

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

11 класс
Вариант В-1

Место проведения: Ростов - на - Дону

+ +
Рез
+ +
Рез

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы!

по математике

Дубочинцова Льва Дмитриевича

фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«6» апреля 2025 года

Подпись участника

Дубч

№1. Чистовик

Пусть команда, занявшая I место, набрала x очков, а команда, занявшая II место $(x-1)$ очков. Тогда так как количества очков образуют убывающую арифметическую прогрессию команда, занявшая n место имеет $(x-(n-1))$. Команда, занявшая 19 место имеет $(x-18)$ очков. Посчитаем сумму очков по формуле арифметической прогрессии:

$$\left(\frac{x + x - 18}{2} \right) \cdot 20 = (2x - 18) \cdot 10. \text{ С другой стороны всего было сыграно } \frac{20 \cdot 19}{2} =$$

$= 10 \cdot 19$ игр. В каждой игре разыгрывалось по 3 очка, т.е. всего за турнир разыгрывалось $10 \cdot 57$ очков. Сумма очков команд должна быть равна количеству разыгрываемых очков.

$$(2x - 18) \cdot 10 = 10 \cdot 57.$$

$2x - 18 = 57$. Заметим, что команда на I месте сыграла с 19 командами и могла набрать максимум $19 \cdot 3 = 57$ очков.
 $x \leq 57, x \geq 0$ — по условию

$$2x = 57 + 18 = 19(3+3) \Rightarrow x : 19$$

$$2 : 19$$

$0 \leq x \leq 57; x : 19$. Рассмотрим 4 случая:

$x = 0; d = -3$, т.к. прогрессия убывающая $d > 0 \Rightarrow$ противоречие.

$x = 19; d = -1, d > 0 \Rightarrow$ противоречие.

$x = 38; d = 1 \Rightarrow$ пока противоречия нет.

Стр 1 из 15.

$x=57; j=3 \Rightarrow$ чистовик ¹противоречия нет.
 Заметим, что количество очков, набранное командой $= 3k$, k - количество побед $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x \div 3$$

3 При $x=38$ - противоречие, т.к. $x \nmid 3$.
 Остается последний случай: $x=57$
 $j=3$. Он реализуется, когда команда на I месте победила все 19 команд, II место победило все команды, кроме I ... команда на последнем месте ничью не победила.
 Команда на II месте получила $x-j$ очков

$$x-j=54$$

Ответ: 54.

чистовик
№ 3

$$\log_4^2(x+3) = (\log_2^2(x+3)) = \text{ограничение: } x > -3.$$

$$= \frac{1}{4} \log_2^2(x+3)$$

$$\log_3^2(x+3) = \frac{1}{4} \log_3^2(x+8).$$

$$\frac{1}{4} \cdot \log_2^2(x+3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(\log_3^2(x+3))^2}{\log_3^2 2}$$

$$\frac{1}{4} \log_3^2(x+8) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\log_3^2(x+8)}{\log_3^2 2} = \frac{1}{4} (\log_3^2(x+8)).$$

$$2 \log_4^2(x+3) \cdot \log_3^2(x+8) =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{\log_3^2(x+3) \cdot \log_3^2(x+8)}{\log_3^2 2} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \log_3^2(x+3) \cdot \left(\frac{\log_3(x+8)}{\log_3 2} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{8} \log_3^2(x+3) \cdot (\log_2^2(x+8)).$$

Сделаем замену $a = (\log_3(x+3)) \cdot (\log_2(x+8))$.

$$\frac{a^2}{8} \leq a - 2 \cdot 1 \cdot 8 \quad a^2 \leq 8a - 16.$$

$$(a^2 - 8a + 16)^2 \leq 0.$$

$$(a - 4)^2 \leq 0$$

$$a = 4.$$

$$\log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) = 4$$

Мы поставили ограничение: $x > -3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\log_2(x+8)) > \log_2 5 > 0, \text{ т.к. } (\log_2(x+8)) -$$

стр 3 из 15 возрастающая функция.

числовой
~3
 $\log_2(x+8) > 0$

$\log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) = 4$ } $\Rightarrow \log_3(x+3) > 0$

Рассмотрим $f(x) = \log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8)$.

$\log_3(x+3) > 0$ - мы получили это из уравнения

$\log_3(x+3)$ - монотонно возрастает

$\log_2(x+8) > 0$

$\log_2(x+8)$ - монотонно возрастает

$f(x)$ - возрастает при

$x > -2$ - я обосновываю (произведение 2 положительных чисел всегда возрастает).
получим это ограничение

$f(x) = 4$ имеет ≤ 1 решение.

Пусть $x = 1$:

$$\log_3 4 \cdot \log_2 9 = \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \log_2 9 =$$

$$= 2 \cdot \frac{\log_2 9}{\log_2 3} = 4 \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 3} = 4$$

Мы угадали это решение.

Ответ: 1.

стр 4 из 15

Числовой

н 4.

Пусть $25 \leq n \leq 26$ $2 \leq \sqrt[3]{n} < 3$

||

$$[\sqrt[3]{n}] = 2.$$

Чтобы: $n \in A : n : 2$ $25 \leq n \leq 26$ $\Rightarrow n = 26$.

$$n : 2$$

1 число:

Пусть $27 \leq n \leq 63$ $3 \leq \sqrt[3]{n} < 4$

$$[\sqrt[3]{n}] = 3.$$

$n : 3$; $27 \leq n \leq 63$. Кол-во чисел: $3 =$

$$= \frac{63 - 27 + 3}{3} = 21 - 9 + 1 = 13.$$

Пусть $64 \leq n \leq 125$ $4 \leq \sqrt[3]{n} < 5$

$$[\sqrt[3]{n}] = 4.$$

~~$n : 4$ $n = 125$~~

Кол-во чисел: ~~4~~ $= \frac{124 - 64 + 4}{4} = 16$

Пусть $125 \leq n \leq 215$ $5 \leq \sqrt[3]{n} < 6$

$$[\sqrt[3]{n}] = 5.$$

$$n : 5;$$

Кол-во чисел: $5 = \frac{215 - 125 + 5}{5} = 19$

Пусть $216 \leq n \leq 342$ $6 \leq \sqrt[3]{n} < 7$

$$[\sqrt[3]{n}] = 6.$$

$n : 6$ Кол-во чисел: $6 = \frac{342 - 216 + 6}{6} =$

$$= \frac{132}{6} = 22$$

Пусть $343 \leq n \leq 511$

$$7 \leq \sqrt[3]{n} < 8$$

$$[\sqrt[3]{n}] = 7$$

стр 5 из 15

$$n:7 \text{ Кол-во чисел: } 7 = \frac{511 - 343 + 7}{7} = 25.$$

Пусть $512 \leq n \leq 728$

$$\sqrt[3]{8} \leq \sqrt[3]{n} < 9$$

||

$$[\sqrt[3]{n}] = 8$$

$$n:8 \text{ Кол-во чисел: } 8 = \frac{728 - 512 + 8}{8} = 28$$

Пусть $729 \leq n \leq 1000$

999

$$9 \leq \sqrt[3]{n} < 10$$

||

$$[\sqrt[3]{n}] = 9$$

$$n:9 \text{ Кол-во чисел: } 9 = \frac{999 - 729 + 9}{9} = 31$$

$$= 31$$

Пусть $1000 \leq n \leq 1330$

$$10 \leq \sqrt[3]{n} < 11$$

$$[\sqrt[3]{n}] = 10$$

$$n:10 \text{ Кол-во чисел: } 10 = \frac{1330 - 1000 + 10}{10} = 34$$

Пусть $1331 \leq n \leq 1727$

$$11 \leq \sqrt[3]{n} < 12$$

$$[\sqrt[3]{n}] = 11$$

$$n:11 \text{ Кол-во чисел: } 11 =$$

$$= \frac{1727 - 1331 + 11}{11} = 37$$

Пусть $1728 \leq n \leq 2025$

$$12 \leq \sqrt[3]{n} < 13$$

$$[\sqrt[3]{n}] = 12$$

||

$$[\sqrt[3]{n}] = 12$$

стр 6 из 15

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= \frac{\overset{\text{числовой}}{5} (6t^2 - 8) \cdot (t-2) - (2t^3 - 8t) \cdot 1}{(t-2)^2} = \\
 &= \frac{6t^3 - 12t^2 - 8t + 16 - 2t^3 + 8t}{(t-2)^2} = \\
 &= \frac{4t^3 - 12t^2 + 16}{(t-2)^2} = \frac{4(t^3 - 3t^2 + 4)}{(t-2)^2} = \\
 &= \frac{4(t^2(t-2) - (t-2)(t+2))}{(t-2)^2} = \frac{4(t^2 - t - 2)}{t-2} = \\
 &= \frac{4(t+1)(t-2)}{t-2} = 4(t+1) > 0, \text{ т.к. } t > 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{2t^3 - 8t}{t-2} \\
 \frac{2t^3 - 8t}{t-2} &= \frac{2t(t^2 - 4)}{t-2} = \frac{2t(t-2)(t+2)}{t-2} = 2t^2 + 4t
 \end{aligned}$$

$\alpha \leq 2t^2 + 4t$. $f'(t) > 0 \Rightarrow f(t)$ — возрастает.

$2t^2 + 4t$, если $t \geq 2$ $2t^2 + 4t \leq 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 16$.

Пусть $\alpha = 16 + \epsilon$, $\epsilon > 0$.

Пусть уравнение $2t^2 + 4t - \alpha = 0$, имеет корни t_1 и t_2 ; $t_1 + t_2 = \frac{-4}{2} = -2$. По упорядоченности, $t_1 \leq t_2$.
 $t_1 + t_2 = -2 \Rightarrow t_1 < 0$.

$$t_1 t_2 = \frac{-\alpha}{2} = \frac{-(16 + \epsilon)}{2} \quad \left. \begin{matrix} t_1 < 0 \\ t_2 > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow t_2 > 0.$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -2 \\ t_1 t_2 < -8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 t_2 & \begin{cases} t_1 = -2 - t_2 \Rightarrow (-2 - t_2)t_2 < -8 \\ t_1 t_2 < -8 \end{cases} \\
 & \Rightarrow (t_2 + 2)t_2 > 8.
 \end{aligned}$$

$$t_2 + 2t_2 - 8 > 0,$$

$$(t_2 - 2)(t_2 + 4) > 0,$$

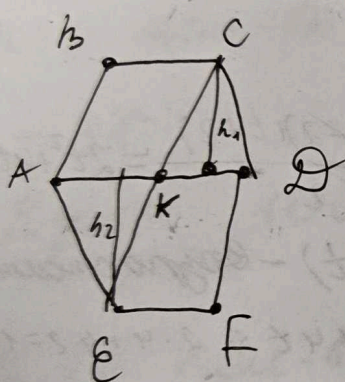
$$t_2 > 2 \quad : (t_2 + 4) > 0$$

Ответ: $\alpha \in (0; 16]$.

стр 8 из 15

числовая
 $t_2 > 2 \Rightarrow$ существует такое $t \in (2; t_2)$,
 такое что, $a \geq 2t^2 + 4t$, это происхо-
 дит как ранее говорили при $a > 16$.
 Если $a \leq 16$ и какая-то пара
 не подходит у неё можно считать
 $t \geq 2$. $f(t) \geq 16$. $a \leq f(t)$ - будет
 выполняться при $a \leq 16$.

Ответ: $a \in [0; 16]$.

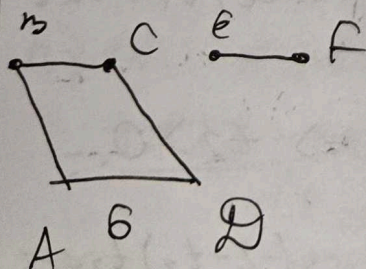


н 2.
 Пусть трапеция лежат
 по разные стороны от
 AD. Проведем CE и
 высоты.

$CK \geq h_1$ (гипотенуза больше
 $EK \geq h_2$ катета, случай
 равенства возни-
 жет при $K \in CE$)

$CE \geq h_1 + h_2 = 16$. - противоречие.

Значит, EF и BC лежат по одну
 сторону



т.к. $\rho(BC; AD) = \rho(EF; AD)$

$\Downarrow$
 $E \in BC$

$F \in BC$.

Между C и E не может быть
 точек B или F, т.к. в этом случае
 $CE > BC$ или $CE > EF$ - а это противоречие
 стр 10 из 15

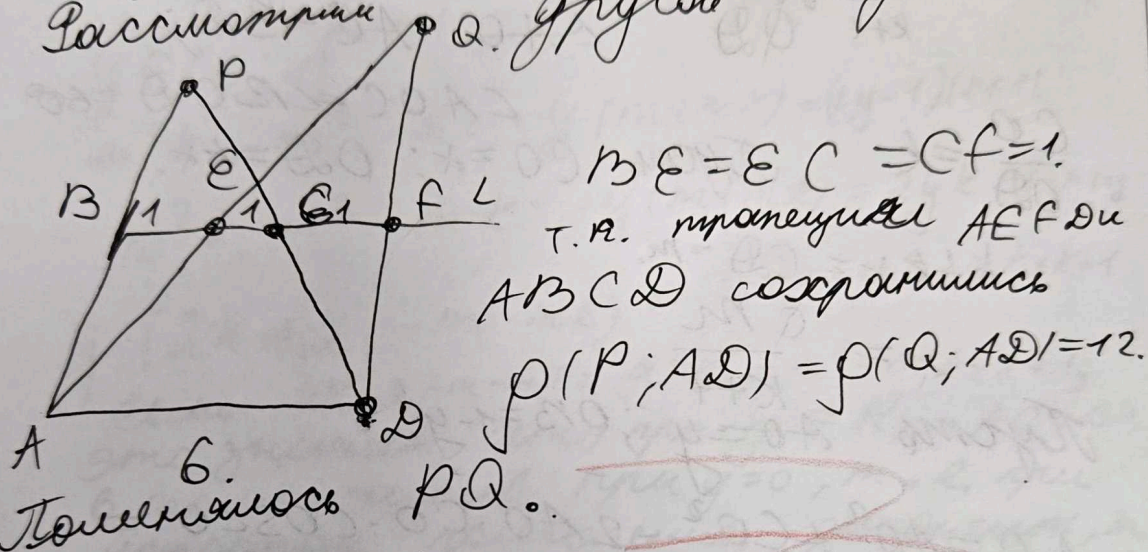
исходник

$$S_{APQD} = \frac{PQ + AD}{2} \cdot \rho(PQ; AD) = \frac{\frac{9}{2} + 6}{2} \cdot 12 =$$

$$= (9 + 12) \cdot 3 = 63.$$

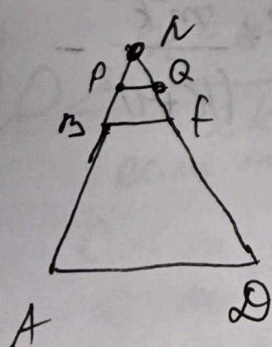
Если BF - будет двигаться по l.
значения $\rho(PQ; AD)$ и PQ не
будет меняться.

Рассмотрим другой случай:



Получилось PQ.

$$\frac{PB}{AB} = \frac{QF}{FD} = \frac{1}{2}.$$



$$\left. \begin{array}{l} BF = \frac{AD}{2} \\ BF \parallel AD \end{array} \right\} \Rightarrow AB = BN;$$

$NF = FD$
т.к. BF - средняя
линия $\triangle NAD$.

$$\frac{QF}{FD} = \frac{1}{2}.$$

По отношению
очевидно, что $NQ = QF = 2FD$.

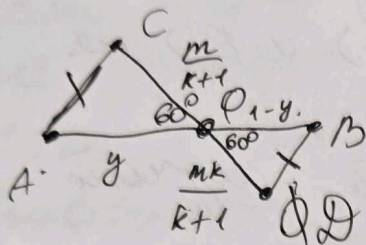
$$\triangle NPQ \sim \triangle NAD \Rightarrow PQ = \frac{1}{4} \cdot AD = 1,5.$$

$$S_{APQD} = \frac{PQ + AD}{2} \cdot \rho(PQ; AD) = \frac{1,5 + 6}{2} \cdot 12 = 45.$$

маленько при движении BF по l PQ и $\rho(PQ; AD)$
стр 13 из 15 Ответ: 45 или 63.

RG

жесть обозначений
никак не влияет
на решение.



$$\angle AOC = \angle BOD = 60^\circ$$

$$\frac{CO}{O_2} = k \quad \text{при } CO = x; \quad O_2 = kx.$$

$$1 + Kx = CQ = m.$$

$$x = \frac{q_m}{k + x}$$

Пусть $AO = y$; $OB = 1 - y$.

$$AC = AO^2 + CO^2 - 2AO \cdot CO \cdot \cos \angle O =$$

$$= BO = BO^2 + OD^2 - 2BO \cdot OD \cdot \cos \angle O$$

$$y^2 + \frac{m^2}{(k+1)^2} - \frac{2my}{k+1} \cdot \frac{1}{2} = (1-y)^2 + \frac{m^2 k^2}{(k+1)^2} - \frac{mk(1-y)}{k+1}$$

$$y^2 + \frac{m^2}{(k+1)^2} - \frac{my}{k+1} = y^2 - 2y + 1 + \frac{m^2 k^2}{(k+1)^2} -$$

$$= \frac{mk(1-g)}{K+1}$$

Comp 14 uz 15

28.72.45-46
(150.3)

числовой
лв.

$$\frac{m^2(k^2-1)}{(k+1)^2} - \frac{mk(1-y)}{k+1} + \frac{my}{k+1} = 2y-1.$$

$$\frac{m^2(k-1)}{k+1} - \frac{mk(1-y)}{k+1} + \frac{my}{k+1} = 2y-1.$$

$$\frac{m^2k - m^2 - mk + mky + my}{k+1} = 2y-1.$$

$$y \in (0; 1).$$

$$m^2k - m^2 - mk + y(m+mk) = (2y-1)(k+1).$$

$$m^2k - m^2 - mk + y(m+mk) = 2yk - 1 - k + 2y$$

$$y(2k+2 - m - mk) = m^2k - m^2 - mk + k + 1$$

если $2k+2 - m - mk = m^2k - m^2 - mk + k + 1$,
это значит, что при $y \in \mathbb{R}$. $AC=BD$,
в том числе при $y=0$, т.е. при
исходном положении, значит, это
невозможно.

$$2k+2 \neq m+mk.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \frac{m^2k - m^2 - mk + k + 1}{2k+2 - m - mk} < 1 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} 2k+2 - (k+1)m \\ \cancel{(k+1)(2-m)} \\ (k+1)(2-m) \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\text{если } m < 2, (2k+2) - m - mk > 0.$$

$$0 < m^2k - m^2 - mk + k + 1 < 2k+2 - m - mk.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m^2(k-1) - m(k-1) + 1 > 0. \\ m^2(k-1) + m - k - 1 < 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m^2k - m^2 - mk + m + 1 > 0. \\ -m^2k + m^2 - m + k + 1 > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} -mk + k + 2 > 0. \\ k(1-m) > -2. \end{array}$$

Возможны и другие случаи
когда $AC=BD$, отрезки не обязательно
пересечься.

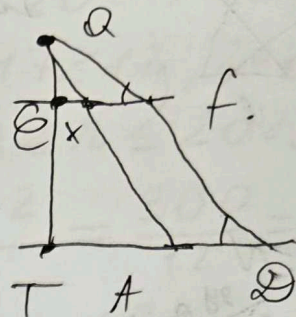
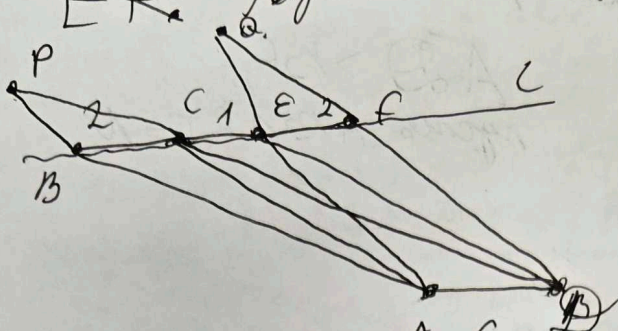
стр 15 из 15

28-72-45-46
(150.3)

Чистовик

~~Здесь укажите общность~~ ^{№2} ~~BC лежит на~~

~~EF~~ Пусть продолжим f на AD до A_2



$EF \parallel AD \Rightarrow \angle QFE = \angle QDA$ (соответств. при сек. fD).

в $\triangle QEF$ и $\triangle QAD$:

$\angle F = \angle D$
 $\angle Q$ - общий $\Rightarrow \triangle QEF \sim \triangle QAD$ (по 2 $\angle$).

Коэффициент подобия =
 $= \frac{EF}{AD} = \frac{1}{3}$

т.к. $EF \parallel AD$ можно $QT \perp AD$, $T \in AD$,
при этом $QT \perp EF$.

$QT \cap EF = X$.

Пусть QX $\frac{QX}{QT} = \frac{1}{3}$ из подобия

$\triangle QEF$ и $\triangle QAD$.

$ET = 8$, т.к. это высота трапеции.

$$\frac{QX}{QX+8} = \frac{1}{3} \quad QX = 4.$$

Аналогично $p(P; Bf) = 4$

$p(P; Bf) = 4 = QX \Rightarrow PQ \parallel AD$.

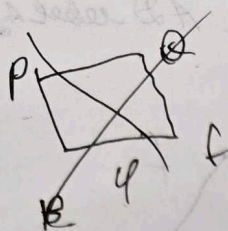
во всех случаях $p(P; Bf) = 4$

$p(PQ; AD) = QT = 12$ - тоже во всех случаях.

стр 11 из 15

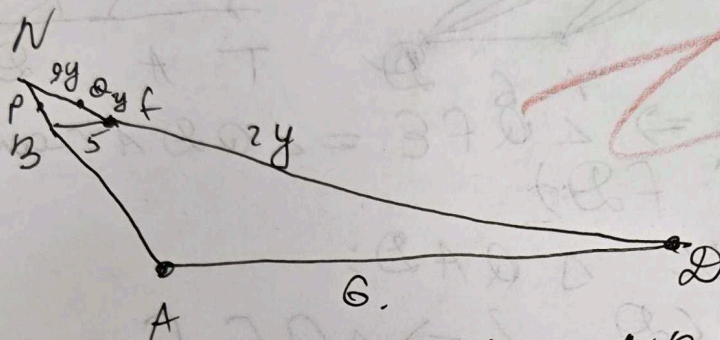
числовик

Рассмотрим $\triangle PBF$



Рассмотрим $\triangle ADF$.

$AD > BF$,
пусть $AB \cap EF = N$



$\triangle NPQ \sim \triangle NBF$; $\triangle NBF \sim \triangle NAD$
т.к. $PQ \parallel BF \parallel AD$.

$$\frac{QF}{QD} = \frac{1}{3} \text{ из } \triangle QEF \sim \triangle QAD$$

$$\frac{QF}{FD} = \frac{1}{2} \text{ пусть } QF = y; FD = 2y$$

$$\triangle NBF \sim \triangle NAD \Rightarrow \frac{NF}{ND} = \frac{BF}{AD} \text{ пусть}$$

$$NQ = x$$

$$\frac{x+y}{x+3y} = \frac{5}{6}$$

$$5x + 15y = 6x + 6y$$

$$\text{из } \triangle NPQ \sim \triangle NBF; PQ = \frac{x+y}{NF} \cdot BF = \frac{9}{2}$$

стр 12 из 15

чистовик
нч

$$1728 \div 12.$$

$$2025 \div 12; 2024 \div 12; 2023 \div 12;$$

$$2022 \div 12; 2020 \div 12; 2021 \div 12;$$

$$2019 \div 12; 2018 \div 12; 2017 \div 12; 2016 \div 12.$$

Таким образом $1728 \leq n \leq 2025$
имеет
$$\frac{2016 - 1728 + 12}{12} = \frac{300}{12} =$$

$$= 25 \text{ чисел, которые } \div 12.$$

Посчитаем итоговое количество:

$$1 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28 + 31 +$$

$$34 + 37 + 25 = 1 + \left(\frac{13 + 37}{2} \right) \cdot 9 + 25 =$$

$$= 26 + 15 \cdot 9 = 225 + 26 = 251$$

Ответ: 251.

числовая
15

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{a}{\frac{x}{\sqrt{xy}} + \frac{y}{\sqrt{xy}}} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{a}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}}$$

Пусть $t = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \geq 2 \sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}} = 2$

(по неравенству средних)
 $t^2 - 2 = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2 - 2 = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

$$t^2 - 2 + \frac{a}{t} \geq \frac{a}{2} + 2 \quad | \cdot t \geq 2$$

$$t^3 - 2t + a \geq \frac{at}{2} + 2t$$

$$t^3 - 4t + a \geq \frac{at}{2}$$

$$t^3 - 4t \geq a\left(\frac{t}{2} - 1\right) \quad | : t$$

Рассмотрим случай $t=2$:

$8 - 8 \geq a\left(\frac{2}{2} - 1\right) \quad 0 \geq 0 \Rightarrow t=2$ - неравенство выполняется при любых $x, y, a > 0$.

Будем рассматривать $t > 2$.

$$t^3 - 4t \geq a\left(\frac{t}{2} - 1\right) \quad | \cdot 2$$

$$2t^3 - 8t \geq a(t - 2) \quad | : (t - 2) > 0$$

$$a \leq \frac{2t^3 - 8t}{t - 2}$$

$f(t) = \frac{2t^3 - 8t}{t - 2}$ Найти значения $\min f(t)$ при $t > 2$

стр 3 из 15

Черновик:

$x \neq y$

$$x=2; \cancel{y=\frac{1}{2}} \quad y=1$$

$$4 + 2 + \frac{1}{2} + a\sqrt{xy} \quad \checkmark$$

$$x=2; y=\frac{1}{2}$$

$$xy = 1:$$

$$x^2 + y^2 + \frac{a}{x+y} \geq \frac{a}{2} + 2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{a}{x + \frac{1}{x}} \geq \frac{a}{2} + 2$$

$$t = x + \frac{1}{x} \quad t^2 - 2$$

$$t^2 - 2 + \frac{a}{t} \geq \frac{a}{2} + 2.$$

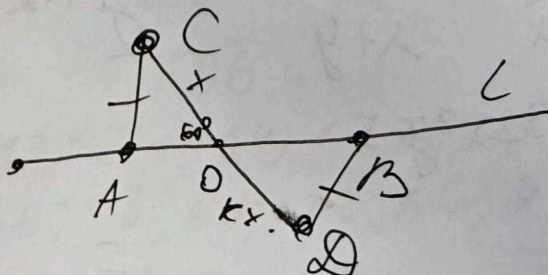
$$t^3 - 2t + a \geq \frac{at}{2} + 2t.$$

$$t^3 - 4t - \frac{a}{2}t^2 + a \geq 0.$$

$$2t^3 - 8t - at + 2a \geq 0$$

$$2t^3 - (8+a)t + 2a \geq 0$$

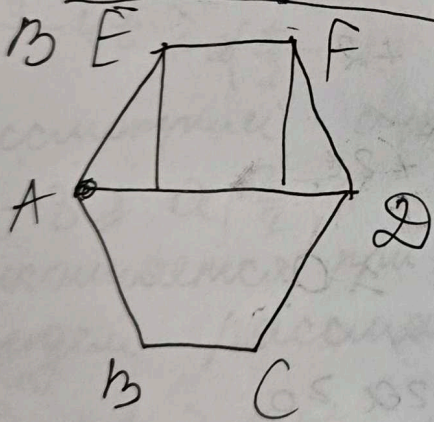
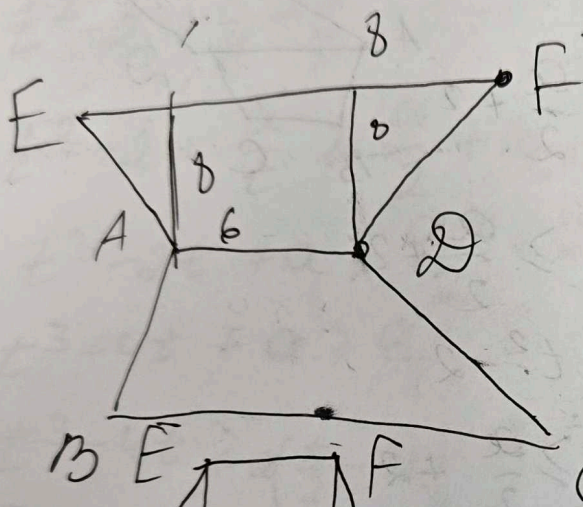
$2t^3$



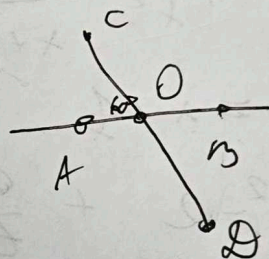
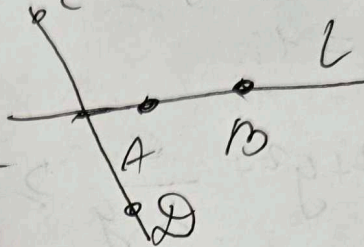
черновики;

$$\frac{x^2+y^2}{xy} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq 2\sqrt{\quad}$$

н 2.



н 6.



$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2} + 2.$$

$$x^3 + x^2y$$

Черновик:

$\sqrt[n]{n}$.

7 8 10

$\sqrt[3]{n} < 3$

27; 30; 33; 36; 39; 42;
45; 48; 51; 54; 57; 60; 63.

64; 68; 72; 76; 80; 84;
88; 92; 96; 100; 104;

108; 112; ~~126~~ 116; 120; 124.

$$\begin{array}{r} 225 \\ \times 15 \\ \hline 1125 \\ 225 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 196 \\ \times 14 \\ \hline 1784 \\ 196 \\ \hline 2744 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1010 \\ 511 \\ - 336 \\ \hline 175 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 169 \\ \times 13 \\ \hline 507 \\ 169 \\ \hline 2197 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2016 \overline{)12} \\ - 12 \\ \hline 81 \\ - 72 \\ \hline 96 \end{array}$$

1728; 1740; 1752; 1764; 1776; 1788; 1800;
1812; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96; 8; 20;
32; 44; 56; 68; 80; 92; 4; 16.

Черновик.

$$x=1; y=1. \quad \text{н5.}$$

2 +

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$k^2$$

$$x=3^k \quad y=9^k.$$

$$x=3; y=9.$$

$$\frac{\sqrt{xy}}{x+y} \leq \frac{1}{2}$$

$$x=2; y$$

$$2 + \frac{1}{2}$$

н1.

$$\log_3 x \cdot \log_9 y =$$

$$= \log_3 y \cdot \log_9 x$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$63 \quad \begin{array}{r} 9 \quad 10 \quad 10 \\ 2016 \\ -1728 \\ \hline 288 \end{array}$$

$$\log_2 8 = \frac{\log_4 8}{\log_4 2}$$

$$9 \quad 21$$

$$\frac{21-9+1}{13}$$

$$x=4; y=1.$$

$$4 + \frac{1}{4} + \frac{a \cdot 2 \cdot a}{5} \geq \frac{a}{2}$$

2

$$\frac{1}{8} \log_3^2 (x+3) \cdot \log_2^2 (x+8) =$$

$$= \frac{1}{8} \log_3^2 4 \cdot \log_2^2 9 = \frac{a}{5}$$

$$= \frac{1}{8} \log$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array}$$

$$\frac{a}{10} \leq 2 + \frac{1}{4}$$

$$\frac{a}{10} \leq \frac{9}{4}$$