0 678167 390007

67-81-67-39
(150.4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант В-1

Дешифр

Место проведения Санкт-Петербург
город

Сдано 14.17

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробъёвы горы"
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Смирнова Арсения Антоновича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1 +1

+1

Дата

«06» АПРЕЛЯ 2025 года

Подпись участника

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается.

дешифр 100 (сто) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

67-81-67-39
(150.4)

Чистовик 1

Задача 1

Решение: Заметим, что всего было сыграно $\frac{19\cdot20}{2}=190$ матчей, в каждом из них разыгрывалось по 3 очка $\Rightarrow$ сумма всех очков, набранных командами – это $190\cdot3=570$. Пусть команда, занявшее 20 место, набрала a очков, а команда, занявшее 19-е место, набрала $a+d$ – очков. Тогда ~~во~~ т.к. очки, набранные командами, образуют арифметическую прогрессию, то команда, занявшее n-е место, набрала $a+(\overset{20-n}{\cancel{n-1}})d$ – очков. Тогда сумма всех очков – это

$a+(a+d)+(a+2d)+\ldots(a+19d)=$

$=20a+\frac{19\cdot20}{2}d=20a+190d=570$

Тогда

$20a+190d=570 \;/:10 \Leftrightarrow$

$2a+19d=57 \Leftrightarrow$

$2a=57-19d$. Тогда правая часть делится на 19 $\Rightarrow$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

и левая часть должна делится на 19
(a≥0) множитель
↑ Разберём несколько случаев. $\vdots 2$

1) $a=0$. Тогда $d=3 \Rightarrow$
команды набрали
0, 3, 6 ..., 57 - очков - это
соответствует случаю, когда
команда ~~с на~~, занявшее
n-е место, выиграла у всех
команд, занявших ниже, чем
n-е место. Тогда второе
место набрало $57-3=54$ очка.

2) $a=19$. Тогда $d=1$, но
тогда команда, занявшее
20-е место, набрала 19 очков,
что невозможно, т.к. команда
в любом матче набирает либо
0 очков, либо 3 очка $\Rightarrow$ общее
число очков команды должно
делиться на 3, а $19 \not\vdots 3$ - ?!

3) $a \geq 38$, тогда ~~прав~~ левая
часть ≥ 76, а правая часть
≤ 57, что невозможно $\Rightarrow$

в чистовик 3

возможен только один случай, когда команда, занявшая 2-е место, набрала 54 очка

Ответ: 54

Задача 5.

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}\geq\frac{a}{2}+2$$ при любых ~~x и y ∈R~~ $x>0$; $y>0$.

$$\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}$$

~~x+y~~ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}=\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}=$

$=\frac{(x+y)^2}{xy}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}-2$. Тогда ~~нужно, чтобы~~ исходное неравенство равносильно

$$\frac{(x+y)^2}{xy}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}\geq 4+\frac{a}{2}.$$

Пусть $\frac{(x+y)}{\sqrt{xy}}=t$. Заметим, что $t\geq 2$, т.к. $\frac{x+y}{\sqrt{xy}}^{*}\geq 2 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0$.

Тогда. ~~t^2+~~ условие переписывается в виде $t^2+\frac{a}{t}\geq 4+\frac{a}{2}$

чистовик

+Заметим также, что ρ может достигать любого значения ≥ 2. Так как если $\sqrt{x}=m$, $\sqrt{y}=n$, то $\rho=\frac{m^2+n^2}{mn}$ и если мы решаем уравнение вида

$$\frac{m^2+n^2}{mn}=k,$$ где $k \geq 2$, то достаточно положить $n=1$, тогда уравнение перепишется в вид

$$m^2-km+1=0$$ и, решая его получаем, что

$$m=\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}>0$$ – подходит.

Теперь нужно понять, когда при всех ~~$x,y>0$~~ $\rho \geq 2$ верно, что

$$\rho^2+\frac{a}{\rho} \geq 4+\frac{a}{2} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{(x}\ \rho^2-4 \geq \frac{a}{2}-\frac{a}{\rho} \Leftrightarrow$$

$$(\rho-2)(\rho+2) \geq \frac{a(\rho-2)}{2\rho} \overset{\rho \geq 2}{\Leftrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{l}\rho=2\\ \rho+2 \geq \frac{a}{2\rho}\end{array}\right. \overset{2\rho>0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}\rho=2\\ 2\rho(\rho+2) \geq a\end{array}\right.$$

Заметим, что если $\rho=2$, то в условии достигается равенство =)

можно считать, что $\rho>2$.

чистовик 5

Заметим, что если $a \le 16$, то $2l(l+2) \ge 2 \cdot 2(2+2) = 16 \ge a \Rightarrow$ исходное неравенство выполняется.

Если же $a > 16$, то подберём l такое, что $2l(l+2) < a$, и при этом, чтобы $2l(l+2) \ne 16$ (так можно сделать потому что $f(l) = 2l(l+2)$ – непрерывна на $[2;+\infty)$ и монотонно возрастает на $[2;+\infty)$, т.к. при увеличении l увеличивается и $l+2 \Rightarrow$ увеличивается и $2l(l+2) \Rightarrow$ она возрастает на $[2;+\infty)$, тогда она достигает все значения от $(16;$ ~~$+\infty$~~ до $+\infty$, на промежутке $[2;+\infty)$) $\Rightarrow$ подобрав такое значение можем понять, что исходное неравенство не выполняется, т.к. если

$$2l(l+2) < a, \text{~~то~~} \overset{l>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\cancel{2}(l+2) < \frac{a}{2l} \overset{l>2}{\Leftrightarrow}$$

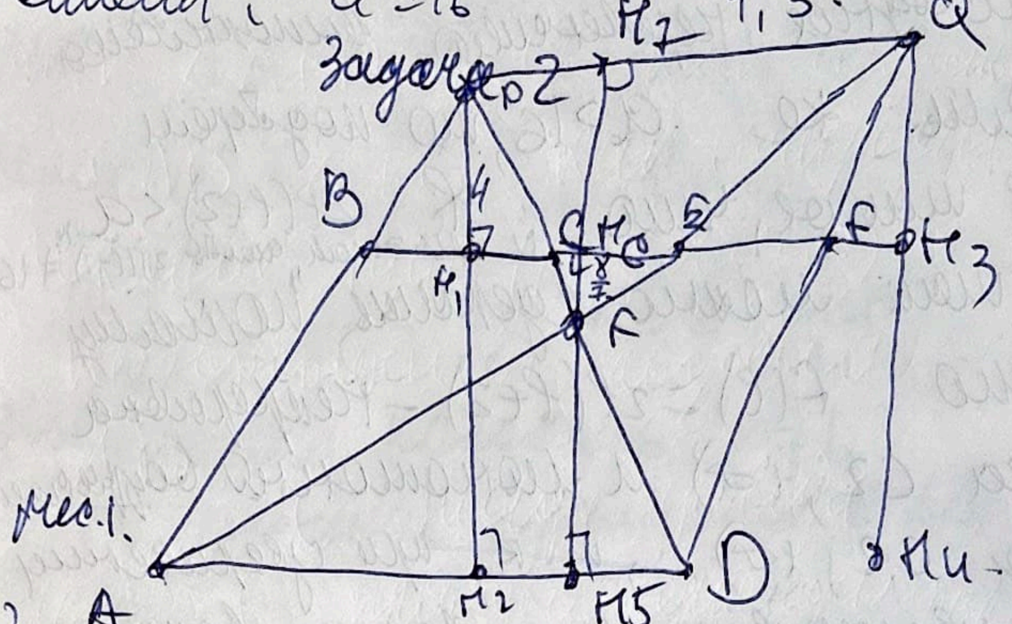
$$l^2 - 4 < \text{~~(a-2~~} \frac{a(l-2)}{2l} \Leftrightarrow l^2 - 4\cancel{l} < \frac{a}{2} - \frac{a}{l} \Leftrightarrow$$

$$l^2 + \frac{a}{l} < \frac{a}{2} + 4, \text{ что}$$

равносильно числовым в исходному => если $a > 16$ неравенство выполняется не при всех положительных x и y.

Ответ: $a \leq 16$

Задача 2



~~Зд в условии написано, что AE и DF - стороны~~

1) Заметим, что $\triangle PBC \sim \triangle PAD$ (т.к. $\angle APD$ - общий; $\angle PBC = \angle PAD$, как соответственные при параллельных прямых), ~~тогда~~ с коэффициентом подобия $\frac{BC}{AD} = \frac{1}{3}$. Тогда

Опустим перпендикуляр PH_1 на сторону BC, т.к. BC и AD - параллельные получаем, что если H_2 точка его пересечения с AD, то $PH_2 \perp AD$. Тогда заметим, что $\frac{PH_1}{PH_2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{PH_2}{PH_1} = \frac{PH_1 + H_1H_2}{PH_1} = 3 \Leftrightarrow$

$H_1H_2 = 8$

$\frac{H_1H_2}{PH_1} = 2 \Leftrightarrow PH_1 = \frac{8}{2} = 4$. Тогда $PH_2 = 4 \cdot 3 = 12$. Аналогично заменив во всех выше равенствах и подобиях буквы P на Q, ~~E на~~ B на E, C на F, H_1 на H_3 и H_2 на H_4 можем получить, что $QH_4 = 12$, т.к. $PH_2 = 12$, то точка P лежит на прямой, параллельной AD, находящейся от неё на расстоянии 12, аналогично точка Q лежит на этой прямой, и т.к. P и Q в одной полуплоскости относительно AD, получаем, что ~~PQ||AD~~ PQ - это и есть эта самая прямая, параллельная AD и находящаяся от неё на расстоянии 12. Тогда $PQ \parallel AD \Rightarrow APQD$ - трапеция. Теперь ~~случ~~ есть 2 случая расположения точек случай 1, как на рис. 1.).

Пусть $(CD) \cap AE = F$.

Тогда $\triangle AFD \sim \triangle CFE$ (т.к. $\angle AFD = \angle CFE$ как вертикальные; $\angle FAD = \angle FEC$, как накрест лежащие при $\parallel$ прямых) $\Rightarrow$ с коэффициентом подобия $\frac{AD}{EC} = 6$. Тогда, проведя через F прямую, перпендикулярную AD, CE и PQ, получим, что и обозначив точки как на рисунке, получим, что $\frac{FH_5}{FH_6} = 6$;

$FH_5 + FH_6 = 8 \Leftrightarrow$

$7H_6 = 8 \Leftrightarrow$

$FH_6 = \frac{8}{7}$. Теперь заметим, что $\triangle CFE \sim \triangle PFQ$ с коэффициентом подобия $\frac{1}{PQ}$ (т.к. $\angle CFE$ — общий; $\angle FCE = \angle FPQ$, как ~~накрест лежащие~~ соответственные при $\parallel$ прямых). Заметим также, что коэффициент подобия - это [illegible]

$$\frac{FH_6}{FH_7} = \frac{\frac{8}{7}}{\frac{8}{7}+4} = \frac{8^{|:4}}{36} = \frac{2}{9}.$$

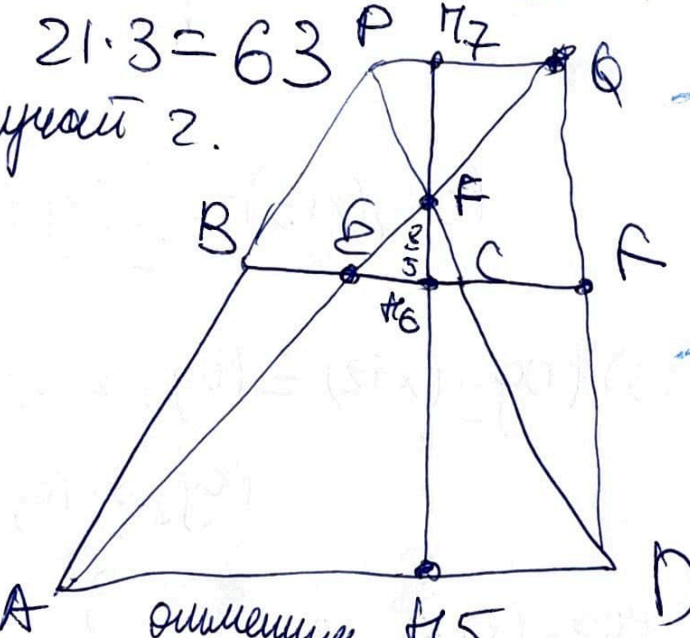
Тогда $\frac{1}{PQ} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow PQ = 4,5.$

Тогда $S_{APQD} = \frac{(4,5+6)}{2} \cdot \cancel{8}\,12 =$

$= \cancel{10,5 \cdot 4 = 21 \cdot 2 = 42}\ 10,5 \cdot 6 =$

$= 21 \cdot 3 = 63$

Случай 2.



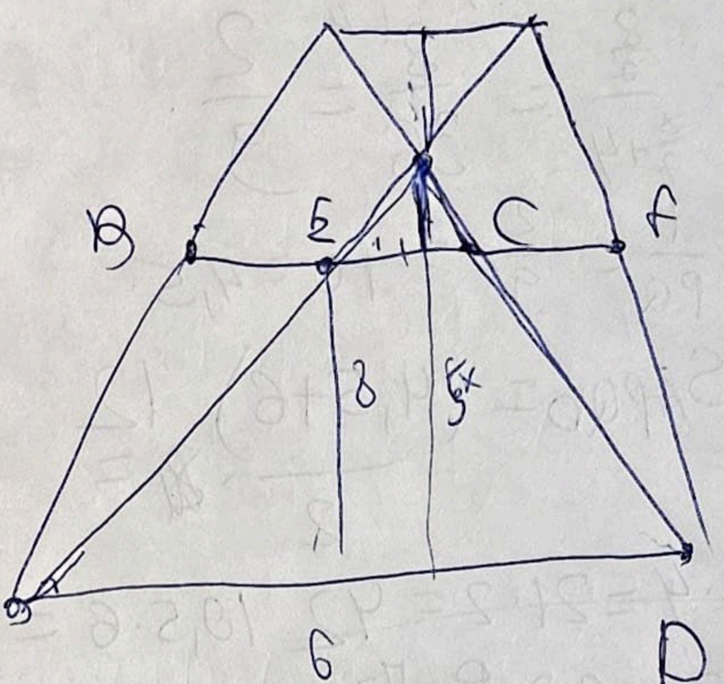
Также ~~заметим~~ отметим, что точки F, H_5, H_6, H_7.

$\triangle EFC \sim \triangle AFD$ с коэффициентом подобия $\frac{1}{6}$, Тогда $\frac{FH_6}{H_6H_5 + FH_6} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow$

$\frac{H_6H_5 + FH_6}{FH_6} = 6 \Leftrightarrow \cancel{\frac{AH_5}{FA}}\ \frac{H_6H_5}{FH_6} = 5 \Leftrightarrow$

$FH_6 = \frac{H_6H_5}{5} = \frac{8}{5}$. Тогда $FH_7 = 4 - \frac{8}{5} = \frac{12}{5}$ $= 2,\cancel{4}$

Черновик.



$\log_4 16 = 2$

$\log_2 16 = 4$

$\log_4(x+3) = \frac{1}{2}\log_2(x+3)$

$\log_3(x+3)\log_2(x+8) = \log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)$

$\log_2 3 \cdot \log_3 8 =$

$= 3.$

$\log_2(x+3) \cdot \log_{(x+3)} 3 =$

$= \log_2 3 \quad \log_2(\underset{-2{,}5}{x+3}) =$

$1 \quad \cdot \log(\cancel{x+8})(x+8)\cdot 3 =$

$\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8) = 4 \quad z4 \quad x = 1$

$\log_2(x+3)\log_3(x+8) = 4$

черновик.

$$\frac{(x+y)^2}{xy}+\frac{a2\sqrt{xy}}{\cancel{xy}\sqrt{x+y}}\geq 4+\frac{a}{2}$$

$p^2+\frac{a}{p}\geq 4+\frac{a}{2}$ ~~$p\geq 4$~~ $p\geq 2$ $p\geq 2.$

$\frac{(x+y)}{\sqrt{xy}}\geq 2.$

$p^2=\frac{a}{p}$ ~~$2\sqrt{p}$~~ $\geq$ $p^2+\frac{a}{p}\geq 4+\frac{a}{2}\Leftrightarrow$

$p^2-4\geq\frac{a}{2}-\frac{a}{p}$ $p^2-4\geq\frac{a}{2}-\frac{a}{p}\Leftrightarrow$

$(\cancel{p-2})(p+2)\geq\frac{a(\cancel{p-2})}{2p}$

$(p+2)^{2p}\geq a$

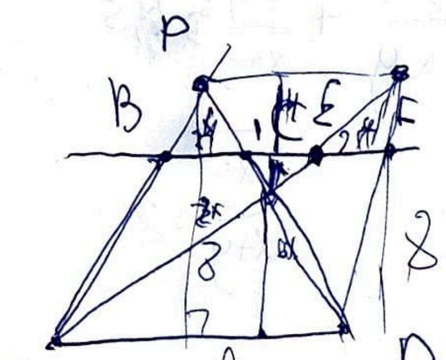
$8\geq a$

$\underbrace{(p+2)2p^2}_{4}\geq a$

16

$p^2+\frac{16}{p}\geq 12$ $\frac{16}{3}$

3 3 черновик. 9+5.



$x=4$

$7x=8$

$x=\frac{8}{7}$

$7x=8$

$5x=8$

$x=\frac{8}{5}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

черновик

$\frac{19\cdot 20}{2}=190$

190
$\times 3$
570

$56\cancel{7}4$

$19\cdot 3$

54

$a \quad a+d \quad a+2d \ \ldots \ a+19d=$

$=20a+5\cancel{70d}\ \frac{19\cdot 20}{2}=$

9 6 30 4 $\cancel{4}\cdot$ $\frac{4\cdot 3}{2}$

18

3.

$20a+190d=570 \quad |:10.$

19 1

$2a+19d=57$

$38+19d$

$2a$

~~19~~ 20 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\geq 2,5$

$\frac{x^2+y^2}{xy}\cancel{2}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\geq 2,5$

$\frac{(x+y)^2}{xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\geq 4,5$

$a^2+\frac{1}{a_1}\geq \frac{\cancel{1}}{2}4,5$

~~$\frac{3}{2}\ 2\sqrt{a}\geq\frac{1}{2}.$~~

$\frac{\sqrt{xy}}{x+y}=2.$

$a\geq\frac{1}{2}.$

Задача 4 листовец 14

Заметим, что между на числами ~~n^3 и (n-~~ промежутке $a=[n^3;(n+1)^3)$ все целые части чисел $\sqrt[3]{x}$, где $x \in a$, равны n, т.к.

$$n \le \sqrt[3]{x} < n+1.$$

Тогда заметим, что

$$[\sqrt[3]{26}] = 2 \text{ и } 26 \vdots 2.$$

$$[\sqrt[3]{25}] = 2 \text{ и } 25 \not\vdots 2.$$

для $x \in [27;64)$: $[\sqrt[3]{x}] = 3 \Rightarrow$ надо посчитать сколько чисел в этом промежутке делятся на 3. это числа 27, 30 ... 63 - ~~их~~ и их столько же сколько чисел от 9 до 21, т.е. $21-9+1 = 13$

для $x \in [64;125)$: $[\sqrt[3]{x}] = 4 \Rightarrow$ здесь интересуют числа, делящиеся на 4 - это числа 64, 68 ... 124. - их соответственно столько же сколько и чисел, от 16 до 31, т.е. 16. Теперь заметим, что на

чистовик

промежутке $[~~\sqrt[3]{x}~~\ x^3; (x+1)^3)$ чисел делящихся на x столько же, сколько чисел между x^2 и ~~x^2~~ $(x^2+3x+3$.,

т.к число $(x+1)^3-1$ делится на x, т.к. $(x+1)^3-1=x\cdot(x^2+3x+3)$ $\Rightarrow$

Тогда на промежутке от x^3 до $(x+1)^3$ (включительно) (все включительно есть ~~ии~~ все числа вида $x\cdot x^2$; $x\cdot(x^2+1)$...

... $x\cdot(x^2+3x+3)$ $\Rightarrow$ их столько же сколько и чисел от x^2 до x^2+3x+3, т.е. $x^2+3x+3-x^2+1=$

$=3x+4$. Тогда заметим, что $12^3=1728$, а $13^3=2197$ $\Rightarrow$ просуммировав $3x+4$, для всех x от 3 до 11 мы получим

$3\cdot(3+4+...+11)+4\cdot 9=$

$=3\cdot 63+36=189+36=225$

А на промежутке от

$[1728;$ ~~до~~ $; 2025]$

нужно найти все числа,

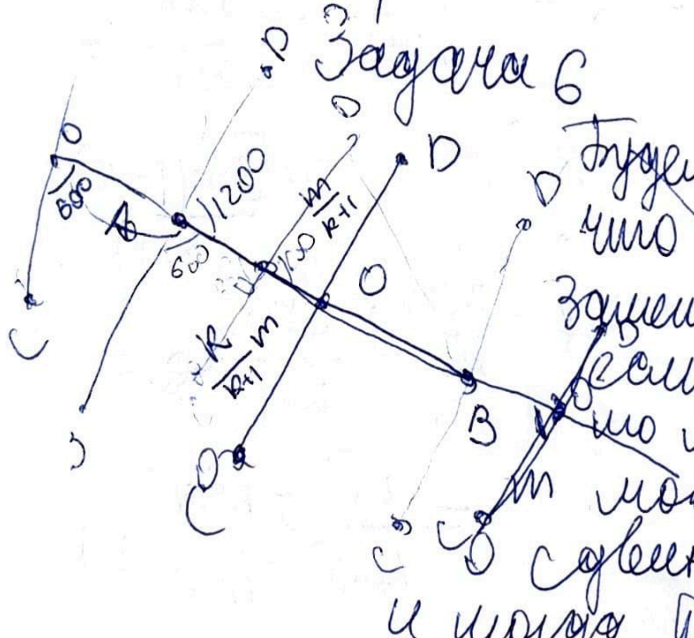
меньших 16
делящиеся на 12. Заметим, что
2016 ⋮ 12 и 2016 : 12 = 168 =>

12
8
72
96

на промежутке от 1728 до 2025 чисел, делящихся на 12 столько же, сколько и чисел от 144 до 168, а именно 168 − 144 + 1 = 25. Следовательно всего чисел, удовлетворяющих условиям, описанным в задаче 225 + 25 + 1 = 251.

Ответ: 251

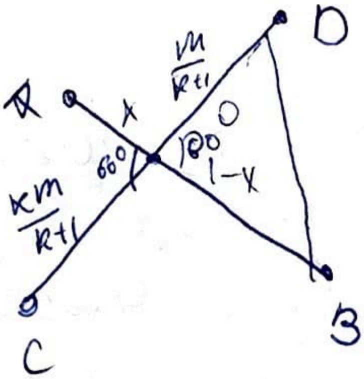
Задача 6

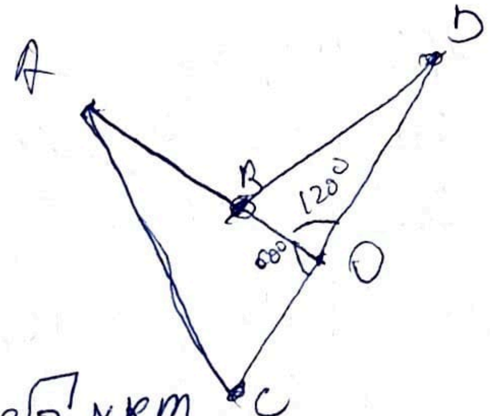


Будем считать, что k < 1

Заметим, что если k = 1, то при новом можно точку совместить в середину и тогда получится параллелограмм ACBD =>
AC = BD

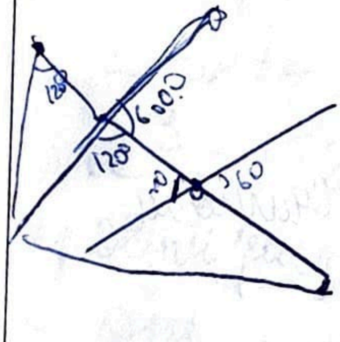
черновик





$$\cancel{x}^2 + \frac{k^2m^2}{(k+1)^2} - \sqrt{3}\frac{xkm}{k+1} =$$

$$= \cancel{x}^2 - 2x + 1 + \frac{m^2}{(k+1)^2} - \sqrt{3}\frac{xm}{k+1}$$



$$2x + \frac{\sqrt{3}xm}{k+1} - \frac{\sqrt{3}xkm}{k+1} =$$

$$= x\left(2 + \frac{\sqrt{3}m(1-k)}{k+1}\right.$$

$$2 + \frac{\sqrt{3}m}{k+1} - \frac{\sqrt{3}km}{k+1} =$$

$$\|$$

$$= \frac{m^2}{(k+1)^2} - \frac{k^2m^2}{(k+1)^2} + 1$$

$$\| \qquad \|$$

$$\frac{3(1-k)^2}{(k+1)^2} + \frac{4(1-k)}{k+1} \qquad \frac{m^2(1-k)}{k+1} - \frac{\sqrt{3}m(1-k)}{k+1} - 1$$

шестовик 10

Аналогично QFP

$\Delta EFC \sim \Delta$ ~~PFQ~~ (по двум углам

$\angle EFC = \angle PFQ$ - вертикальные;

$\angle FEC = \angle FQP$ - накрест лежащие при ∥ прямых)

с коэффициентом подобия

$$\frac{1}{PQ} = \frac{FH_6}{FH_7} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{12}{5}} = \frac{2}{3},$$

$$\begin{array}{r} 7{,}5 \\ \times\ 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

тогда $PQ = 1{,}5$.

Тогда $S_{APQD} = \frac{(1{,}5+6)}{2} \cdot 12 =$

$= 6 \cdot 7{,}5 = 45$.

Ответ: $S_{APQD} = 63$ или $S_{APQD} = 45$.

Задача 3

Заметим, что $\log_4(x+3) = \frac{1}{2}\log_2(x+3)$ по свойствам логарифмов

и $\log_9(x+8) = \frac{1}{2}\log_3(x+8)$.

Тогда $2\log_4^2(x+3)\log_9^2(x+8) =$

$= \frac{1}{8}\log_2^2(x+3)\log_3^2(x+8)$

Н чистовик. и

Заметим также, что $\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8) =$ докажем это ~~это~~

$= \log_3(x+8)\cdot\log_2(x+3)$.

можно проверить, домножив левую и правую часть на $\log_{(x+3)}3$. Заметим, что ~~все~~

$x+3>0$ и $x+8>0$, а если $x+3=1$, то $\log_3(x+3)=0$ и $\log_2(x+3)=0$ $(\Rightarrow)$ выражения равны между собой и равны 0, аналогично, если $x+8=1$, то левая и правая части равны 0 за счет того, что $\log_2(x+8)=0$ и $\log_3(x+8)=0$. Теперь считаем, что $x+3\ne1$ и $x+8\ne1$.

Тогда, домножив левую и правую части на $\log_{(x+3)}3$ и $\log_{(x+8)}3$ (они существуют т.к. $x+3>0$ и $x+8>0$ и $x+3\ne1$, $x+8\ne1$), получим, что левая часть равна

чистовик

12

$\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)\cdot\log_{(x+3)}3\cdot\log_{(x+8)}3=$

$1 \quad \log_2 3$

$=\log_2 3$, а правая часть равна $\log_2 3$

$\log_3(x+8)\cdot\log_2(x+3)\cdot\log_{(x+3)}3\cdot\log_{(x+8)}3=$

$=\log_2 3 \Rightarrow$ При домножении на одно и то же число левую и правую части оказались равны $\Rightarrow$ они и изначально были равны. Теперь пусть $\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)=x$. Тогда нужно решить неравенство

$\frac{1}{8}x^2 \le x-2 \Leftrightarrow$

$x^2 \le 8x-16 \Leftrightarrow$

$x^2-8x+16 \le 0 \Leftrightarrow$

$(x-4)^2 \le 0 \Leftrightarrow$

$x=4$.

Тогда $\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)=4$.

Заметим, что $x>-3 \Rightarrow$

$\log_3(x+8) \ge \log_3 5 > 0$. Тогда заметим,

что если $\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)=4$,
то $\log_2(x+3)>0$, т.к. $\log_3(x+8)>0$ $\Rightarrow$
$x>-2$. Тогда заметим,
что $\log_2(x+3)\uparrow$ на $(-2;+\infty)$
и $\log_3(x+8)\uparrow$ на $(-2;+\infty)$ $\Rightarrow$
и т.к. $\log_2(x+3)>0$ на $(-2;+\infty)$
и $\log_3(x+8)>0$ на $(-2;+\infty)$,
то $\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)$ возрастает
на $(-2;+\infty)$ $\Rightarrow$ ~~у него~~ у
уравнения $\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)=4$
не может быть больше 1 решения
(т.к. у $f(x)=const$ и $f(x)$-монотонная
не более 1 решения). Заметим,
что $x=1$ подходит, т.к.
$\log_2 4=2$ и $\log_3 9=2$ $\Rightarrow$
$\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)=4$ $\Rightarrow$
$x=1$.

чистовик

Ответ: $\{1\}$

13

чистовик 17

Заметим, ~~что~~ при ~~если~~ $k > 1$, то можно отразить точку O относительно середины отрезка и тогда напишем теорему косинусов. Заметим, что тогда

$$x^2+\left(\frac{k}{k+1}m\right)^2-\sqrt{3}\frac{xkm}{k+1}=AC,$$

где x — расстояние от A до O, $BD=(1-x)^2+\left(\frac{m}{k+1}\right)^2-\sqrt{3}x\frac{m}{k+1}$, если O на AB

и $(x+1)^2+\left(\frac{m}{k+1}\right)^2+\sqrt{3}x\frac{m}{k+1}$.

Тогда $AC-BD$ — это ~~су~~ кусочно-линейная функция

одна с коэффициентами

$$2-\frac{\sqrt{3}km}{k+1}+\frac{\sqrt{3}m}{k+1},$$

вторая с коэффициентом $-2-\frac{\sqrt{3}km}{k+1}-\frac{\sqrt{3}m}{k+1}$

т.е. с отрицательным. Теперь

если $2-\frac{\sqrt{3}km}{k+1}+\frac{\sqrt{3}m}{k+1}<0$,

то достигнемо значение 0,

это происходит, если.

$+\,2(k+1)-\sqrt{3}km(k+1)+\sqrt{3}m<0$

$\sqrt{3}m-\sqrt{3}k(k+1)>2k+1$

$m>\frac{2k+1}{\sqrt{3}-\sqrt{3}k(k+1)}$

если менее то никогда.

Ответ: $m>\frac{2k-(1}{\sqrt{3}-\sqrt{3}k(0-(1}$ | числом.

18