0 438879 050008

43-88-79-05
(135.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант В-2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы Горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Булатова Тимофея Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход 11^{53} – 11^{57}
+1 лист

Дата
«6» апреля 2025 года

Подпись участника

90 (девяносто)

Чистовик

ОДЗ: $\begin{cases} x+2>0 \\ x+7>0 \end{cases}$ $\boxed{x>-2}$

№3 $\log_2^2(x+2)\cdot\log_3^2(x+7)+16\le 32\cdot\log_9(x+2)\cdot\log_4(x+7)$

$\log_9(x+2)=\frac{1}{2}\cdot\log_3(x+2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_2(x+2)}{\log_2 3}$

$\log_4(x+7)=\frac{1}{2}\cdot\log_2(x+7)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_3(x+7)}{\log_3 2}$

$\left(\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7)\right)^2+16\le\frac{32\log_2(x+2)\log_3(x+7)}{2\cdot2\cdot\log_2 3\cdot\log_3 2}$

$\left(\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7)\right)^2-2\cdot\left(\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7)\right)\cdot4+4^2\le0$

$\left(\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7)-4\right)^2\le0$

$\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7)=4$

При $x>-2$ $x+7>\cancel{5}\,1$ $\cancel{\log_3(x+7)>\log_3 5>1}$ $\log_3(x+7)>0$

Если $-2<x\le-1$, то $\log_2(x+2)\le0$, а $\log_3(x+7)>0$, т.е. рав-во невозможно

Если же $x>-1$, то $\log_2(x+2)>0$ и $\log_3(x+7)>0$ при этом это 2 ~~в~~ монотонно возрастающие функции, а значит их произведение — тоже монотонно возрастающая функция, так как ~~об~~ они обе положит. в этом случае.

Но тогда ~~[illegible]~~ функция слева принимает значение 4 только в одной точке и эта точка $x=2$ $\log_2 4\cdot\log_3 9=4$

Ответ: ~~[illegible]~~ $\{2\}$.

1 стр./8

№1 Пусть команды, начиная с последней набрали $\boxed{\text{Чистовик}}$

$x \quad x+d \quad x+2d \ \ldots \quad x+8d \quad x+9d$ очков

~~10~~ ~~9~~ ~~8~~ ~~2~~ ~~10~~

X IX VIII II I ← места

Заметим, что в любой встрече суммарное кол-во очков увеличивается на 2 т.к. одна команда выиграла, а другая проиграла (у одной +2, у другой +0; всего 2+0=2).

А всего встреч было $\frac{10\cdot 9}{2}=45$, значит всего набрано $45\cdot 2=90$ очков, но это же кол-во равно: $x+(x+d)+\ldots+(x+9d)=90$

То есть: $\frac{x+x+9d}{2}\cdot 10=90$ $\quad 2x+9d=18$

$2x=9(2-d)$

Заметим, что $(2-d)\,⋮\,2 \Rightarrow d\,⋮\,2$, при этом $d\geq 1$ и $x\geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow d=2$, т.к. если $d\geq 4$, то $x<0$. Итого $\boxed{d=2,\ x=0}$

Команды набрали 18 $\boxed{16}$ 14 ... 2 0
I $\boxed{\text{II}}$ III IX X

Получается, что команда, занявшая 2 место набрала 16 очков.

Ответ: 16.

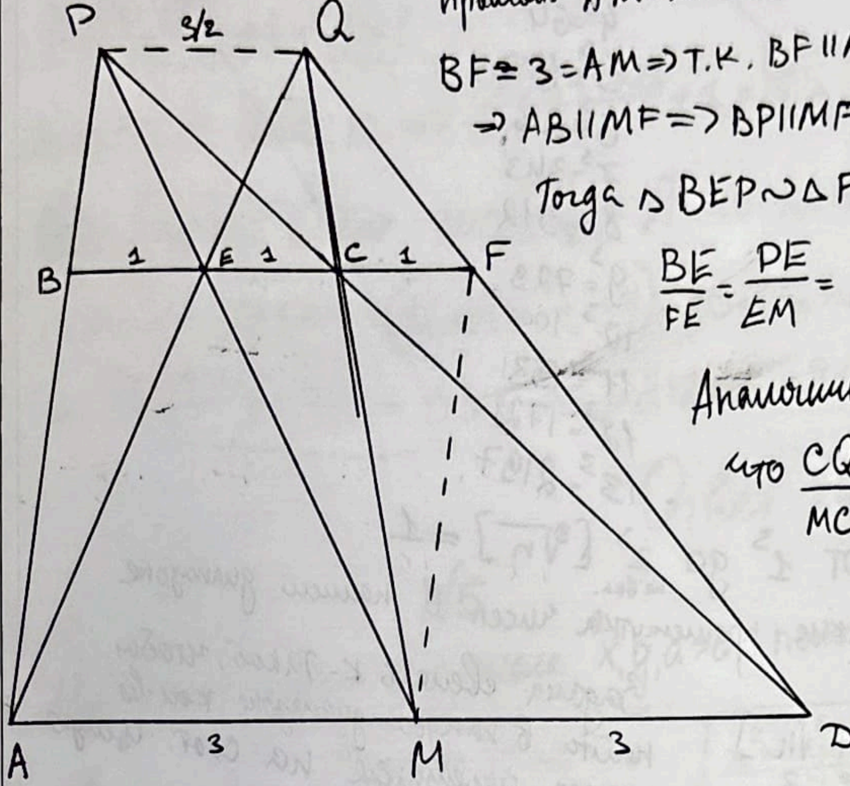
№2

Для начала поймём, что трапеции располагаются в одной полуплоскости, т.к. $CE=1$, а высоты трапеций равны по 16. Если они в разных полуплоскостях, то $CE >$ высота $=16$, что неверно, значит точки B, C, E, F лежат на одной прямой, т.к. $ABCD$ и $AEFD$ — трапеции с одной высотой —

Чистовик

$BC = EF = 2$ и $CE = 1 \Rightarrow BE = CE = CF = 1$

Пусть M — сер. AD. По замечательному св-ву трап. P, E, M и Q, C, M лежат на одной прямой. $AM = DM = 3$.



$BF = 3 = AM \Rightarrow$ т.к. $BF \parallel AM$, то $ABFM$ — парал. $\Rightarrow AB \parallel MF \Rightarrow BP \parallel MF$, т.е. $BPFM$ — трап.

Тогда $\triangle BEP \sim \triangle FEM$ и

$$\frac{BE}{FE} = \frac{PE}{EM} = \frac{1}{2}$$

Аналогично доказывается, что $\frac{CQ}{MC} = \frac{1}{2}$

Из того, что $\frac{PE}{EM} = \frac{1}{2} = \frac{CQ}{MC}$ следует, что $CE \parallel PQ$, а значит $PQ \parallel AD$ и $APQD$ — трап.

$\triangle MEC \sim \triangle MPQ \Rightarrow \frac{CE}{PQ} = \frac{ME}{MP} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{PQ = \frac{3}{2}}$

$\triangle EQF \sim \triangle AQD \Rightarrow$ пусть высота из т. Q в $\triangle EQF$ равна h, тогда в $\triangle AQD$ она равна $h+16$ и из подобия имеем

$$\frac{h}{h+16} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3h = h + 16 \quad \boxed{h = 8} \Rightarrow$$ высота в $\triangle AQD$ равна 24, она же высота в трап. $APQD \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{APQD} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} + 6\right) \cdot 24 = 12\left(\frac{3}{2} + 6\right) = 18 + 72 =$$

$= 90$

Ответ: 90

3 стр | 8

Чистовик

$n \in A$, если $n \vdots [\sqrt[3]{n}]$

Рассмотрим таблицу кубов:

$1^3 = 1$
$2^3 = 8$
$3^3 = 27$
$4^3 = 64$
$5^3 = 125$
$6^3 = 216$
$7^3 = 343$
$8^3 = 512$
$9^3 = 729$
$10^3 = 1000$
$11^3 = 1331$
$12^3 = 1728$
$13^3 = 2197$

Для чисел от 1^3 до 2^3 (не вкл.) $[\sqrt[3]{n}] = 1$

Распишем все такие промежутки чисел в нашем диапазоне

$(36, 2025]$

n	$[\sqrt[3]{n}]$
36 – 63	3
64 – 124	4
125 – 215	5
216 – 342	6
343 – 511	7
512 – 728	8
729 – 999	9
1000 – ~~1330~~ 1330	10
1331 – 1727	11
1728 – 2025	12

Задача свелась к такой, чтобы найти в каждом диапазоне кол-во чисел делящихся на соот. целую часть.

Заметим, что в каждом диапазоне крайние числа делятся на соотв. целую часть. Поэтому, например для первого диапазона кол-во таких чисел равно

$\frac{63}{3} - \left(\frac{36}{3} - 1\right) = \frac{63-36}{3} + 1 = \boxed{10}$

Для второго: $\frac{124-64}{4} + 1 = \boxed{16}$

$\frac{215-125}{5} + 1 = \boxed{19}$

$\frac{342-216}{6} + 1 = \boxed{22}$

$\frac{511-343}{7} + 1 = \boxed{25}$

$\frac{728-512}{8} + 1 = \boxed{28}$

$\boxed{\text{Чистовик}}$

$\frac{999-729}{9}+1=\boxed{31}$

$\frac{1330-1000}{10}+1=\boxed{34}$

$\frac{1727-1331}{11}+1=\boxed{37}$

$2025 \not\vdots\, 12$, а $2016 \vdots 12 \Rightarrow \frac{2016-1728}{12}+1=\boxed{25}$

Значит всего чисел $\in A$: $10+16+19+22+25+28+$

$+31+34+37+25=(16+19+\ldots+37)+10+25=$

$=\frac{16+37}{2}\cdot 8+35=53\cdot 4+35=212+35=247$

Ответ: 247.

№5

Мы рассматриваем все числа $x,y,a>0$ положительными.

$$\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}+\frac{a}{\frac{x+y}{\sqrt{xy}}}\geqslant\frac{a}{2}+4$$

$$\sqrt{\frac{x^2+2xy+y^2}{xy}}=\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2}=$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2}=\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}$$ т.к. $x,y>0$

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2+\frac{a}{\sqrt{\frac{x^2+2xy+y^2}{xy}}}\geqslant\frac{a}{2}+4$$

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2+\frac{a}{\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}}\geqslant\frac{a}{2}+4$$

Пусть $t=\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}$, $t\geqslant 2\ \forall x,y>0$

Тогда нер-во примет вид: $t^2+\frac{a}{t}\geqslant\frac{a}{2}+4$ т.к. $t>0\ (x,y>0)$ можем домножить на t

$$t^3+a\geqslant t\left(\frac{a}{2}+4\right)$$

Введём $f(t)=t^3-t\left(\frac{a}{2}+4\right)+a$ ← мы рассматриваем данную ф-ю при $\boxed{t\geqslant 2}$

$$f'(t)=3t^2-\frac{a}{2}-4$$

$\boxed{\text{Чистовик}}$

Рассмотрим точки экстремума функции $f(t)$:

$f'(t)=0$ $\quad 3t^2=\frac{a}{2}+4$ ← $a>0 \Rightarrow$ точно есть решение

$t^2=\frac{a+8}{6}$ $\quad t_0=\sqrt{\frac{a+8}{6}}$ ← t_0 – точка экстремума

т.к. мы рассматриваем $t\geq 2$, то точка $(-t_0)$ нас не интересует.

Посчитаем $f(2)=8-2\left(\frac{a}{2}+4\right)+a=8-a-8+a=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(2)=0$

Заметим, что при $t\geq t_0$ $\quad f'(t)\geq 0 \Rightarrow f(t)\uparrow$

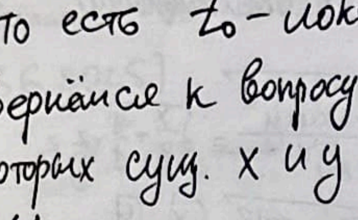
при $t<t_0$ $\quad f'(t)<0 \Rightarrow f(t)\downarrow$

то есть t_0 – локальный минимум $f(t)$

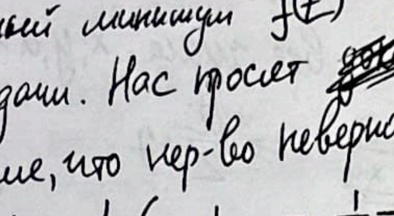
Вернёмся к вопросу задачи. Нас просят найти a при которых сущ. x и y такие, что нер-во неверно. Понятно, что $\forall t\geq 2$ сущ. x и y равные t (график $z+\frac{1}{z}=p$ при $p\geq 2$ всегда имеет реш, притом положительное). А значит, если просят, чтобы нер-во не выполнялось, то необходимо, чтобы нашлось t для которого $f(t)<0$, но теперь становится понятно, что это выполнено, если t_0 – точка локального минимума, то $t_0>2$

Поясняющие картинки:

Если $t_0\leq 2$:



$t_0>2$



Итак $t_0>2$ $\quad \sqrt{\frac{a+8}{6}}>2$ $\quad \frac{a+8}{6}>4$ $\quad a+8>24$

$\boxed{a>16}$

Ответ: $a\in(16;+\infty)$.

$z = \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}$ $\quad z > 0$ Черновик

$z^2 + \frac{a}{z} \geq \frac{a}{2} + 4$ При $z \geq 2$ сущ. x и y

$z^3 + a \geq \left(\frac{a}{2} + 4\right) z$

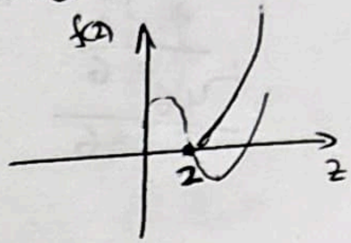
$z^3 - z\left(\frac{a}{2} + 4\right) + a \geq 0$

$f(2) = 8 - 2\left(\frac{a}{2} + 4\right) + a =$

$= 8 - a - 8 + a = 0$

$f'(z) = 3z^2 - \frac{a}{2} - 4 = 0$

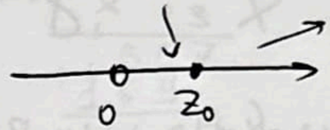
$f(2) = 0$



$3z^2 = \frac{a+8}{2}$ $\quad a > 0$

$z_0^2 = \frac{a+8}{6}$

$f'(2) = 3 \cdot 4 - 4 - \frac{a}{2} = \boxed{8 - \frac{a}{2}}$



$z_0 = \sqrt{\frac{a+8}{6}}$

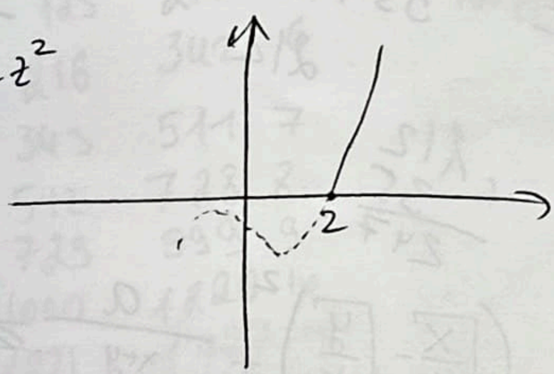
$\sqrt{\frac{a+8}{6}} \geq 2$

$\frac{a+8}{6} \geq 4$ $\quad \boxed{a = 16}$ $\quad x + \frac{1}{x} = p$

$a + 8 \geq 24$

$\boxed{a \geq 16}$

$\sqrt{\frac{x}{y}} = 5$ $\quad \frac{y}{y} = z^2$



Черновик

$2016 - 1728 = 288$

$288 : 12 = 24$, $24 \cdot 12$

$999 - 729$

$999 - 729 = 270$

$270 : 9 = 30$

$1728 + 288 = 2016$

$1727 - 1221$

$1727 - 1221 = 506$

$506 : 11 = 46$

$46 \cdot 11 = 506$

$1727 - 1331 = 396$

$396 : 11 = 36$

$12x \quad 12y$

2001

$2016 : 12 = 168$

$x \quad y$

2004

$y-(x-1) \quad \frac{12y-12x}{12}+1$

$144 \cdot 2$

$t+\frac{1}{t}=z$

$24 \cdot 12$

$\frac{16+37}{2} \cdot 8 + 36 =$

212

$37 + 16 = 53$

$\sqrt{\frac{x}{y}}=t \quad 53 \cdot 4 = 200+12$

212

$53 \cdot 4 = 212$

$212 + 35 = 247$

$\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+2xy}{xy}}$

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2+\frac{a}{\frac{x+y}{\sqrt{xy}}} \geq \frac{a}{2}$$

$$=\sqrt{2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}=$$

$$(t+\frac{1}{t})^2+\frac{a}{t+\frac{1}{t}} \geq \frac{a}{2}+4$$

$$=\left|\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2\right|$$

Черновик

$64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96, 100, 104, 108, 112, 116, 120, 124$

$36, 37, 38, 39, \ldots, 2023, 2024, 2025$

$n \vdots [\sqrt[3]{n}]$

$1^3 = 1$

$2^3 = 8$

$3^3 = 27$

$4^3 = 64$

$5^3 = 125$

$6^3 = 216$

$7^3 = 343$

$8^3 = 512$

$9^3 = 729$

$10^3 = 1000$

$11^3 = 1221$

$12^3 = 1728$

$13^3 = 2197$

144×12: 288, 144, 1728

$1440 + 288$

$49 \times$

$64 \times 8 = 512$

$2197 : 13 = 169$

11^3

$81 \cdot 9 = 729$

$121 \times 11 = 1331$

$1210 + 11$

$511 : 7$

121×11

169×13: 507, 169, 2197

$728 : 8 = 91$

$511 - 343 = 168$

$343 + 168 = 511$

$168 : 7 = 2$

$\frac{63}{3} - \frac{36}{3}$

$36 \to 63 \to 3$

64 – 124		4
125	215	5
216	342	6
343	511	7
512	728	8
729	999	9
1000	1220	10
1221	1727	11
1728	2196	12

$12, 13, 14, \ldots, 21$

$36\ 39\ 42\ 45\ 48\ 51$

$5{:}1\ \ 5.7\ \ 60\ 63$

$\frac{124}{4} - \left(\frac{64}{4} - 1\right)$

$\frac{39}{3} - \left(\frac{36}{3} - 1\right)$

$3x \quad 3y$

$x \quad y$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}\geqslant\frac{a}{2}+2$$

Черновик

$\boxed{a>0}$

$\exists x, y$

$$\exists x,y:\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}<\frac{a}{2}+2$$

$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$

$\frac{1}{x+y}\leq\frac{1}{2\sqrt{xy}}$

$$\cancel{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+a}\leq\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a}{2}$$

$\sqrt{xy}<\frac{x+y}{2}$

$$\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}\leq\frac{a}{2}$$

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2+a\cdot\sqrt{\frac{xy}{x^2+y^2+2xy}}=$$

$$=\frac{a}{\sqrt{\frac{x^2+y^2+2xy}{xy}}}=\frac{a}{\sqrt{2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}}=$$

$$\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+\frac{a}{\quad}\qquad\frac{a}{\left|t-\frac{1}{t}\right|}$$

$$y^2+\frac{a}{y}<\frac{a}{2}$$

$$y=\left|\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right|$$

$$y^3+a<\frac{ay}{2}\qquad y^3-\frac{a}{2}y+a<0$$

$$|y|=y^2\ \frac{a}{2}$$

Черновик

$$\log_2^2(x+2)\cdot\log_3^2(x+7)+16\le 32\cdot\log_9(x+2)\cdot\log_4(x+7)$$

$3^2 \qquad 2^2$

$$\log_2^2(x+2)\log_3^2(x+7)+16\le 8\log_3(x+2)\cdot\log_2(x+7)$$

$$\frac{8\cdot\log_2(x+2)}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_3(x+7)}{\log_3 2}\qquad \log_3(x+2)=\frac{\log_2(x+2)}{\log_2 3}$$

$$a^2b^2+16\le 8ab$$

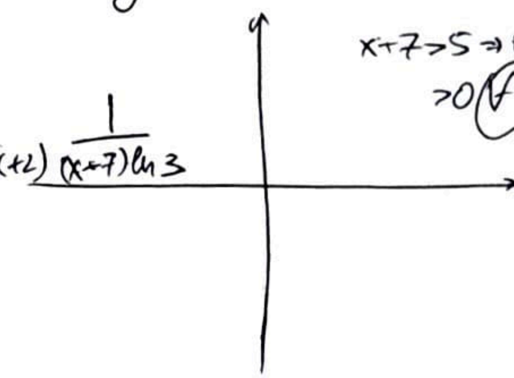
$x+2>0$

$$(ab-4)^2\le 0 \qquad \log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7)=$$

$x+7>5\Rightarrow\log_3(x+7)$
$>0 \ \forall x$

$$\log_a x=\frac{1}{x\ln a}$$

$$=\frac{1}{(x+2)\ln 2}\cdot\log_3(x+7)+\log_2(x+2)\frac{1}{(x+7)\ln 3}$$



$\overline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}\ \overline{4}\ \overline{5}\ \overline{6}\ \overline{7}\ \overline{8}\overline{9}\ \overline{10}$

~~10 9~~

$\frac{10\cdot 9}{2}=45$ ветрен

$45\cdot 2=90$

$\frac{18}{2}\cdot 10=\boxed{90}$

0 2 4 6 8 .. 16 18

$d\ge 1$
$x\ge 0$

$x \quad x+d \quad x+2d \quad \dots \quad x+8d \quad x+9d$

II I

$2x+18=18$
$x=0$

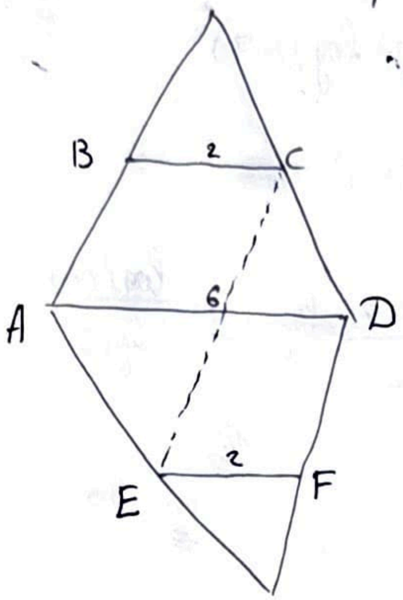
$$\frac{x+x+9d}{2}\cdot 10=(2x+9d)\cdot 5=90 \qquad 2x+9d=18$$

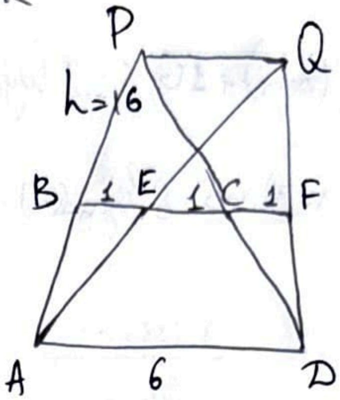
$$2x=9(2-d)$$

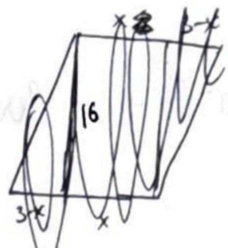
~~x=0~~ $2-d \,\vdots\, 2$

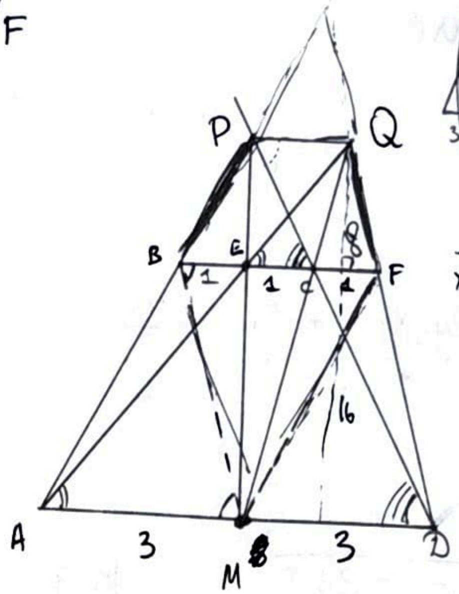
$d \,\vdots\, 2 \quad \boxed{d=2} \quad d=4$

Черновик







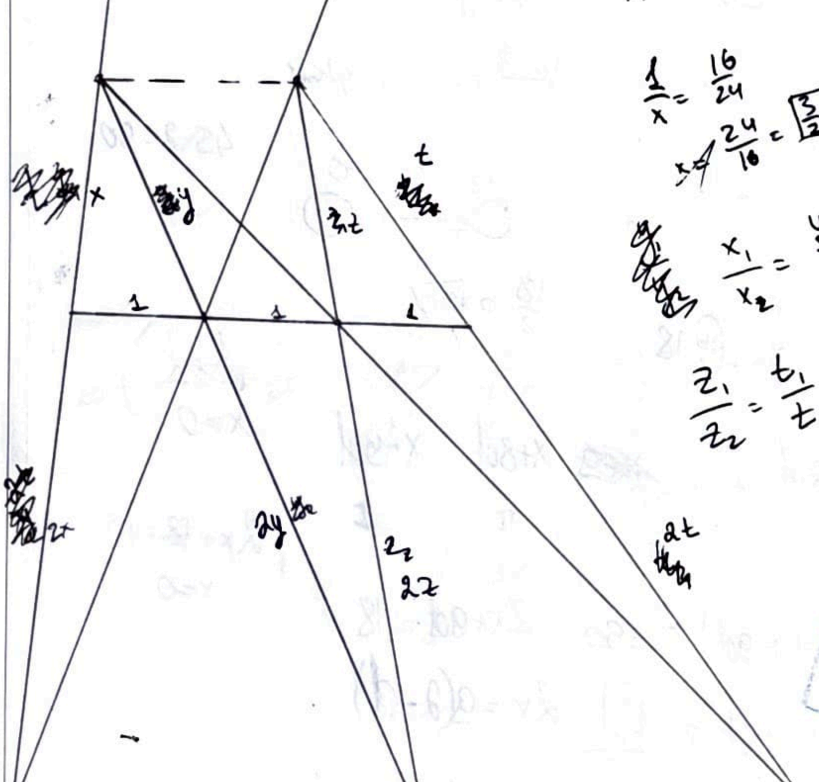


$$\frac{x}{x+16} = \frac{1}{3}$$

$$3x = x+16$$

$$2x = 16$$

$$x = 8$$



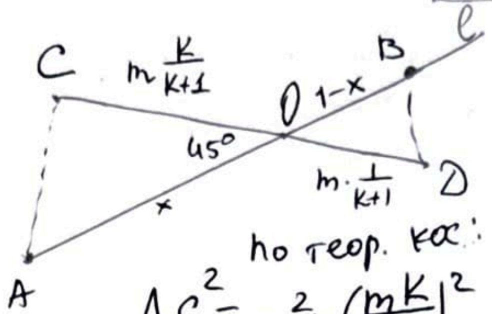
$$\frac{1}{x} = \frac{16}{24}$$

$$x = \frac{24}{16} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

$\boxed{\text{Чистовик}}$



$CO = \frac{mk}{k+1}$ $OD = \frac{m}{k+1}$

Пусть $AO = x$

если $O \in AB$.

по теор. кос:

$$AC^2 = x^2 + \left(\frac{mk}{k+1}\right)^2 - 2x\cdot\frac{mk}{k+1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$BD^2 = (1-x)^2 + \left(\frac{m}{k+1}\right)^2 - 2(1-x)\cdot\frac{m}{k+1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

~~При~~ Найдём, когда $AC^2 = BD^2$

$$x^2 + \frac{m^2k^2}{(k+1)^2} - \frac{xmk\sqrt{2}}{k+1} = 1-2x+x^2+\frac{m^2}{(k+1)^2} - \frac{(1-x)m\sqrt{2}}{k+1}$$

$$2x-1+\frac{m^2k^2-m^2}{(k+1)^2}+\frac{(1-x)m\sqrt{2}-xmk\sqrt{2}}{k+1}=0$$

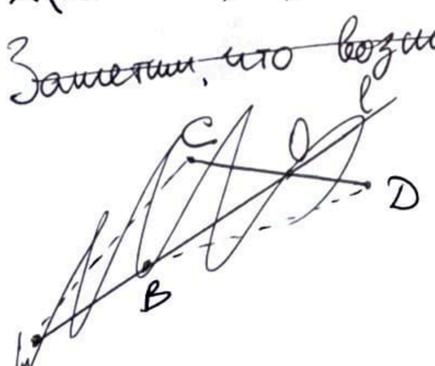
$$2x-1+\frac{m^2(k-1)(k+1)}{(k+1)^2}+\frac{m\sqrt{2}}{k+1}\left((1-x)-xk\right)=0$$

$$2x-1+\frac{m^2\cancel{(k+1)}(k-1)}{k+1}+\frac{m\sqrt{2}}{k+1}\left(1-x(k+1)\right)=0$$

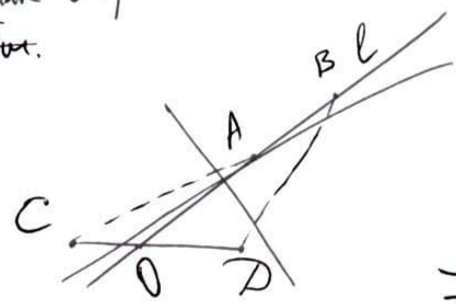
$$2x-1+\frac{m^2(k-1)}{k+1}+\frac{m\sqrt{2}}{k+1}-xm\sqrt{2}=0$$

$$x(2-m\sqrt{2})+\frac{m}{k+1}\left((k-1)m+\sqrt{2}\right)=1$$

~~Заметим, что возможны ещё 2 картинки:~~



~~тогда во второй теор. кос для $\triangle BOD$ знак в третьем слагаемом поменялся бы.~~

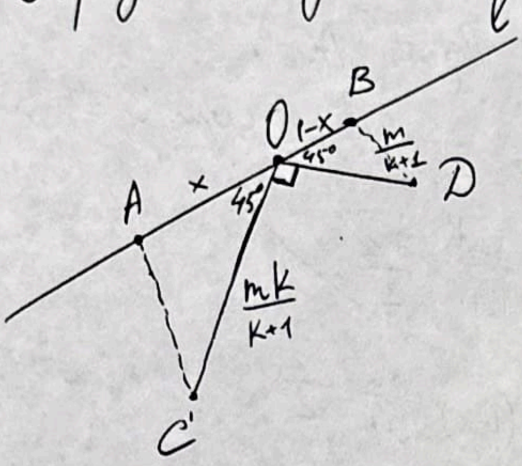


Чистовик

Отразим точку C отн. ℓ, тогда т.к. $\angle AOC = 45^\circ$, то

$\angle AOC' = 45^\circ$ и $\angle BOD = 45^\circ$.

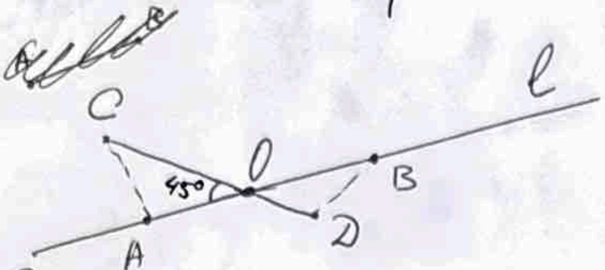
$\Rightarrow \angle C'OD = 90^\circ$



8 стр. / 8

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

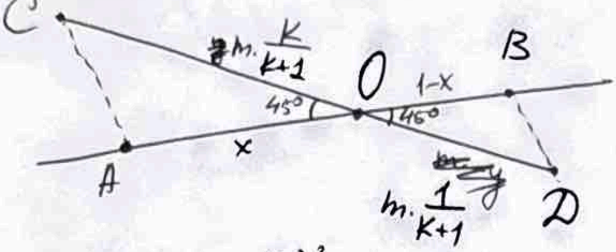
черновик



$$\frac{y}{m-y}=k$$

$$y=mk-yk$$

$$y=m\cdot\frac{k}{k+1}$$



$$AC^2=x^2+m^2\left(\frac{k}{k+1}\right)^2-2x\cdot m\frac{k}{k+1}\cdot\cos 45^\circ$$