0 348159 710006

34-81-59-71
(150.2)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант В - 1

Место проведения Казань
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Абзалилова Артура Дамировича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«06» 04 2025 года

Подпись участника
Абз

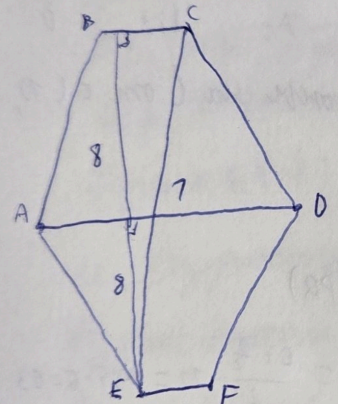
БЕЛОВИК 100 (сто)

№1

Команда могла выиграть от 0 до 19 раз.
Так как прогрессия убывающая, то у каждых двух команд разное число выигранных партий. Команд 20, возможных количеств побед — 20. Значит есть команда, которая выиграла 19 раз, 18 раз, ..., 0 раз. Очков у них 57, 54, 51, ..., 3, 0. Второе место — 18 побед — 54 очка.

Ответ: 54.

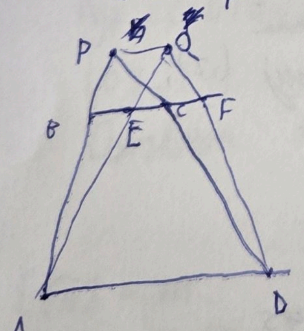
№2



Если трапеции построены по разные стороны от AD, то длина $EC \geq$ длина перпенд. из E на $BC = 8+8 = 16$.

$17 \geq 16$ невозможно.

B, C, E, F равноудалены от AD (высота=8) и лежат по одну сторону от AD $\Rightarrow$ B, C, E, F лежат на одной прямой l.



~~Пусть B и E лежат по одну сторону на l от точки C.~~

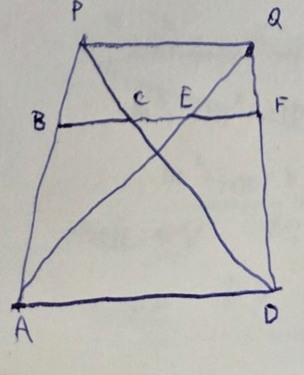
В $\triangle APD$ $BC \parallel AD$

$\triangle PBC \sim \triangle PAD$ (три угла)

Высота из P на $BC = x$.

Высота из P на $AD = x+8$

$\frac{x}{x+8} = \frac{BC}{AD} = \frac{2}{6}$



$6x = 2x+16$ $\quad x = 4$

БЕЛОВИК

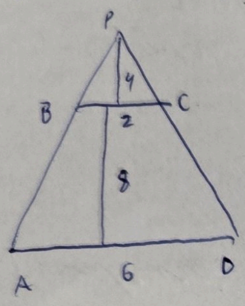
№2 (прод.)

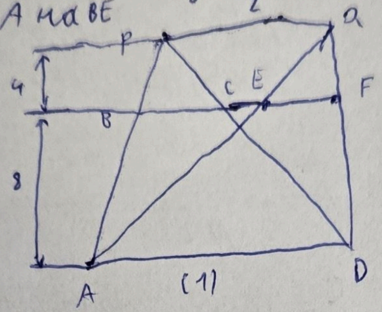
Расстояние от Q до EF аналогично равно 4.

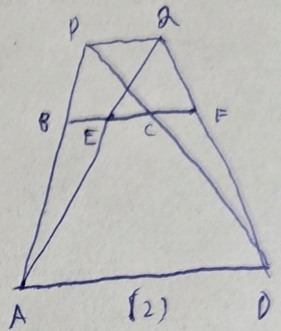
Значит, $PQ \parallel BC \parallel AD$

$\triangle ABE \sim \triangle APQ$ (три угла), $B \in AP$, $E \in AQ$, $BE \parallel PQ$.

$\frac{PQ}{BE} = \frac{\text{высота из } A \text{ на } PQ}{\text{высота из } A \text{ на } BE} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ ← раст. между PQ и AD $= 4+8=12$







Если B и E лежат по разные стороны на l от C (1),

то $\underbrace{BE}_{BC+CE} = 2+1=3$

$\frac{PQ}{BE} = \frac{3}{2} \Rightarrow PQ = \frac{9}{2}$. APQD – трап (AD∥PQ)

$S_{APQD} = \frac{AD+PQ}{2} \cdot$ расст. от P до AD $= \frac{6+\frac{9}{2}}{2} \cdot 12 = 10{,}5 \cdot 6 = 63$

Если B и E лежат по одну сторону (2),

$BE = BC - EC = 2-1 = 1$

$\frac{PQ}{BE} = \frac{3}{2} \Rightarrow PQ = \frac{3}{2}$

$S_{APQD} = \frac{AD+PQ}{2} \cdot 12 = \frac{6+1{,}5}{2} \cdot 12 = 7{,}5 \cdot 6 = 45$

Ответ: 45 или 63.

34-81-59-71
(150.2)

БЕЛОВИК

№3.

$2\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8) \le \log_3(x+3)\log_2(x+8) - 2$

$\log_{a^2} b = \frac{1}{2}\log_a b$, $\log_a b\cdot\log_c d = \log_a d\cdot\log_c b$

$2\cdot\frac{1}{4}\log_2^2(x+3)\cdot\frac{1}{4}\log_3^2(x+8) \le \log_2(x+3)\log_3(x+8) - 2 \quad |\cdot 8$

$\log_2^2(x+3)\log_3^2(x+8) - 8\log_2(x+3)\log_3(x+8) + 16 \le 0$

$\boxed{a^2 \le 0 \Rightarrow a = 0}$

$(\log_2(x+3)\log_3(x+8) - 4)^2 \le 0$

ОДЗ: $x+3>0$, $x+8>0$

$\boxed{x>-3} > -8$

$\log_2(x+3)\log_3(x+8) = 4$

$x>-3 \Rightarrow \log_3(x+8) > \log_3(5) > 0$

$\log_2(x+3) = \frac{4}{\log_3(x+8)} > 0.$

$\log_2(x+3) > 0 \Rightarrow x+3>1 \Rightarrow x>-2$

При $x\in(-2;+\infty)$ $\log_2(x+3)$ и $\log_3(x+8)$ положительны функции и возрастают, значит их произведение возрастает. Есть только одна (или их нет) точка, где $\log_2(x+3)\log_3(x+8) = 4$. Это точка $x=1$.

$\log_2(4)\cdot\log_3(9) = 2\cdot 2 = 4.$

Ответ: $x=1$.

№4.

$[\sqrt[3]{n}] = m.$

$m+1 > \sqrt[3]{n} \ge m$ n - нат. $n \vdots m \Rightarrow n = mk$

$m^3+3m^2+3m+1 > n \ge m^3$

$m^3+3m^2+3m \ge mk \ge m^3$

$m^2+3m+3 \ge k \ge m^2$ Для каждого m

найду сколько существуют таких k, что $k\in[m^2; m^2+3m+3]$, $mk\in[25;2025]$

БЕЛОВИК

№4 (прод.)

$\boxed{k \in [m^2; m^2+3m+3] \text{ — } m^2+3m+3-m^2+1 = 3m+4 \text{ числа лежат в отрезке.}}$

~~$m\leq 3$ $k \leq m^2+3m+3 = 9+9+3 = 21$~~

~~$k \leq 26$~~

$\boxed{n=26}$ $k=13$ $m=2$.

$m \leq 2$ $k \leq m^2+3m+3 = 13$ $km \leq 26$.

$m=3$ $k \in [9; 21]$ $km \geq 27$ 13 чисел

$m=4$ 17 чисел k существуют

$m=5$ 20 чисел

...

$12^3 = 1728 < 2025$ $\Rightarrow$ при $m \leq 11$, $n = km < (m+1)^3 \leq 12^3 < 2025$

все числа n будут в отрезке $[25; 2025]$

$13^3 = 2197 > 2025$ при $m=12$ не все числа в отрезке,

при $m=13$ их нет.

$144+36+3$

$m=12$: $k \in [144, 189]$ $km \leq 2025$

$k \leq \frac{2025}{12}$

$$\begin{array}{r|l} 2025 & 12 \\ -12 & 168 \\ \hline 82 & \\ -72 & \\ \hline 105 & \\ -96 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

$k \in [144; 168]$ $168-144+1 = 25$

$m = 2, 3, 4, \dots, 11, 12$

чисел $1, \underbrace{17, 20, \dots, 37}_{9}, 25$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 9 \\ \hline 243 \end{array}$$

$1+25+(17+20+\dots+37) = 26 + \frac{(37+17)}{2} \cdot 9 = 26 + 27 \cdot 9 = 26 + 243 = 269.$

Ответ: 269

При $m \in [3; 11]$ все числа mk, где $k \in [m^2; m^2+3m+3]$ $\in [25; 2025]$

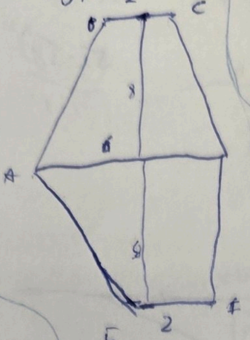
Никакое число n не посчитано дважды т.к. для одного числа n число $m = [\sqrt[3]{n}]$ однозн. опред.

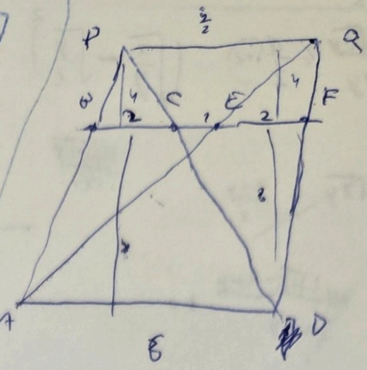
При $m=2$ $k \in [4; 13]$ $k \leq 12 \Rightarrow mk \leq 24$
$k = 13 \Rightarrow mk = 26$.

34-81-59-71
(150.2)

ЧЕРНОВИК

1, 3, 5, ..., 37





$2\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8) \le \log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8) - 2$

$\log_a b\cdot\log_c d = \frac{\ln b\cdot\ln d}{\ln a\ \ln c} = \log_a d\cdot\log_c b$

$\log_4(x+3) =$

$\log_3(x+3)\log_2(x+8) = 4$

$x+3>0 \quad x+8>0$

$\log_{4} 4 = \frac{1}{2}\log_2 4$

$2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\ a^2 \le a-2$

$\frac{1}{8}a^2 \le a-2$

$a^2-8a+16 \le 0$

$(a-4)^2 \le 0$

$a=4$

$\log_3(x+8)\log_2(x+3) = 4$

$x=1$

$-3+-7$

$43 \geq 37 \geq 25$

$m=5$

$n=5\cdot 37$

m | k
5 | [25; 43]
6 | [36

$n : [\sqrt[3]{n}]$

$\sqrt[3]{8} = 2$

1 : 1

2 : 1

$2025 = 45^2$

$[\sqrt[3]{n}] = m$

$m+1 > \sqrt[3]{n} \geq m$

$n = mk$

$m^3+3m^2+3m+1 > n \geq m^3$

$m^3+3m^2+3m \geq mk \geq m^3$

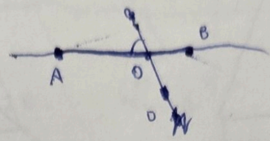
$m^2+3m+3 \geq k \geq m^2$

ЧЕРНОВИК

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}\geq\frac{a}{2}+2$ $\quad\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2\geq\frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2(x+y)}$

$a\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\right)$ $\quad\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2(x+y)}$

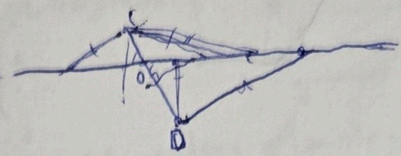
$\sqrt{xy}\geq\frac{x+y}{2}$



$\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2(x-}$

$\frac{x^2+y^2-2xy}{2xy}+a\frac{2\sqrt{xy}-x+y}{2x+2y}\geq 0$

$\sqrt{\frac{x}{y}}=p \quad \sqrt{\frac{y}{x}}=q \quad pq=1$



$p^2+q^2+\frac{a}{p+q}\geq\frac{a}{2}+2$

$p^3+q^3+p+q+a-\frac{a}{2}p-\frac{a}{2}q-2p-2q\geq 0$

$p^3+q^3-p-q+a-\frac{ap}{2}-\frac{aq}{2}\geq 0$

$(p+q)\left(p^2+pq+q^2-1-\frac{a}{2}\right)+a\geq 0$

$1+1+\frac{a\sqrt{1}}{2}\geq\frac{a}{2}+1$

$2+\frac{1}{2}+\frac{a\sqrt{2}}{3}\geq\frac{a}{2}+2$

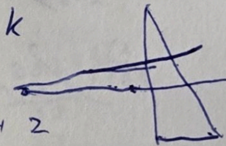
$3+2a\sqrt{2}\geq 3a$

$3\geq a(3-2\sqrt{2})$

$\sqrt{xy}\geq\frac{x+y}{2}$ $\quad 2\left(2-\frac{a}{2}\right)+a\geq$

$\frac{3}{3-2\sqrt{2}}\geq a$

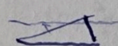
p^6-p^4 $\quad\sqrt{\frac{x}{y}}=k$



$\sqrt[3]{2025}$

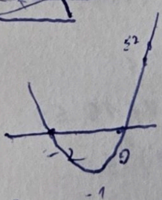
$10^3=1000$

$k^2+\left(\frac{1}{k}\right)^2+\frac{a}{k+\frac{1}{k}}\geq\frac{a}{2}+2$



$k^2+\frac{1}{k^2}-2\geq a\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{k^2+1}\right)$

$\frac{k^2+\frac{1}{k^2}-2}{\frac{1}{2}-\frac{k}{k^2+1}}\geq a$



$13\cdot13=169$ $\quad 169\cdot13$: 507, 169, 2197 $\quad 13\cdot3=39$

$\frac{2\cdot5\cdot3^2}{4}$

$k\neq1$

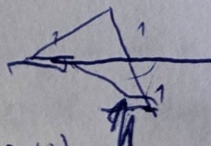
$\frac{(2k^2+2)(k^4+1-2k^2)}{k^2(k^2+1-2k)}$

$\frac{2(k^2+1)(k^2-1)^2}{k^2(k-1)^2}=\frac{2(k^2+1)(k+1)^2}{k^2}\geq a$ $\quad 2\leq k+\frac{1}{k}$

$144\cdot12$: 288, 144, 1728

k^2+k+1

$2\left(k+\frac{1}{k}\right)\left(k+2+\frac{1}{k}\right)^2\geq a$



$\frac{21}{15}$

$\frac{10,5}{7,5}=\frac{63}{45}$

$2s(s+2)$ $\quad s\geq 0$ $\quad 2z(z+2)$

$2s^2+4s\geq a$ $\quad z(z+2)$

$(z+1)^2-1$

БЕЛОВИК

№5.

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}\geq\frac{a}{2}+2 \qquad \cancel{\sqrt{\frac{x}{y}}=k} \quad \cancel{k\in[0;+\infty)}$$

$x,y>0$

$$\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}=\frac{a}{\frac{x}{\sqrt{xy}}+\frac{y}{\sqrt{xy}}}=\frac{a}{\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$\cancel{k^2+\frac{1}{k^2}+\frac{a}{k+\frac{1}{k}}\geq\frac{a}{2}+2}$$

$$z^2=\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2=\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x} \qquad \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=z$$

$$\frac{\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}}{2}\geq\sqrt{\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}}=1$$

$z\geq2 \qquad \frac{1}{2}\geq\frac{1}{z}$

нер-во о средних

$$z^2-2+\frac{a}{z}\geq\frac{a}{2}+2$$

$$z^2-2-2\geq a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{z}\right)$$

$$z^2-4\geq a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{z}\right)$$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{z}>0$, поэтому можно делить.

$$\frac{z^2-4}{\frac{1}{2}-\frac{1}{z}}\geq a$$

$$\frac{2z(z^2-4)}{z-2}\geq a \qquad z\neq2$$

Если $z=2$, то $\sqrt{\frac{x}{y}}=\sqrt{\frac{y}{x}}\Rightarrow x=y$ (нер-во о средних становится равенством)

$$\frac{x}{x}+\frac{x}{x}+\frac{a\sqrt{x^2}}{x+x}\geq\frac{a}{2}+2$$

$2+\frac{a}{2}\geq\frac{a}{2}+2$ всегда.

$$2z(z+2)\geq a$$

$$2\left((z+1)^2-1\right)\geq a \qquad z>2$$

$$2(3^2-1)=16\geq a$$

При любом $z>2$: $a\leq 2z(z+2)$

Значит $a\leq16$.

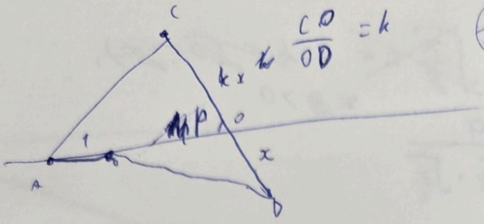
z может принимать любые значения в $[2;+\infty)$

Если $a\leq16$, то $2z(z+2)>16\geq a$

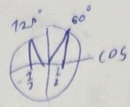
Если $a>16$, найдётся z, что $2z(z+2)<a$ т.к. $2z(z+2)$ – непрерывная и возр. при $z>2$.

Ответ: $a\in[0;16]$

ЧЕРНОВИК



$\frac{CO}{OD} = k$



$(kx)^2 + (m+1)^2 + 2(kx)(m+1) = \frac{1}{2}$

$(kx)^2 + (m+1)^2 - kx(m+1) = x^2 + m^2 + xm$

$kx + x = m$

$x(k+1) = m$

$x = \frac{m}{k+1}$

$k^2x^2 + 2m + 1 - kxm - kx = x^2 + xm$

$k^2x^2 - kx + 1 - x^2 = m(x - 2 + kx)$

$kx + x = m$

$p = \frac{k^2x^2 - kx + 1 - x^2}{x + kx - 2}$

$m - 2$

$k^2x^2 - kx + 1 - x^2 > 0$

$x^2(k^2 - 1) - kx + 1$

$x(k^2x - k - x) + 1 > 0$

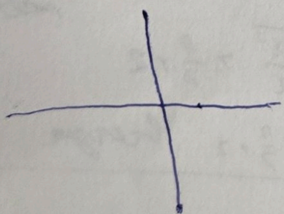
$(kx)^2 + (p+1)^2 - kx(p+1) = x^2 + p^2 - x \cdot p$

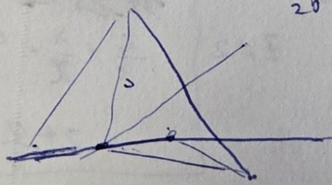
$k^2x^2 + \cancel{p^2} + 2p + 1 - kxp - kx = \cancel{x^2} + \cancel{p^2} - xp$

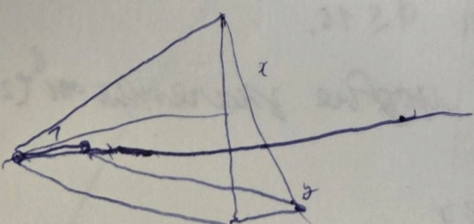
$p(-x + kx - 2)$

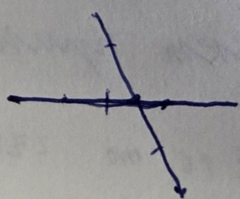
$k^2x^2 + 1 - kx - x^2 =$

$$\begin{array}{r} 168 \\ \times\ 12 \\ \hline 336 \\ +168\ \ \\ \hline 2016 \end{array}$$



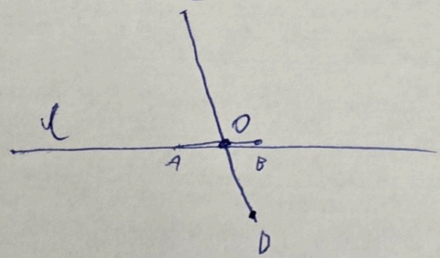






БЕЛОВИК

№6



$\frac{CO}{OD} = k$

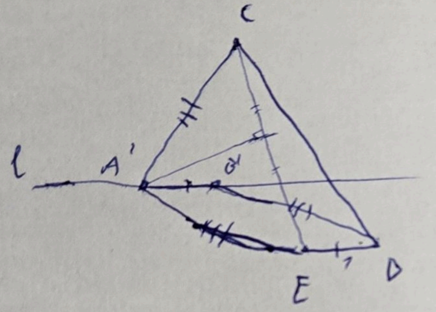
$CO + OD = m$

$A'B'$ – передвин. отрезок.

Пусть есть такое положение, что $AC = BD$.

E такая, что:

$\overline{DE} = \overline{BA} = \overline{B'A'}$



$A'B'DE$ – параллелограмм.

$A'C = B'D = A'E$.

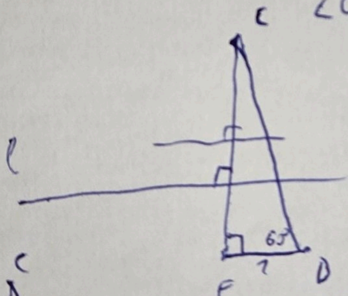
$\triangle A'CE$ – равноб.

сер. пер. к CE проходит через A'.

Если сер. пер. не пересекается, то

$CE \perp l$ $\qquad$ $CE \perp ED$

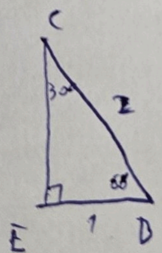
$\angle COA = \angle CDE = 60^\circ$



$CD = \frac{ED}{\cos 60^\circ} = 2ED = 2$

Сер. пер. к $CE \parallel l$.

Чтобы они не совпали, нужно, чтобы C и D не были равноудалены от l. $(k \neq 1)$

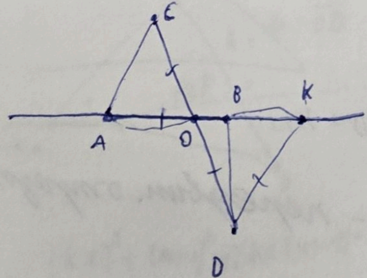


~~Ответ:~~ при $m \neq 2$ или $m = 2$ и $k \neq 1$.

Если $m = 2$ и $k = 1$, то:

БЕЛОВИК

№6 (прод.)



$AB = CO = OD = 1$

K лежит на l, $OK = 1$, $\angle COK = 120°$

$OK = OD$, $\angle KOD = 60° \Rightarrow \Delta KOD$ - равнос.

$AO = a$, $BO = AB - AO = 1 - a$

$KB = KO - OB = 1 - (1 - a) = a = AO$

$KB = AO$, $\angle BKD = \angle AOC = 60°$, $KD = OC = 1$.

$\Delta KBD = \Delta OAC \Rightarrow BD = AC$.

По условию $BD \neq AC$.

Значит $m \neq 2$.

Ответ: $m \neq 2$, k - любое.