0 243979 320001

24-39-79-32
(150.5)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

+1 доп. бланк

Вариант 11, В-1

Место проведения Ростов-на-Дону
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Попкова Дмитрия Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

« 6 » апреля 2025 года

Подпись участника

24-39-79-32 (150.5)

100 (сто)

№1. $3\cdot\frac{20\cdot 19}{2} = S = 3\cdot 10\cdot 19 = 30\cdot 19.$

черновик

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{20} = \frac{a + a + 19d}{2}\cdot 20.$

$20(2a+19d) = 3\cdot 20\cdot 19 \Rightarrow 2a + 19d = 3\cdot 19.$

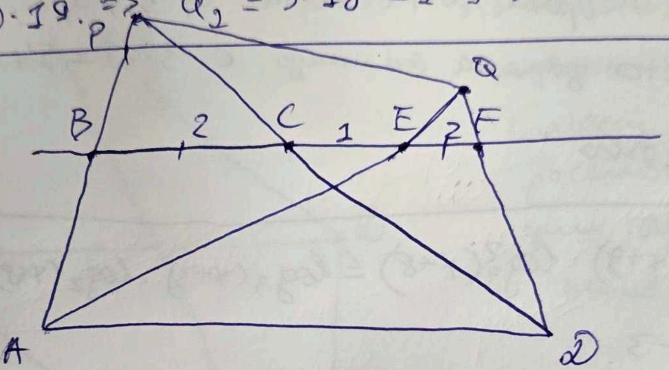
$2a = (3-d)\cdot 19.$

$a \vdots 3,\ a \vdots 19,\ d \vdots 3.$

$S \geq 0 + 3 + \ldots + 3\cdot 19 = \frac{3\cdot 19 + 0}{2}\cdot 20 = 10(3\cdot 19) =$

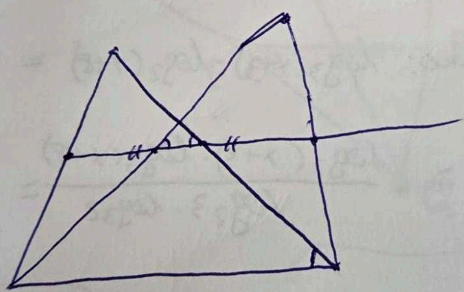
$= 30\cdot 19 \Rightarrow a_2 = 3\cdot 18 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 27\cdot 2 = 54.$

№2.



$AD = 6.$

$h = 8$



№3. $2\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8) \leq \log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8) - 2.$

ОДЗ: $x > -3$

$2\cdot\frac{1}{4}\log_2^2(x+3)\cdot\frac{1}{4}\log_3^2(x+8) \leq \log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8) - 2.$

~~$\log_2$~~ $\cancel{\frac{1}{16}}\ \frac{1}{8}\left(\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)\right)^2 \leq \log_3(x+3)\log_2(x+8) - 2.$

$(\alpha-4)^2 =$

$\frac{\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)}{\log_2 3\cdot\log_3 2} - 2 =$

$= \alpha^2 - 8\alpha + 16$

$x > -3.$

$x+3 > 2$

$x > -1.$

$\frac{1}{8}\cdot\alpha^2 \leq \alpha - 2 \Rightarrow \alpha^2 \leq 8\alpha - 16$

$\alpha^2 - 8\alpha + 16 \leq 0$

$(\alpha-4)^2 \leq 0 \Rightarrow \alpha = 4$ $\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8) = 4.$

24-39-79-32

чистовик

№1. Заметим, что сумма всех очков, которые заработали команды,

$S \geq 0+3+6+\ldots+3\cdot 19 = \frac{3\cdot 19+0}{2}\cdot 20 = 30\cdot 19.$ (*)

С другой стороны, ~~в каждом матче разыгрывалось по 3 очка~~ и в общую копилку прибавлялось по 3 очка за матч. Каждая команда сыграла с каждой $\Rightarrow$ кол-во матчей $n = \frac{20\cdot 19}{2} = 10\cdot 19$.

$S = 3\cdot n = 30\cdot 19 \Rightarrow$ выполняется неравенство (*)

$\Rightarrow$ Команды набрали в точности: $0, 3, 6, 9, \ldots, 3\cdot 19$ очков.

Второе место заняла команда с $3\cdot 18 = 54$ очками.

Ответ: 54 очка

№3. $2\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8) \leq \log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8) - 2.$

ОДЗ: $x > -3$.

Заметим, что на ОДЗ верно: $\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8) =$

$= \frac{\log_2(x+3)}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_3(x+8)}{\log_3 2} = \frac{\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)}{\log_2 3\cdot\log_3 2} =$

$= \log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8) = t$

~~$\log_4^2 \log$~~ $\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8) = \frac{1}{16}\log_2^2(x+3)\log_3^2(x+8) =$

$= \frac{1}{16}t^2 \Rightarrow$ неравенство примет вид:

$\frac{1}{8}t^2 \leq t-2 \Rightarrow \quad t^2 - 8t + 16 \leq 0 \Rightarrow (t-4)^2 \leq 0 \Rightarrow$

$t = \log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8) = 4.$ На ОДЗ: $x > -3$

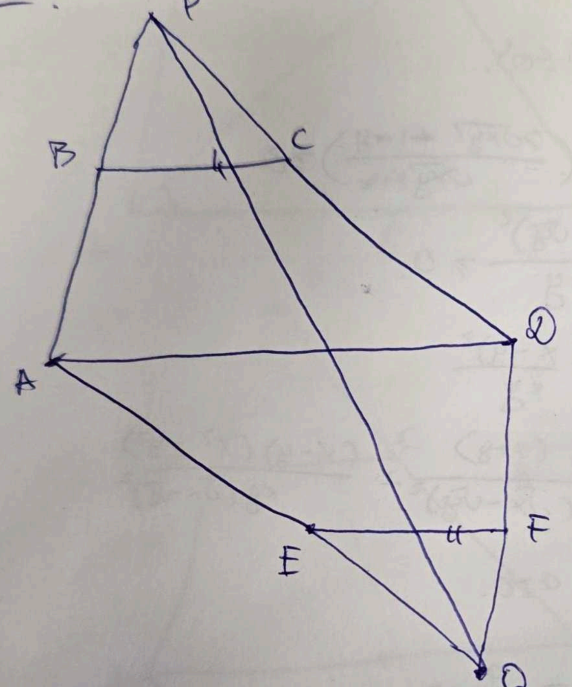
$x+8 > 5 \Rightarrow \log_3(x+8) > 1$

При $\log_2(x+3) < 0$ решений не будет, т.к. произведение положительного и отрицательного чисел не может дать положительное число. $\log_2(x+3) \neq 0$ – очевидно $\Rightarrow$

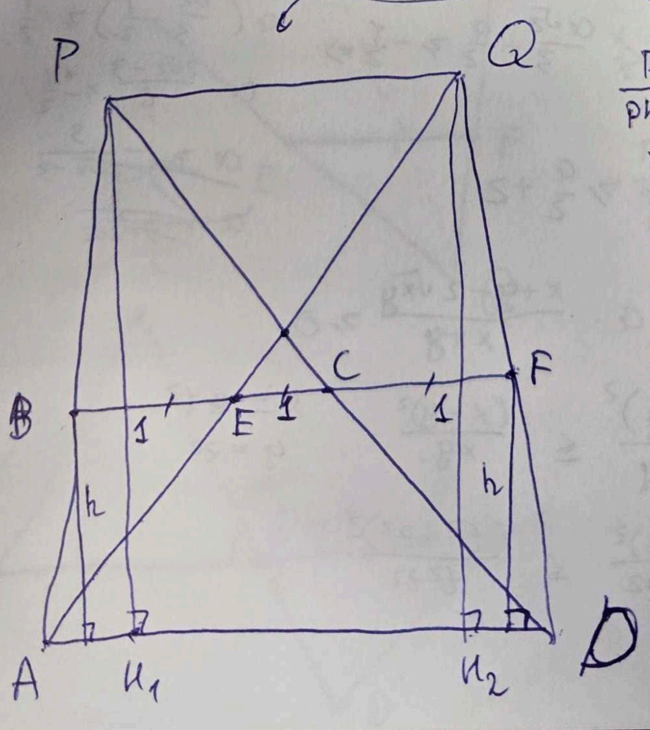
$\log_2(x+3) > 0 \Rightarrow \log_2(x+3), \log_3(x+8)$ – монотонно возрастают, а также на рассматриваемых для поиска решения участках положительны. Значит, их произведение — тоже монотонно возрастающая функция, которая имеет единственное пересечение с константой 4 в точке $\underline{x=1}$: $\log_2 4 \cdot \log_3 8 = 2 \cdot 2 = 4$. $\boxed{\text{чистовик}}$

Ответ: 4.

№3. Рассмотрим возможную конфигурацию:



В данном случае APQD не явл. четырёхугольником, поэтому имеет смысл рассмотрение ситуации, представленной ниже:



Из △PAD и △AQD:

~~$\frac{PH_1}{} \; \frac{BC}{AD} \Rightarrow \frac{1}{3}h$~~

$$\frac{PH_1}{PH_1-h} = \frac{AD}{BC} = \frac{6}{2} = 3$$

$BH_1 = 3PH_1 - 3h \Rightarrow$

$3h = 2PH_1 \Rightarrow PH_1 = \frac{3}{2}h$

$$\frac{QH_2}{QH_2-h} = \frac{AD}{FE} = \frac{6}{2} = 3 \Leftrightarrow$$

$QH_2 = \frac{3}{2}h \Rightarrow$

$QH_2 = PH_1$, $PQ \parallel AD \parallel BF$.

Также: $\frac{h}{QH_2} = \frac{FD}{FD+QD} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

~~$3FD = 2FD + 2QD$~~

$FD = \frac{2}{3}QD$.

см. сл. лист. →

24-39-79-32
(150.5)

№5. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\cdot\sqrt{xy}}{x+y}\geqslant\frac{a}{2}+2.$

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$

$2-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\leq 0$

$a>0$

черновик

$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}\Rightarrow\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow$

$\frac{a\cdot\sqrt{xy}}{x+y}\leq\frac{a}{2}$; $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2.$

$a\left(\underbrace{\frac{\sqrt{xy}}{x+y}-\frac{1}{2}}_{\leq 0}\right)\geqslant 2-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

$a\cdot(\leq 0)\geqslant(\leq 0).$

$\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}+a\left(\frac{2\sqrt{xy}-x-y}{\sqrt{xy}\,x+y}\right)\geqslant 0.$

$\frac{(x-y)^2}{xy}-a\cdot\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x+y}\geqslant 0.$

$a\,\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x+y}\leq\frac{(x-y)^2}{xy}$

$a\leq\frac{(x-y)^2\cdot(x+y)}{x\,y\,(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=\frac{(x-y)(x^2-y^2)}{xy(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$

$x=y$: $\frac{ax}{2x}\geqslant\frac{a}{2}\Rightarrow a\geqslant 0.$

$y=2x$: $\frac{1}{2}+2+\frac{a\sqrt{2}}{3}\geqslant\frac{a}{2}+2$

$\frac{a\sqrt{2}}{3}-\frac{a}{2}\geqslant-\frac{1}{2}\Rightarrow$ $a\left(\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{2}\right)\geqslant-\frac{1}{2}.$

$a\cdot\frac{2\sqrt{2}-3}{6}\geqslant-\frac{1}{2}$

~~$a\geqslant-\frac{3}{2\sqrt{2}-3}$~~

~~$a\leqslant\frac{3}{3-2\sqrt{2}}$~~

$\frac{x^2+y^2}{xy}+a\cdot\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\geqslant\frac{a}{2}+2$

$\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}-a\cdot\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x+y}\geqslant 0.$

$a\cdot\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x+y}\leq\frac{(x-y)^2}{xy}.$

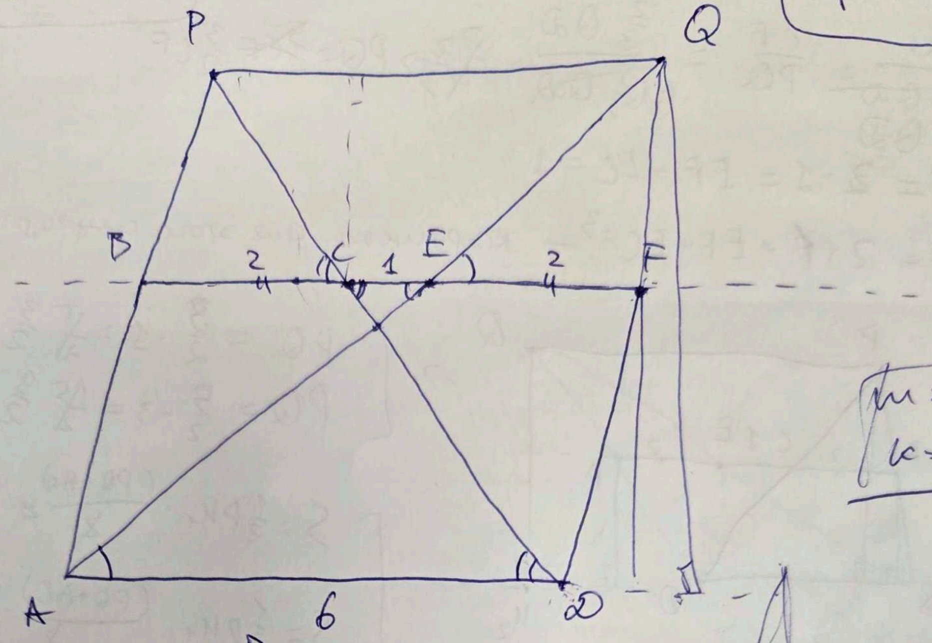
$x=t^2$

$y=z^2$

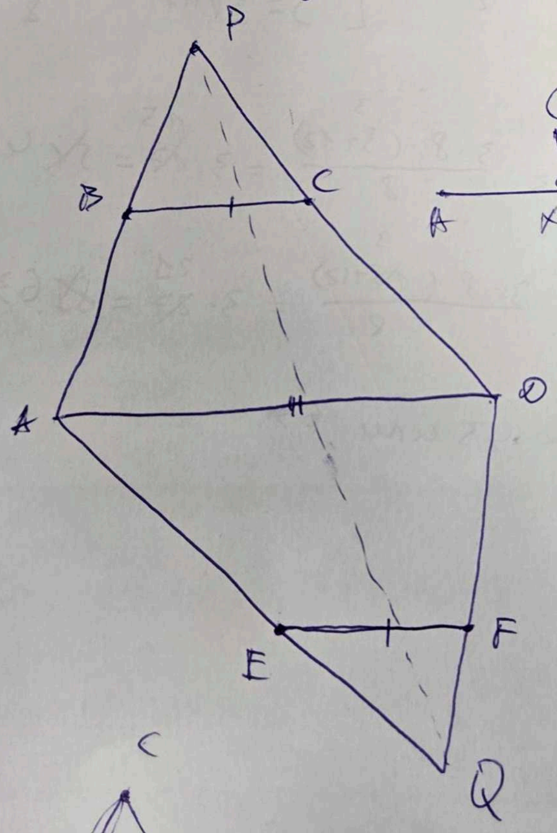
$a\cdot\frac{(t-z)^2}{t^2+z^2}\leq\frac{(t^2-z^2)^2}{t^2z^2}$

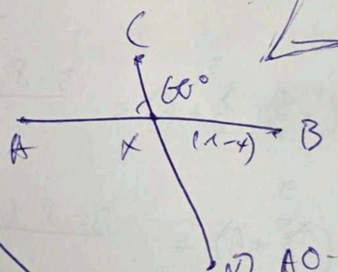
№2.

черновик



$m = 2$
$k = 1.$





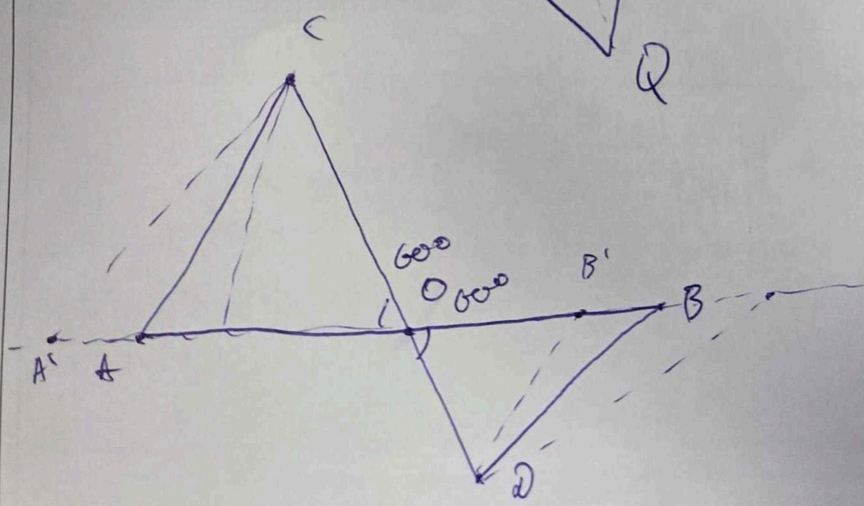
AO·OB ∪ CO·OD

$CO \cdot OD = \frac{km^2}{(k+1)^2}$

$x(1-x)$

$\cancel{\frac{x}{2} = \frac{1}{2}}$ $\quad \frac{1}{4} \geq x - x^2$

$\frac{km^2}{(k+1)^2} = \frac{1}{4}$

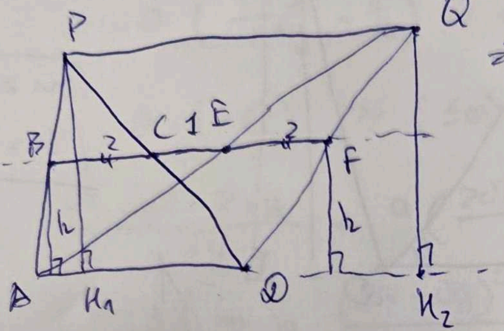


чистовик

№ ~~7~~ 2. продолжение

$$\frac{FD}{\cancel{FD+QD}\; QD} = \frac{CF}{PQ} = \frac{\frac{2}{3}QD}{\cancel{\frac{5}{3}}\,QD} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ = \frac{3}{2}CF$$

$$\left[\begin{aligned} &CF = 2-1 = EF-EC = 1 \\ &CF = 2+1 = EF+EC = 3 \end{aligned}\right.$$ — картинка для этого случая:



$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} &PQ = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2} \\ &PQ = \frac{3}{2}\cdot 3 = \frac{9}{2} \end{aligned}\right.$$

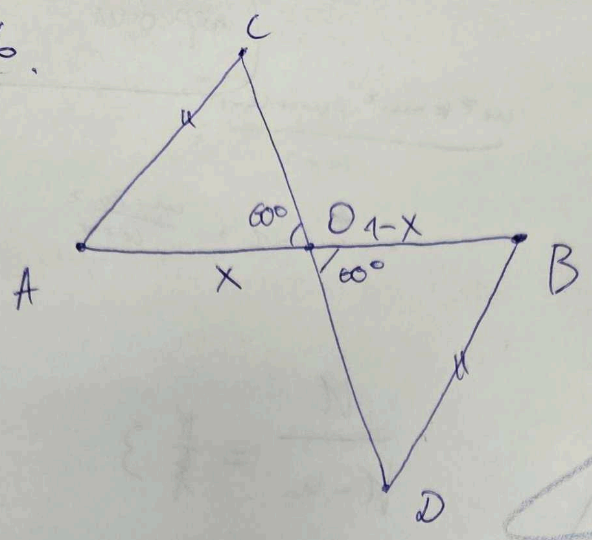
$$\left[\begin{aligned} &S = \frac{1}{2}PH_1 \cdot \frac{(PQ+AD)}{2} \\ &S = \frac{1}{2}PH_1 \cdot \frac{(PQ+AD)}{2} \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &S = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 8 \cdot \left(\frac{3}{2}+6\right) = \frac{3\cdot 8\cdot(3+12)}{8} = 3\cdot 15 = 45 \\ &S = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 8\left(\frac{9}{2}+6\right) = \frac{3\cdot 8\cdot(9+12)}{8} = 3\cdot 21 = 63 \end{aligned}\right.$$

Ответ: ~~51 или 81~~ 45 или 63.

черновик

№6.



~~Рассмотрим положение, когда $AC = BD$. Пусть длина $AO = x$, тогда $BO = 1 - x$. $CO = k\cdot OD$ => $OD(k+1) = m$ => $OD = \frac{m}{k+1}$. Т. косинусов для ΔAOC и ΔBOD:~~

~~$BD^2 = OB^2 + OD^2 - OB\cdot OD = AC^2 = AO^2 + OC^2 - AO\cdot OC.$~~

~~$(1-x)^2 + \frac{m^2}{(k+1)^2} - (1-x)\cdot\frac{m}{k+1} = x^2 + \frac{k^2m^2}{(k+1)^2} - \frac{xmk}{k+1}$~~

$\cancel{2x - 1 + \frac{xm}{k+1} - \frac{m}{k+1} + \left(\frac{m}{k+1}\right)^2 =}$

$\cancel{2x + \frac{xm(k+2)}{k+1} = 1 + \frac{m}{k+1} - \frac{m^2}{(k+1)^2} + \frac{k^2m^2}{(k+1)^2}}$

$\cancel{x(2 + m) = 1 + \frac{m}{k+1} - \frac{m(k-1)}{k+1} = \frac{k+1-m(2-k)}{k+1}}$

~~$-2x + 1 + \frac{xm}{k+1} + \frac{xmk}{k+1} = \frac{k^2m^2}{(k+1)^2} + \frac{m}{k+1} - \frac{m^2}{(k+1)^2}$~~

~~$-2x + xm = \frac{m^2(k-1)}{k+1} + \frac{m}{k+1} - 1$~~

~~$x(m-2) = \frac{m^2(k-1) + m - k - 1}{(k+1)}$.~~

~~При $m = 2$, $k = 1$ – условие выполнено (если O – центр AB)~~

~~При $m \neq 2$: $0 < \frac{m^2(k-1) + m - k - 1}{(m-2)(k+1)} < 1$~~

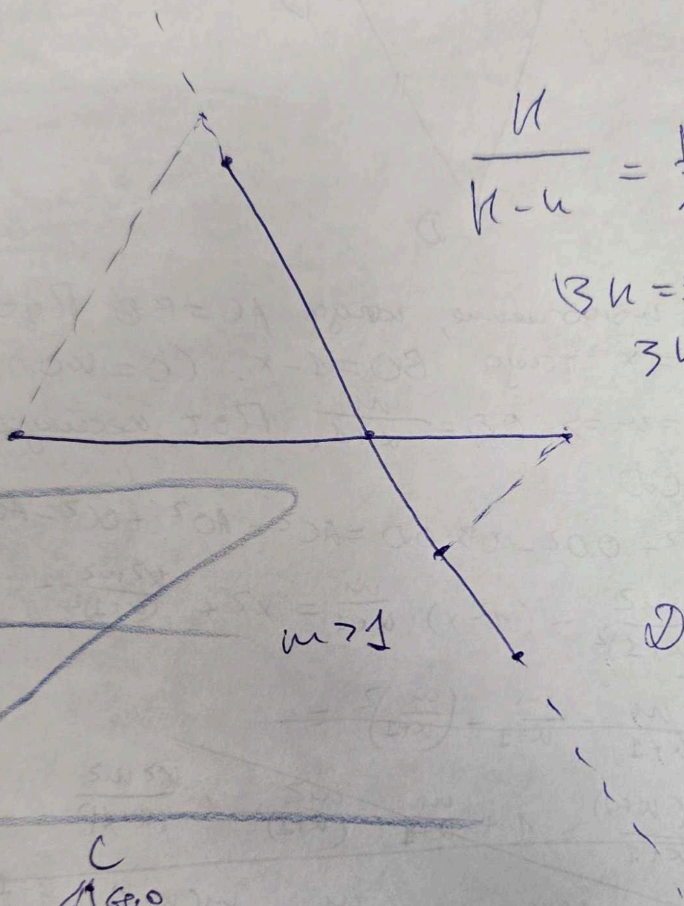
~~$D_m = 1 + 4(k-1)(k+1) = 1 + 4k^2 - 4 = 4k^2 - 3$~~

черновик

$(1-x)^2+$

$$\frac{m^2k-m^2+m-k-1}{k+1}=$$

$$=m^2-1+\frac{m-2m^2}{k+1}$$



$$\frac{H}{H-h}=\cancel{\tfrac{1}{3}}\,3$$

$3h=3H-3h$

$3h=2H$

$h=\frac{2}{3}H.$

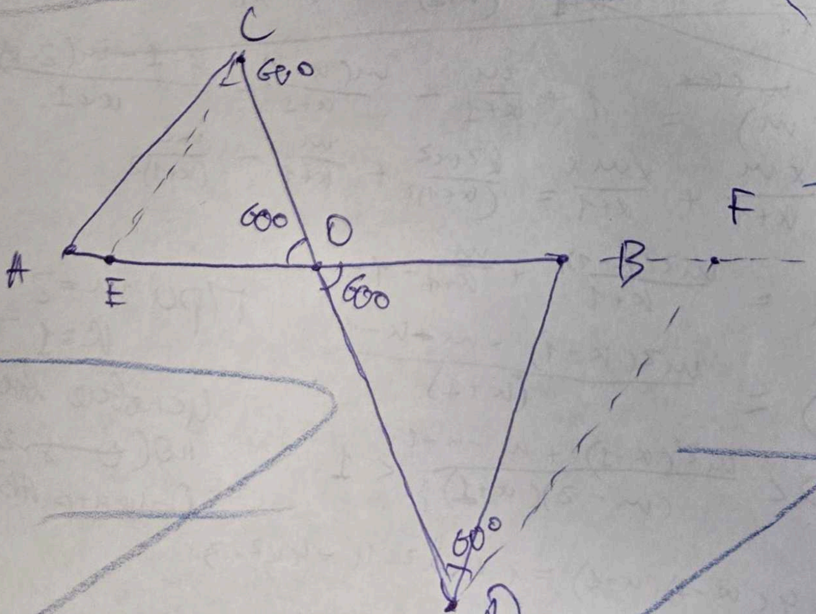
$m>1$

$DF=\frac{2}{3}QD$

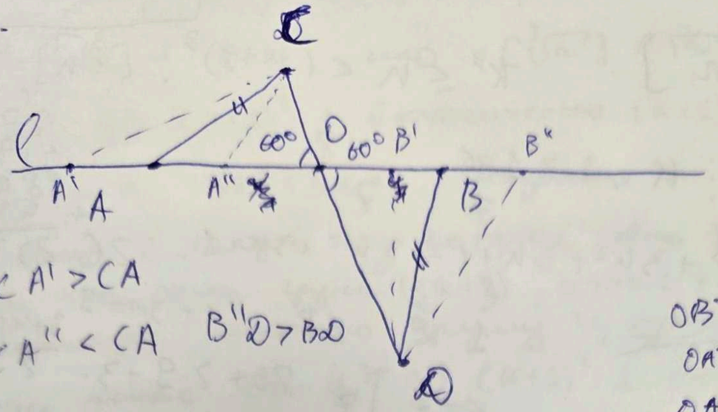
$$\frac{CF}{PQ}=\frac{FD}{QD}=$$

$$=\frac{\frac{2}{3}QD}{QD}=\frac{2}{3}$$

$CF=$



№6.



$CA' > CA$

$CA'' < CA$ $\quad B''D > BD$

$\cancel{4 \cdot 5^2 =}$

$\cancel{= 5^2 \cdot 9^2}$

$CO = k \cdot OD.$

$\cancel{CO +}$

$OD(k+1) = m$

$OD = \frac{m}{k+1}$

$OB^2 + OD^2 - OB \cdot OD = BD^2$

$OA^2 + OC^2 - OC \cdot OA = AC^2$

$OA = x.$ $\boxed{\text{черновик}}$

$OD = \frac{m}{k+1}$

$OC = \frac{k}{k+1} \cdot m$

$$x^2 + \frac{k^2}{(k+1)^2} m^2 - \frac{xkm}{(k+1)} = (1-x)^2 + \frac{m^2}{(k+1)^2} - \frac{(1-x)m}{(k+1)}$$

$$x^2 + \frac{k^2m^2}{(k+1)^2} - \frac{xkm}{k+1} = x^2 - 2x + 1 + \frac{m^2}{(k+1)^2} - \frac{m}{k+1} + \frac{xm}{k+1}$$

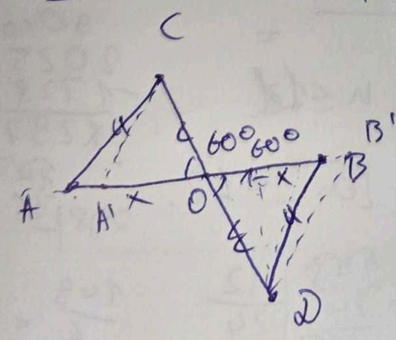
$$2x - \frac{xkm}{k+1} - \frac{xm}{k+1} = 1 + \frac{m^2}{(k+1)^2} - \frac{m}{k+1} - \frac{k^2m^2}{(k+1)^2}$$

$$x\left(2 - \frac{(k+1)m}{k+1}\right) = 1 + \frac{m^2 - k^2m^2 - mk - m}{(k+1)^2}$$

$$x(2-m) = 1 + \frac{m^2(1-k^2) - m(k+1)}{(k+1)^2}$$

$$x(2-m) = 1 + \frac{m^2(1-k) - m}{(k+1)} = 1 + \frac{m(m - mk - 1)}{k+1} =$$

$$= \frac{k+1+m^2+m^2k-m}{k+1} = \frac{k+1+m^2(1-k)-m}{k+1.}$$



$k = 1$

$m = 2.$

$\frac{CO}{OD} = k,$

$CO = k \cdot OD$

$OD(k+1) = m$

$OD = \frac{m}{k+1}.$

$BD + OD$

черновик

№4 $n \vdots [\sqrt[3]{n}]$ $\quad k^3 \le n < (k+1)^3$! $[\sqrt[3]{n}] = k$.

$27 \cdot 7 = 189$; $189 + 44 = 233$

$n \vdots k$ $\quad 1 \le \; < 8$ $\quad 7 \; 7$ $\quad 26$

$-k^3 + k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \overset{!}{=} 3k^2 + 3k + 1$.

$\cancel{3k^2+3k}$ $\quad 1 \le \; < 8$ $\quad 11 - 3 + 1 = 9$ $\quad 26 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot \frac{3+11}{2} \cdot 9 =$

$= 26 + 18 + 27 \cdot 7$

$3k^2 + 3k + 1$; $\quad k(3k+1)$

$(3k+1)$ нет $\vdots k$.

$26 + 18 = 44$; $189 + 62 = 251$

$[25; 2025]$: $27 = 3^3$; $64 = 4^3$

$121 \cdot 11 = 1331$

$3 \cdot 4 + 1 + 3 \cdot 5 + 1 + \ldots + 3n_{max} + 1$.

$20^3 = 400 \cdot 20 = 8000$.

$10^3 = 1000$;

$225 \cdot 15 = 3375$; $144 \cdot 12 = 1728$; $1331 + 363 = 1694$; $1694 + 33 = 1728$

$196 \cdot 14 = 2744$; $36 + 26 = 62$; $189 + 62 = 251$

$169 \cdot 13 = 2197$ $\quad [1; 2] = 2 - 1 + 1 = 2$

$(11+1)^3 = 1331 + 363 + 33 + 1 =$

$\boxed{2197}$

$2025 - 1728 = 297$

$4 \le n < 13$; $\quad 4 \le n \le 11$.

$27 \cdot 14 = 378$

$[1728, \ldots, 2025]$, $\quad [\sqrt[3]{n}] = 12$.

$2025 - 1728 = 297 + 1 = 298$

$298 : 12 = 24$ (ост. 10)

$\frac{149}{6} = 24 + \frac{5}{6}$

$26 + 3 \cdot \frac{11+3}{2} \cdot 9 + 9 \cdot 4 =$

$= 26 + 36 + 27 \cdot 7 =$ $\quad S([a;b]) = b - a + 1 =$

$= 189 + 62$

№4. Заметим, что для $k, n \in N$ верно: если $k^3 \le n < (k+1)^3$, то $[\sqrt[3]{n}] = k$. На интервале от k^3 до $(k+1)^3-1$ включительно $(k+1)^3-k^3$ целых чисел, т.е. $3k^2+3k+1$. Разбивая их на группы по k чисел, в каждой из которых ровно 1 число $\vdots\, k$, получаем, что таких групп $(3k+3)$, а также $+1$ число $\vdots\, k$, составляющее неполную группу из одного числа. Итого среди чисел от k^3 до $(k+1)^3-1$ включительно ровно $3k+4$ числа $\vdots\, k$. В промежуток ~~от~~ $[25; 2025]$ полностью попадают группы чисел $k=3,4,5,\dots,11$. Из чисел 25 и 26 только одно $\vdots\, 2 = [\sqrt[3]{25}] = [\sqrt[3]{26}] \Rightarrow$ Всего ~~эти~~ подходящих чисел пока что ~~1+233~~

$$1+\sum_{k=3}^{k=11}(3k+4).$$

Для $k=12$ группы начинаются с числа $12^3=1728$ и заканчиваются на числе $2025 < 13^3=2197$. Среди ~~чисел~~ $n \in [1728; 2025]$ ровно 298 чисел. Первое из них $\vdots\, 12$ только; в целых групп ровно $\left[\frac{298}{12}\right] = 24$ + 1 неполная, где первое число $\vdots\, 12$. Итого во множестве A чисел $25+1+\sum_{k=3}^{k=11}(3k+4) = \cancel{233}\ 251$

$\boxed{\text{чистовик}}$

Ответ: ~~233~~ 251

№5. $x = y = 1$: $8 + \frac{a}{2} \geq \frac{a}{2} + 8$ — верно $6>0$.

черновик

~~$x\ y$~~ $x = ky$

$$\frac{x}{xk} + \frac{kx}{x} + \frac{a\sqrt{kx^2}}{x+kx} \geq \frac{a}{2} + 2$$

$$k + \frac{1}{k} + a\cdot\frac{\sqrt{k}}{k+1} \geq \frac{a}{2} + 2$$

$$\frac{a}{2}\left(\frac{2\sqrt{k} - k - 1}{k+1}\right) \geq 2 - \frac{k^2+1}{k}$$

$$\frac{2k - k^2 - 1}{k}$$

$$-\frac{a}{2}\cdot\frac{(\sqrt{k}-1)^2}{k+1} \geq \frac{(k-1)^2}{k}$$

$$\frac{a}{2} \geq \frac{(k-1)^2}{k}\cdot\frac{k+1}{(\sqrt{k}-1)^2}$$

$$f(k) = \left(\frac{k-1}{\sqrt{k}-1}\right)^2\cdot\frac{k+1}{k}$$

$$k-1 = (\sqrt{k}-1)(\sqrt{k}+1)$$

$$f(k) = (\sqrt{k}+1)^2\cdot\frac{k+1}{k} = \frac{(k+1)(k+1+2\sqrt{k})}{k} =$$

$$\sqrt{k} = t$$

$$f(t) = \frac{(t^2+1)(t^2+1+2t)}{t^2} =$$

$$= \frac{t^4+t^2+2t^3+t^2+2t+1}{t^2} =$$

$$= \frac{t^4+2t^3+2t^2+2t+1}{t^2}$$

$$f'(t) = \frac{(4t^3+6t^2+4t+2)t^2 - 2t(t^4+2t^3+2t^2+2t+1)}{t^4} =$$

$$= \frac{4t^5+6t^4+4t^3+2t^2-2t^5-4t^4-4t^3-4t^2-2t}{t^4} =$$

$$= \frac{2t^5+2t^4-2t^2-2t}{t^4} = \frac{2t^4+2t^3-2t-2}{t^3} = \frac{2t^3(t+1)-2(t+1)}{t^3} =$$

$$= \frac{2(t^3-1)(t+1)}{t^3}$$

0 ($-$ 1 $+$ t

$f(t)$ ↘ ↗

$\min = f(1) = \frac{1\cdot 4}{1} = 4.$

№5. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}\geqslant\frac{a}{2}+2$, $a, x, y>0$.

Пусть $y=kx$ $(k>0)$. Тогда неравенство примет вид:

Чистовик

$$k+\frac{1}{k}+\frac{a\sqrt{k}}{k+1}\geqslant\frac{a}{2}+2$$

$$\frac{a}{2}\left(\frac{2\sqrt{k}-(k+1)}{k+1}\right)\geqslant 2-k-\frac{1}{k}$$

$$\frac{a}{2}\cdot\left(-\frac{(\sqrt{k}-1)^2}{k+1}\right)\geqslant\frac{2k-k^2-1}{k}$$

$$\frac{a}{2}\,\frac{(\sqrt{k}-1)^2}{k+1}\leqslant\frac{(k-1)^2}{k}\Rightarrow\frac{a}{2}\leqslant\frac{(k-1)^2\cdot(k+1)}{k\cdot(\sqrt{k}-1)^2}=$$

$$=\frac{(\sqrt{k}+1)^2(k+1)}{k}$$ Пусть $\sqrt{k}=t.\Rightarrow$

$$\frac{a}{2}\leqslant\frac{(t+1)^2(t^2+1)}{t^2}=\frac{(t^2+2t+1)(t^2+1)}{t^2}=\frac{t^4+2t^3+2t^2+2t+1}{t^2}$$

$$f(t)=\frac{t^4+2t^3+2t^2+2t+1}{t^2}$$

$$f'(t)=\frac{(4t^3+6t^2+4t+2)t^2-(t^4+2t^3+2t^2+2t+1)\cdot 2t}{t^4}=$$

$$=\frac{4t^5+6t^4+4t^3+2t^2-2t^5-4t^4-4t^3-4t^2-2t}{t^4}=$$

$$=\frac{2t^5+2t^4-2t^2-2t}{t^4}=\frac{2t^4(t+1)-2t(t+1)}{t^4}=\frac{2t(t^3-1)(t+1)}{t^4}=$$

$$=\frac{2(t^3-1)(t+1)}{t^3}$$

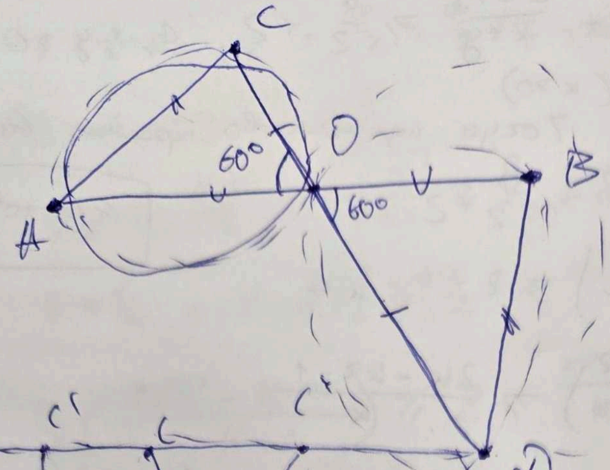
$f'(t)$: 0 ($-$ ↘ 1 $+$ ↗ $\to t$ $\Rightarrow$ $f(t)$

$$\min(f(t))=f(1)=\frac{1+2+2+2+1}{1}=8$$

$$\frac{a}{2}\leqslant\min(f(t))=8\Rightarrow 0<a\leqslant 16$$

Ответ: $0<a\leqslant 16$.

26.



$\frac{OC}{OD} = k$

$OC = k \cdot OD$

$OD + k \cdot OD = m$

$OD = \frac{m}{k+1}$.

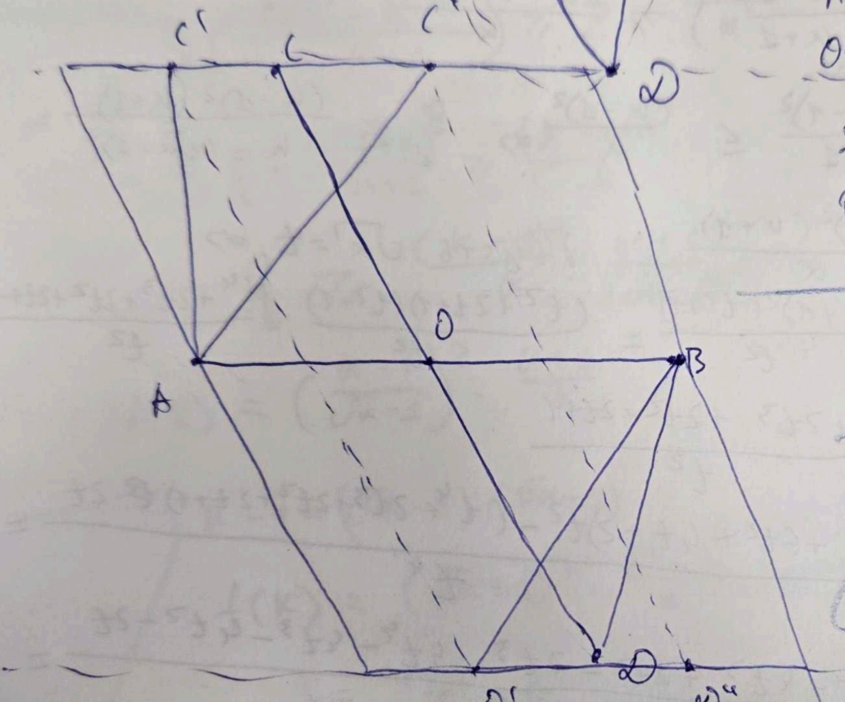
$OC = \frac{k}{k+1} \cdot m$

$AO = x$

$OB = 1 - x$.

$\frac{m}{k} = y$

$\boxed{\text{черновик}}$



$BD^2 = AC^2 \Leftrightarrow AO^2 + OC^2 - AO \cdot OC = OB^2 + OD^2 - OB \cdot OD$

$x^2 - (1-x)^2 + \frac{k^2 m^2}{(k+1)^2} - \frac{m^2}{(k+1)^2} = \frac{xmk}{k+1} - \frac{(1-x)m}{k+1}$.

$(2x-1) + \frac{m^2 \cdot (k-1)}{k+1} = \frac{xmk - m + mx}{k+1}$

$2x - 1 + \frac{m^2(k-1)}{k+1} = \frac{mx(k+1) - m}{k+1} = mx - \frac{m}{k+1}$.

$x = \frac{1}{2}$: $\frac{m^2(k-1)}{k+1} = m\left(\frac{k+1-2}{k+1}\right) = m \cdot \frac{k-1}{k+1}$

$m^2 = m \Rightarrow m = 1$.