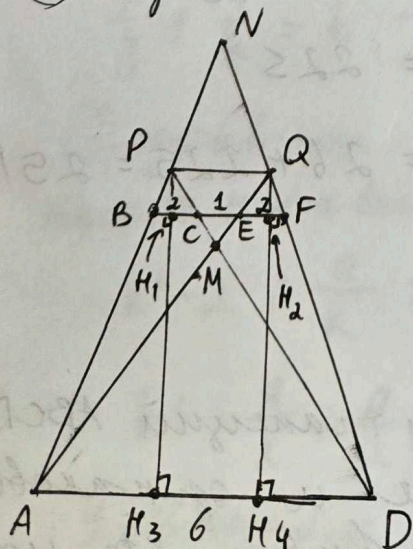
Из тех фактов, что у трапеций ABCD и
 AEFD общее основание и одинаковые
 высоты можно сделать вывод, что их

ЧИСТОВИК

Вторые основания (BC и EF) лежат на одной прямой (так как $BC \parallel AD \parallel EF$, и при этом BC и EF расположены на одном расстоянии от AD). Однако возникает вопрос: а могут ли BC и EF располагаться по разные стороны от прямой AD ? Из условия: $CE = 1$. Но если BC и EF расположены по разные стороны от AD , то минимальное расстояние между точками C и E (при условии $CE \perp AD$) равно $8 + 8 = 16 > 1$

$\Rightarrow BC$ и EF расположены по одну сторону от AD и, как уже говорилось и доказывалось ранее, лежат на одной прямой. Тут также возможны два случая:

II случай: точка $C \notin EF$



Так как

$$\Rightarrow BF = BC + CE + EF = 2 + 1 + 2 = 5$$

Так как $BF < AD$, то продолжения отрезков AB и FD иде-то пересекаются. Назовем точку пересечения AB и FD "N". Точку пересечения AD и EF обозначим "M".

Докажем, что $APQD$ — ^{чистовик} трапеция. Пусть —
 возьмём PH_3 и QH_4 — высоты к AD . Т.к.
 $AD \parallel BC$ и $AD \parallel EF$, то $PH_3 \perp BC$ и $QH_4 \perp EF$

$\Rightarrow$ Определим точку пересечения
 BC и PH_3 как H_1 , а точку пересечения
 EF и QH_4 как H_2 ; $PH_1 \perp BC$ и $QH_2 \perp EF$;

$\triangle APD \sim \triangle PBC$ ($\angle APD$ — общий;
 $\angle PBC = \angle PAD$ как соответственные
 при параллельных прямых BC и AD)

$$\Rightarrow \frac{PH_1}{PH_3} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{3};$$

Аналогично; $\triangle QEF \sim \triangle AQD$

$$\Rightarrow \frac{QH_2}{QH_4} = \frac{EF}{AD} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{PH_1}{PH_3} = \frac{QH_2}{QH_4} \Rightarrow \frac{PH_3}{PH_1} = \frac{QH_4}{QH_2};$$

$$PH_3 = PH_1 + H_1H_3; \quad QH_4 = QH_2 + H_2H_4$$

$$\text{По условию, } H_1H_3 = H_2H_4 = 8$$

$$\Rightarrow PH_3 = PH_1 + 8 \quad QH_4 = QH_2 + 8$$

$$\Rightarrow \frac{PH_1 + 8}{PH_1} = \frac{QH_2 + 8}{QH_2} \quad \frac{8}{PH_1} = \frac{8}{QH_2}$$

$$\Rightarrow PH_1 = QH_2$$

$$\Rightarrow PH_3 = QH_4 \quad (\text{ведь } PH_3 = PH_1 + 8, \quad QH_4 = QH_2 + 8)$$

$\Rightarrow$ Точки P и Q расположены на
 равном расстоянии от AD

$\Rightarrow PQ \parallel AD \Rightarrow APQD$ — трапеция 2.7.9.

$$PH_3 = 3PH_1 = 3(PH_3 - 8)$$

ЧИСТОВИК

$$\Rightarrow PH_3 = 3PH_3 - 24$$

$$24 = 2PH_3 \Rightarrow PH_3 = 12 = QH_4$$

$$PH_1 = PH_3 - 8 = 12 - 8 = 4 = QH_2 ;$$

~~Т.к.~~ Т.к. $APQD$ - трапеция, то

$$S_{APQD} = \frac{AD + PQ}{2} \cdot PH_3 ; \text{ найдем } PQ$$

Пусть $MD = k$; $\triangle AMD \sim \triangle CME$ ($\angle CME = \angle AMD$ как вертикал; $\angle MCE = \angle MDA$ как накрест лежащие при CE и AD)

$$\Rightarrow \frac{AD}{CE} = \frac{MD}{CM} \Rightarrow 6 = \frac{k}{CM} \quad CM = \frac{k}{6}$$

$$\Rightarrow CD = \frac{k}{6} + k = \frac{7k}{6} ;$$

Из $\triangle APD$ и $\triangle BPC$ (они подобны):

$$\frac{PC}{PD} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow \frac{PD}{PC} = \frac{AD}{BC} ; PD = PC + CD$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{CD}{PC} = \frac{6}{2} ; 1 + \frac{7k}{6 \cdot PC} = 3$$

$$\frac{7k}{6 \cdot PC} = 2 \quad PC = \frac{7k}{12}$$

$$\Rightarrow PM = PC + CM = \frac{7k}{12} + \frac{k}{6} = \frac{9k}{12} = \frac{3k}{4} ;$$

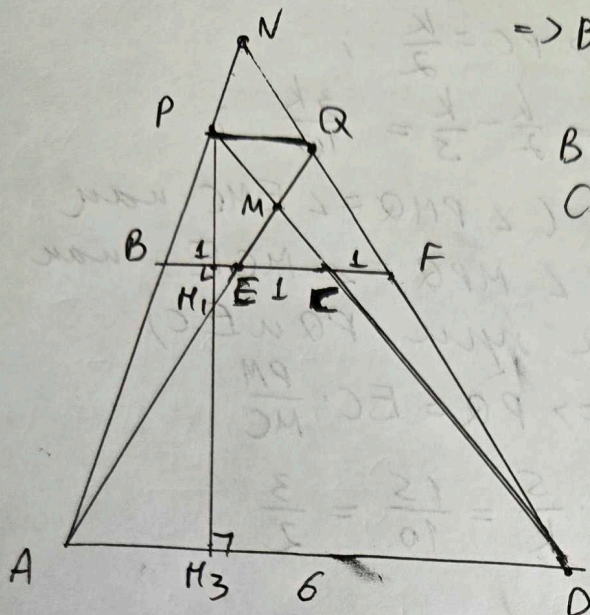
$\triangle PQM$ и $\triangle CME$ подобны ($\angle PMQ$ - общий; $\angle MCE = \angle MPQ$ как соответственные при параллельных прямых CE и PQ)

$$\Rightarrow \frac{CE}{PQ} = \frac{CM}{PM} \Rightarrow PQ = CE \cdot \frac{PM}{CM} =$$

$$= 1 \cdot \frac{3k}{4} \cdot \frac{6}{k} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow S_{APQD} = \frac{6 + \frac{9}{2}}{2} \cdot 12 = 6(6 + \frac{9}{2}) = 36 + 27 = \underline{63}$$

II) - ой случай : ЧИСТОВИК
Точка $C \in EF$
 $\Rightarrow \cancel{BC} + \cancel{CE} = EF = 2$



$$\Rightarrow BF = BE + EF - CE = 2 + 2 - 1 = 3;$$

$$BE = BC - CE = 1$$

$$CF = EF - CE = 1;$$

В этом случае можно, аналогично ~~первому~~ случаю I, доказать, что $APQD$ - трапеция;

$S_{APQD} = \frac{AD + PQ}{2} \cdot PH_3$; PH_3 , как и в случае I, равно 12 (т.к. $\triangle PBC$ и $\triangle APD$ также, как и в случае I, подобны, BC также равно 2, AD также равно 6, а H, H_3 также равно 8);

Пусть $CD = k$; $\triangle AMD \sim \triangle MEC$ ($\angle AMD$ - общий, $\angle MEC = \angle MAD$ как соответств.

при парал. прямых EC и AD)

$$\Rightarrow \frac{AD}{EC} = \frac{MD}{MC} = \frac{MC + CD}{MC} = 1 + \frac{CD}{MC}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{1} = 1 + \frac{k}{MC} \Rightarrow 6 = 1 + \frac{k}{MC}; \quad 5 = \frac{k}{MC}$$

$$MC = \frac{k}{5};$$

$$\triangle APD \sim \triangle BPC$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{PD}{PC} = \frac{PC + CD}{PC} = 1 + \frac{CD}{PC}$$

ЧИСТОВИК

$$\Rightarrow \frac{6}{2} = 1 + \frac{k}{PC} ; 3 = 1 + \frac{k}{PC}$$

$$2 = \frac{k}{PC} \Rightarrow PC = \frac{k}{2} ;$$

$$PM = PC - MC = \frac{k}{2} - \frac{k}{3} = \frac{3k}{10} ;$$

$\triangle PMQ \sim \triangle EMC$ ($\angle PMQ = \angle EMC$ как вертикальные, $\angle MPQ = \angle MCE$ как накрест лежащие при PQ и EC)

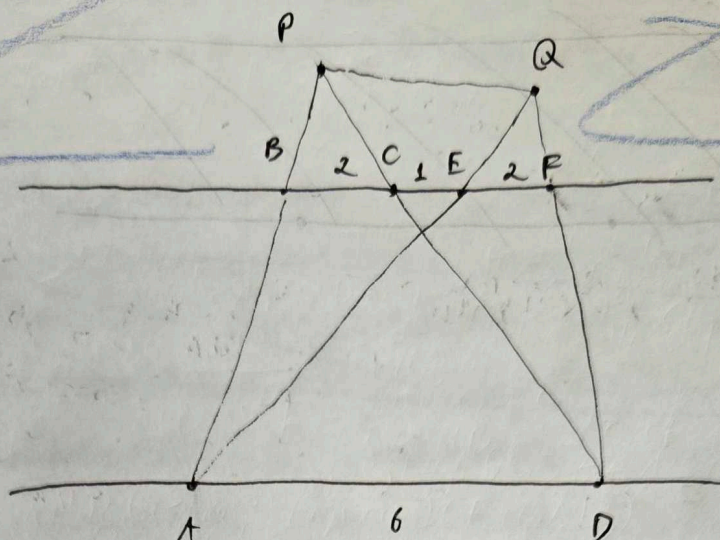
$$\Rightarrow \frac{PQ}{EC} = \frac{PM}{MC} \Rightarrow PQ = EC \cdot \frac{PM}{MC}$$

$$PQ = 1 \cdot \frac{3k}{10} \cdot \frac{5}{k} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow S_{APQD} = \frac{6 + \frac{3}{2}}{2} \cdot 12 = 6(6 + \frac{3}{2}) = 36 + 9 = 45$$

Ответ: 63 или 45

ЧЕРНОВИК



$$MD = k \quad CM = \frac{k}{6}$$

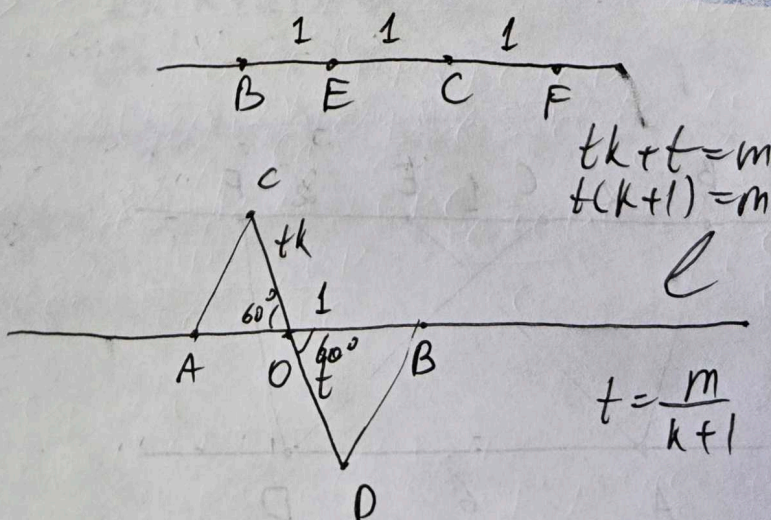
$$\Rightarrow CD = \frac{k}{6} + k = \frac{7k}{6}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{PC}{PD}$$

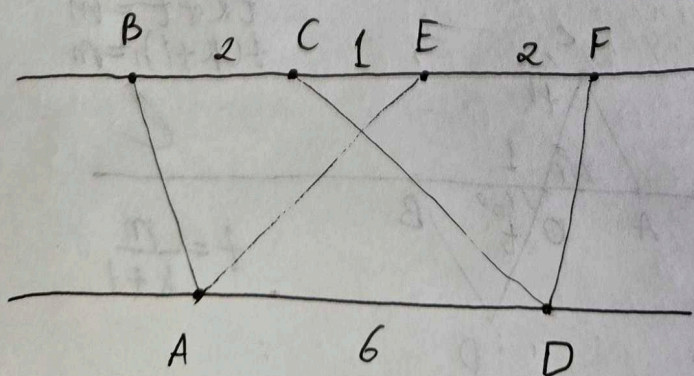
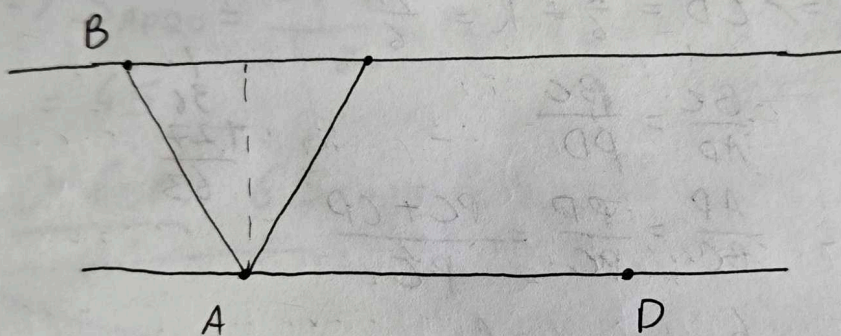
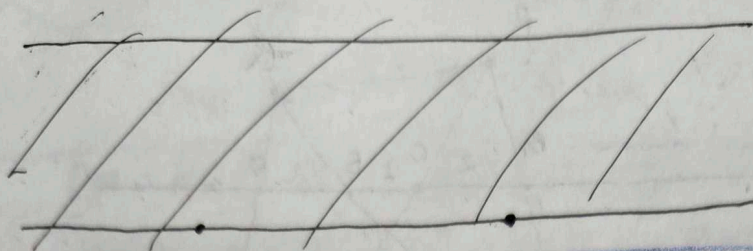
$$\frac{AP}{BC} = \frac{PD}{PC} = \frac{PC + CP}{PC}$$

$$\frac{6}{2} =$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 36 \\ + 27 \\ \hline 63 \end{array}$$



ЧЕРНОВИК



ЧИСТОВИК

на $2k$ - Мы можем это сделать, ведь $k \geq 2 \Rightarrow 2k \geq 4 \Rightarrow 2k$ - положительное число

$\Rightarrow 2k^3 + 2a \geq ak + 8k$ (1) условие чтобы составленное изопозное задание (неравенство выполняется при всех положительных x и y) необходимо, чтобы неравенство (1) полностью содержало промежуток $k \in [2; +\infty)$ в своём решении.

$$2k^3 + 2a - ak - 8k \geq 0$$

$$2k(k^2 - 4) + a(2 - k) \geq 0$$

$$2k(k-2)(k+2) - a(k-2) \geq 0$$

$$(k-2)(2k(k+2) - a) \geq 0$$

должно выполняться при всех $k \geq 2$

Если $k \geq 2$, то $k-2 \geq 0$

$$\Rightarrow 2k(k+2) - a \geq 0$$

$$2k(k+2) \geq a$$

$$2k^2 + 4k \geq a;$$

$f(x) = 2k^2 + 4k$ - парабола ветвями вверх (так как $2 > 0$) $\Rightarrow$ в вершине минимум

$$k_0 = \frac{-4}{2 \cdot 2} = -1 \quad f_0 = 2 \cdot (-1)^2 - 4 = -2$$

$\Rightarrow$ При $k < -1$ функция $f(x)$ - убывающая, а при $k > -1$ (нам сейчас) - возрастающая (при этом монотонно возвра-

ЧИСТОВИК

такой))

$\Rightarrow$ На промежутке $k \geq 2$ она (функция $f(x)$) также монотонно возрастает

$\Rightarrow$ На промежутке $k \in [2; +\infty)$ минимальное значение функции равно

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 = 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 16$$

$\Rightarrow$ Если $a \leq 16$, то неравенство

$2k^2 + 4k \geq a$ выполняется при всех

$k \in [2; +\infty)$; это как раз то, что нам

нужно $\Rightarrow a \in (0; 16]$

Ответ: $a \in (0; 16]$

Задача 4:

Аккуратно рассмотрим все промежутки, на которых значение $[\sqrt[3]{n}]$ постоянно

$$1) n \in [25; 26] \Rightarrow [\sqrt[3]{n}] = 2$$

$\Rightarrow$ Подозит 26 (+1 число)

$$2) n \in [27; 63] \Rightarrow [\sqrt[3]{n}] = 3$$

27 и 63 делятся на 3

$\Rightarrow$ Все числа, делящиеся на 3, в промежутке $[27; 63]$:

$$\frac{63 - 27}{3} + 1 = \frac{36}{3} + 1 = 12 + 1 = 13 \Rightarrow (+13)$$

$$3) n \in [64; 124] \Rightarrow [\sqrt[3]{n}] = 4$$

$$64:4 \text{ и } 124:4 \quad \text{ЧИСТОВИК}$$

$$\Rightarrow \frac{124-64}{4} + 1 = \frac{60}{4} + 1 = 16 \Rightarrow (+16)$$

$$4) n \in [125; 215] \Rightarrow [\sqrt[n]{n}] = 5$$

$$125:5 \text{ и } 215:5$$

$$\Rightarrow \frac{215-125}{5} + 1 = \frac{90}{5} + 1 = 18 + 1 = 19 \Rightarrow (+19)$$

$$5) n \in [216; 342] \Rightarrow [\sqrt[n]{n}] = 6$$

$$216:6 \text{ и } 342:6$$

$$\Rightarrow \frac{342-216}{6} + 1 = \frac{126}{6} + 1 = 21 + 1 = 22 \quad \begin{matrix} (+22) \\ \uparrow \end{matrix}$$

$$6) n \in [343; 511] \Rightarrow [\sqrt[n]{n}] = 7$$

$$343:7 \text{ и } 511:7$$

$$\Rightarrow \frac{511-343}{7} + 1 = \frac{168}{7} + 1 = 24 + 1 = 25 \quad \begin{matrix} (+25) \\ \uparrow \end{matrix}$$

$$7) n \in [512; 728] \Rightarrow [\sqrt[n]{n}] = 8$$

$$512:8 \text{ и } 728:8$$

$$\Rightarrow \frac{728-512}{8} + 1 = 27 + 1 = 28 \Rightarrow (+28)$$

$$8) n \in [729; 999] \Rightarrow [\sqrt[n]{n}] = 9$$

$$729:9 \text{ и } 999:9$$

$$\Rightarrow \frac{999-729}{9} + 1 = 30 + 1 = 31 \Rightarrow (+31)$$

$$9) n \in [1000; 1330] \Rightarrow [\sqrt[n]{n}] = 10$$

$$1000:10 \text{ и } 1330:10$$

$$\Rightarrow \frac{1330-1000}{10} + 1 = 34 \Rightarrow (+34)$$

ЧЕРНОВИК

$$\begin{array}{r}
 n_4 \\
 1 : 1 \checkmark \\
 \begin{array}{r}
 511 \\
 -343 \\
 \hline
 168 \\
 728 \\
 -512 \\
 \hline
 216 \\
 216 \overline{) 8} \\
 -16 \quad 27 \\
 \hline
 56 \\
 1 \quad 1727 \\
 -1331 \\
 \hline
 396 \\
 288 \overline{) 12} \\
 -24 \quad 24 \\
 \hline
 48 \\
 4 \quad 25 \\
 \times 9 \\
 \hline
 225 \\
 18 \quad 82 \\
 4 \quad 72 \\
 \hline
 105 \\
 96 \\
 \hline
 9
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 [3n] \\
 7 \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \downarrow \\ 7 \end{array} : 1 \\
 \text{чисел} \quad 7 \\
 18 \left\{ \begin{array}{l} 8 \\ \downarrow \\ 26 \end{array} : 2 \\
 \text{чисел} \quad 26 \\
 36 \left\{ \begin{array}{l} 27 \\ \downarrow \\ 63 \end{array} : 3 \\
 \text{чисел} \quad 63 \\
 \left\{ \begin{array}{l} 64 \\ \downarrow \\ 124 \end{array} \right. \\
 396 \overline{) 11} \\
 -33 \quad 36 \\
 \hline
 -66
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 168 \overline{) 7} \\
 -14 \quad 24 \\
 \hline
 -28 \\
 \times 81 \quad \times 121 \\
 729 \quad 121 \\
 \hline
 121 \\
 63 \overline{) 331} \\
 -27 \\
 \hline
 36 \\
 2016 \\
 2016 \overline{) 1728} \\
 -1728 \\
 \hline
 288 \\
 144 \quad 112 \\
 \times 112 \\
 + 288 \\
 \hline
 144 \\
 1728 \\
 22 \quad 169 \\
 1 \quad 13 \\
 + 507 \\
 + 169 \\
 \hline
 2197 \\
 12 \quad 16 \\
 \times 6 \\
 \hline
 16 \\
 2025 - 9 = \\
 = 2016 \\
 11 \quad 168 \\
 \times 112 \\
 + 336 \\
 + 168 \\
 \hline
 2016
 \end{array}$$

ЧЕРКОВИК

$$\boxed{x > -3}$$

$$2 \cdot \frac{1}{4} \log_2^2(x+3) \cdot \frac{1}{4} \log_3^2(x+8) \leq$$

$$\begin{array}{r} 511 \overline{) 7} \\ - 48 \overline{) 73} \\ \hline -21 \end{array} \leq \log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) - 2$$

$$\frac{1}{8} \log_2^2(x+3) \cdot \log_3^2(x+8) \leq \log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) - 2$$

$$\log_2^2(x+3) \cdot \log_3^2(x+8) \leq 8 \log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) - 16$$

$$\log_2^2(x+3) \cdot \log_3^2(x+8) \leq 8 \cdot \frac{\ln(x+3)}{\ln 3} \cdot \frac{\ln(x+8)}{\ln 2}$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2} + 2 \quad a > 0$$

$$x, y > 0$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + a \cdot \frac{1}{\frac{x+y}{\sqrt{xy}}} \geq \frac{a}{2} + 2 \quad \begin{array}{l} 8^3 = \frac{3}{36} \\ = 2^8 = 512 \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{3}{36} \\ \times 6 \\ \hline 216 \end{array} \quad \frac{64}{8}$$

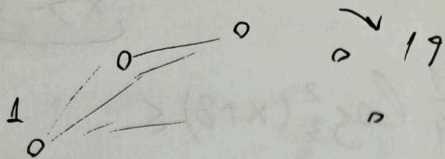
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + a \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}} \geq \frac{a}{2} + 2 \quad \begin{array}{r} 126 \overline{) 6} \\ - 12 \overline{) 21} \\ \hline -6 \end{array}$$

Если $x, y > 0$, то дробь $\frac{x}{y}$ может принимать любые значения в интервале $(0; +\infty)$

$$t = \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \quad t^2 = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} +$$

$$\begin{array}{r} 342 \\ -216 \\ \hline 126 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 49 \\ 7 \\ \hline 343 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \quad 90 \overline{) 5} \\ -5 \overline{) 18} \\ \hline -40 \end{array} \quad \begin{array}{r} 259 \\ 215 \\ -125 \\ \hline 90 \end{array}$$

ЧЕРНОВИК:



$$\frac{4(4^3 - 1)}{2} = 6 \quad \checkmark$$

$$\text{Всего игр было } \frac{20(20-1)}{2} = 190 \text{ игр}$$

 $\Rightarrow$ Каждый игра +3 $\Rightarrow 190 \cdot 3$ очков

$$a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_{20} \quad d=3 \quad \begin{array}{r} 124 \\ -64 \\ \hline 60 \end{array}$$

$$\Rightarrow S = \frac{2a_1 + 3(20-1)}{2} \cdot 20 = 190 \cdot 3$$

$$(2a_1 + 3 \cdot 19) \cdot 10 = 190 \cdot 3 \quad \begin{array}{r} 63 \\ -27 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$2a_1 + 3 \cdot 19 = 19 \cdot 3$$

$$2a_1 = 0 \quad a_1 = 0$$

$$a_2 = 3$$

$$a_3 = 6$$

$$\Rightarrow a_n = 3n$$

$$n=20$$

$$a_{20} = 60$$

Задача №3:

$$2 \log_4^2(x+3) \cdot \log_5^2(x+8) \leq \log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) - 2$$

$$\text{Условия: } \begin{cases} x+3 > 0 \\ x+8 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -3 \\ x > -8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x > -3}$$

$$27 \quad 30$$

$$\frac{33-27}{3} + 1 = 3$$

$$\frac{30-27}{3} + 1 = 2$$