13-27-19-36
(139.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы Горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Федорова Алексея Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход 11:51 – 11:54

Дата

«06» апреля 2025 года

Подпись участника

13-27-19-36
(139.1)

80 (восемьдесят)

ЧЕРНОВИК
СТР 1/6

2035 55

2035 | 11
185

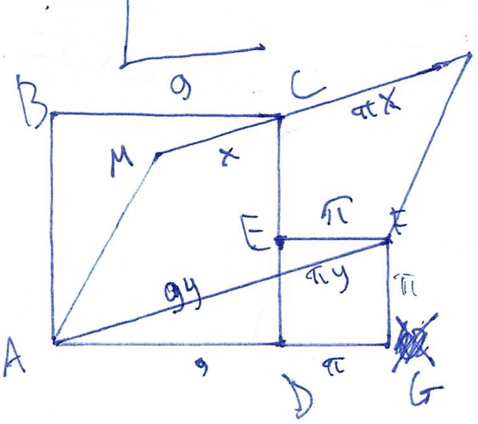
2033 53

2033 | 53
38

2034 | 2
1017 | 9
113

54 | 2
27 | 3
9 | 3
3

1017 | 9
113



$\frac{1}{\pi}$ $\frac{9}{\pi}$

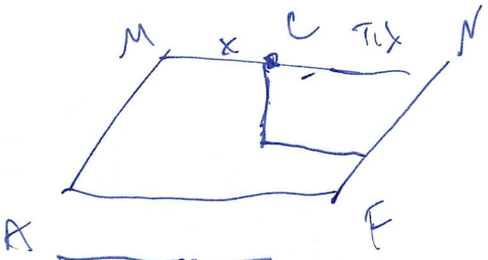
$\pi^2 + (9-\pi)^2$

$\sqrt{\pi^2 + (9-\pi)^2} =$

$= \sqrt{\pi^2 + 81 + 18\pi + \pi^2} =$

$= \sqrt{2\pi^2 + 18\pi + 81}$

2026 | 23
8



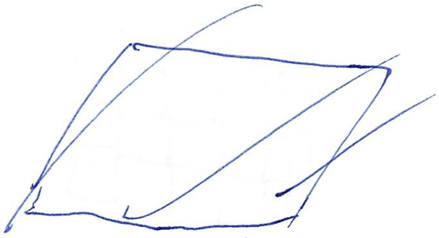
$\sqrt{2\pi^2 + 18\pi + 81}$

2026 46 | 2
23

2027 47

2028 48

2027 | 47
4

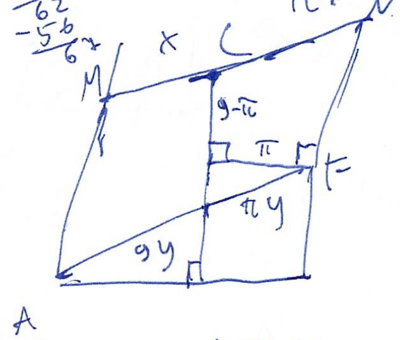


2027 | 7
28

2014 | 2
507

2028 | 2
1014 | 2
507

48 | 2
24 | 2
12



2029 | 7
28
49

2031 | 17
119

2030 50

2031 51 | 3
17

2032 | 2
1016 | 2
508

1016 | 2
508

2032 52 | 2
26 | 2
13

508 | 13
39

ЧЕРНОВИК
СТР 2/6

17 5
3 3 3 3 3

2

2 ≥4

$\frac{8a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2\sqrt{8}$

$\frac{8a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{8}{b}+\frac{8}{ab} \geq 2\sqrt{\frac{8}{ab^2}}$

110
101

0110
101

$\frac{ab}{(1+a)(a+b)(b+8)}$

$v\ \frac{м}{с}$

$\frac{24м}{v+1}=x$

$7м\ \ \frac{7}{v}$ с.

$(1+a)(a+b)(b+8)$

$(a+a^2+ab+ab)(b+8)$

$ab+a^2b+b^2+ab^2+8a+8a^2+8b+8ab$

≤2

$\frac{8a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{8}{b}+\frac{8}{ab}$

$a+b+9+$

$\frac{7}{v}\cdot 14\ \ 9\cdot 12$

$=\frac{10}{v}\cdot 2$

$\frac{ab}{a^2b+8a^2+b^2+ab^2+9ab+8a+8}$

$a+\frac{8a}{b}+\frac{b}{a}+b+9+\frac{8}{b}+\frac{8}{ab}$

max min

$\frac{a^2b+8a^2+b^2+ab^2+9ab+8a+8}{ab}$

$\frac{7}{v}$

$\frac{7}{v}\cdot 1\frac{м}{с}+\frac{10}{v}\cdot 1\frac{м}{с}$

$\frac{10}{v}\cdot 2\cdot\frac{м}{с}$

$\frac{7}{v}\cdot 1+\frac{10}{v}\cdot 1=\frac{10}{v}\cdot 2$

$\frac{7}{v}+\frac{10}{v}=\frac{20}{v}$

$\frac{17}{v}=\frac{20}{v}$

13-27-19-36
(139.1)

ЧЕРНОВИК

СТР 3/6

$9 + a + b + \frac{8a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{8}{b} + \frac{8}{ab}$

$2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3$

$8^3 = (2^3)^3 = 8^9$

$\geq 6\sqrt[6]{\frac{ab \cdot 8a \cdot b \cdot 8 \cdot 8}{a\,b\,b\,a\,b}} = 6\sqrt[6]{\frac{8^9}{b}}$

$a = b = \frac{8a}{b} = \frac{b}{a} = \frac{8}{b} = \frac{8}{ab}$

$6\sqrt[6]{\frac{8^9}{b}}$

$\frac{8}{b} = b$

$8 = b^2$

max $b = \sqrt{8}$

$\begin{array}{r} 16 \\ \times 8 \\ \hline 128 \end{array}$

$\frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}}{(1+\sqrt{8})(\sqrt{8}+\sqrt{8})(\sqrt{8}+8)}$

$(1+\sqrt{8})(2\sqrt{8})(\sqrt{8}+8)$

$\frac{8}{16+128+32\sqrt{8}} =$

$(2\sqrt{8}+16)(\sqrt{8}+8)$

$= \frac{1}{2+16+4\sqrt{8}} =$

$16 + 16\sqrt{8} + 16\sqrt{8} + 128$

$= \frac{1}{18+4\sqrt{8}}$

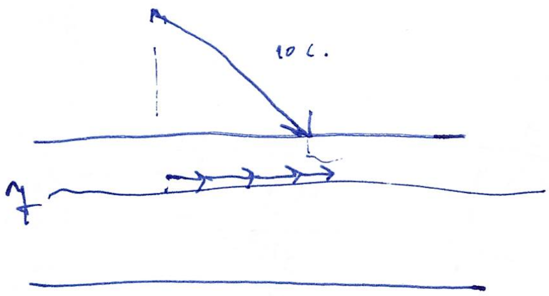
$\frac{1}{18+4\sqrt{8}}$

$\frac{27}{24}$

$\frac{1}{1+8+1+1+9+8+8}$

$1 \sim \frac{1}{2025}$

$\frac{1}{36} < \frac{1}{18+4\sqrt{8}}$



$36 \vee 18+4\sqrt{8}$

$18 \vee 4\sqrt{8}$

$9 \vee 2\sqrt{8}$

$81 \vee 32$

ЧЕРНОВИК
СТР. 4 / 6

$2026 : 46 = 44$ (ост. 2)

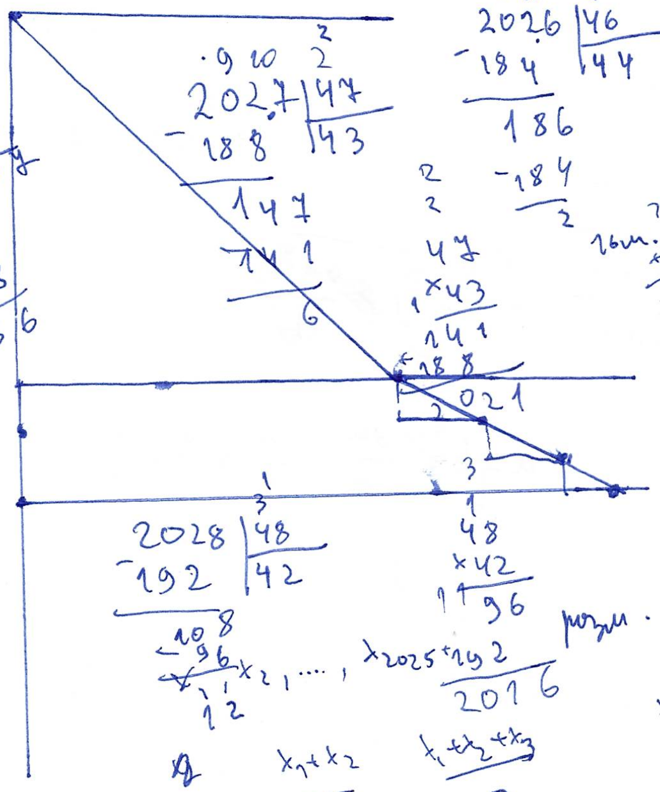
$2 + 46 \cdot 44 = 2026$

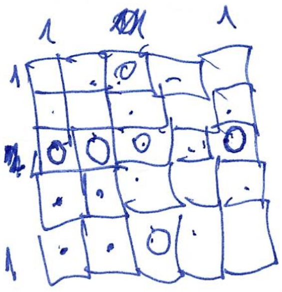
$2027 : 47 = 43$ (ост. 6)

$2034 : 54 = 37$ (ост. 36)

$47 \cdot 43 = 2021$

$46 \cdot 44 = 2024$





$2035 : 55 = 37$

$2028 : 48 = 42$

$48 \cdot 42 = 2016$

розм. 1

$x_1, x_2, \ldots, x_{2025}$

$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2025}}{2025}$ розм. ?

$x_1 \quad \frac{x_1+x_2}{2} \quad \frac{x_1+x_2+x_3}{2}$

$< max$

$> min$

$2029 : 49 = 41$ (ост. 20)

$\frac{1}{2025} \quad \frac{2024}{2025}$

$2032 : 52 = 39$ (ост. 4)

$x < \frac{1}{2025}$

$2000 : 50 = 40$

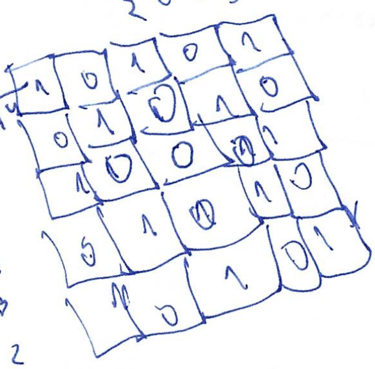
$49 \cdot 41 = 2009$

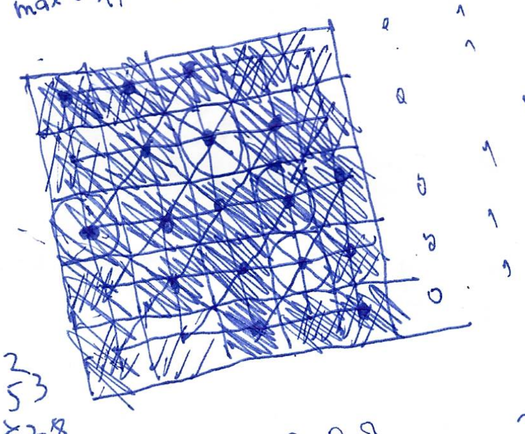
$\frac{x_1+x_2}{2} \le max(x_1, x_2)$

$53 \cdot 38 = 2014$

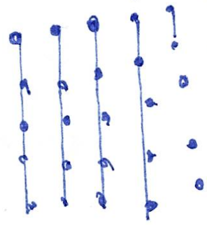
$2014 + 19 = 2033$

$52 \cdot 39 = 2028$





$2033 : 53 = 38$ (ост. 19)



$53 \cdot 38 = 2014$

$2014 + 19 = 2031$

0 0 0 0 0
1 1 1 1 1

$2031 : 51 = 39$ (ост. 42)

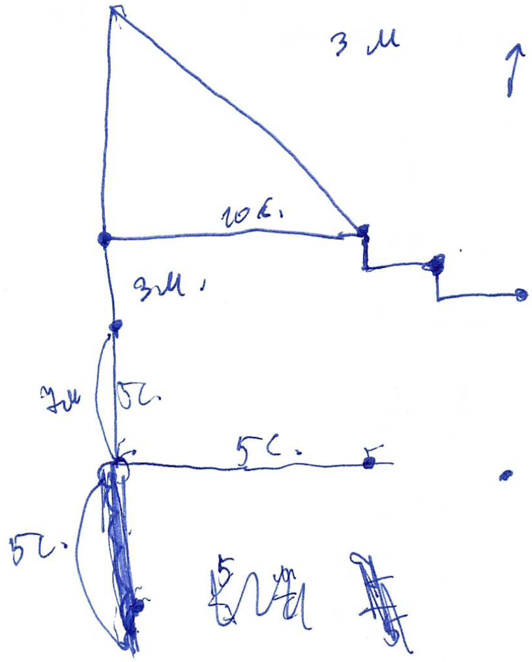
$39 \cdot 51 = 1989$

$1989 + 42 = 2031$

13-27-19-36
(139.1)

ЧЕРНОВИК

СТР 5 / 6

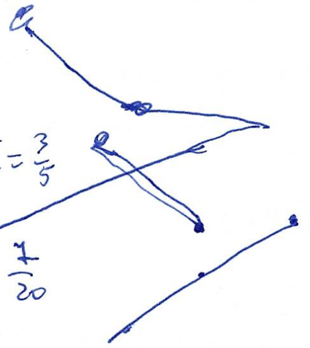


3 м

$\uparrow \frac{7}{5} \frac{м}{с}$ $\downarrow 7 \frac{м}{с}$

$3 - \frac{12}{5}$

$\frac{15}{5} - \frac{12}{5} = \frac{3}{5}$



$\frac{3}{5}$ м

$\frac{1}{4} + \frac{7}{20}$

7 с.

$\frac{12}{20}$ $\frac{5}{20} + \frac{7}{20}$ м 5 с

$1 + \frac{7}{4}$ $\frac{7}{5} \frac{м}{с}$

5 с.

7 м

$\frac{7}{5} + 1 = \frac{12}{5} \frac{м}{с}$

1,25 м. 5 с.

$\frac{35}{5}$ м 7 м.

$\frac{7}{5}$ м/с.

17 м.

$\downarrow$ 1 м/с

$\frac{5 \cdot 17}{12}$

$\frac{7}{5} \frac{м}{с}$

17 м.

$\uparrow$ X м/с.

$\frac{85}{12} = 7\frac{1}{12}$

$\xrightarrow{10 \cdot 1}$ $\xrightarrow{2 \cdot ?}$

$\cancel{17} : (x+1)$

$\xrightarrow{\cdot 7}$ $\xrightarrow{2 \cdot ?}$

x+1 м/с v сбм.

$10 + 2x = 7y + 2x$

$10 = 7y$

$y = \frac{10}{7} \frac{м}{с}$

$\frac{10}{7} + 1$

27 м.

$0 + 2x = 20 + 2x$

$\frac{5 \cdot 27}{12}$

$\frac{135}{12} = 11\frac{3}{12} = 11,25$

~~Б~~
ЧИСТОВИК
стр. 1/6

№1.

Проверим все следующие года по порядку

$2026 = (20+26)\cdot 44 + \underline{2}$ $\quad 2 < 46$

$2027 = (20+27)\cdot 43 + \underline{6}$ $\quad 6 < 47$

$2028 = (20+28)\cdot 42 + \underline{12}$ $\quad 12 < 48$

$2029 = (20+29)\cdot 41 + \underline{20}$ $\quad 20 < 49$

$2030 = (20+30)\cdot 40 + \underline{30}$ $\quad 30 < 50$

$2031 = (20+31)\cdot 39 + \underline{42}$ $\quad 42 < 51$

$2032 = (20+32)\cdot 39 + \underline{4}$ $\quad 4 < 52$

$2033 = (20+33)\cdot 38 + \underline{19}$ $\quad 19 < 53$

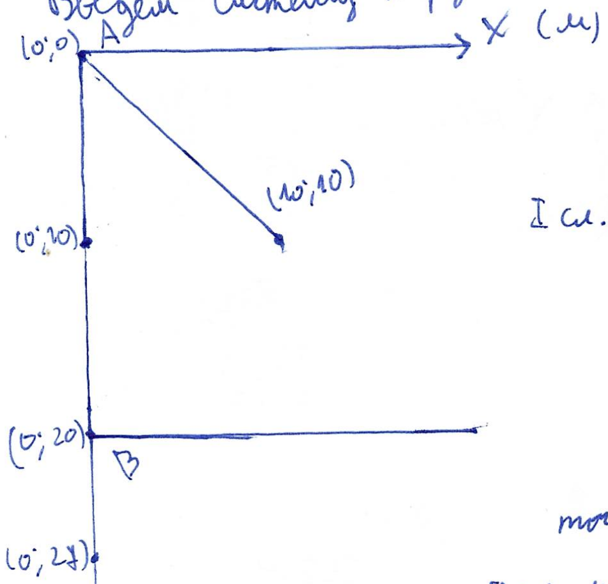
$2034 = (20+34)\cdot 37 + \underline{36}$ $\quad 36 < 54$

$2035 = (20+35)\cdot 37$

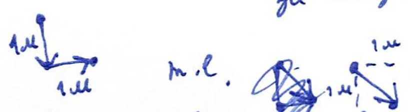
Ответ: 2035 год.

№5.

Введем систему корд. как показано на рисунке



Движение ~~м~~ гидры до середины за секунду:



I сл. встреча на ~~в~~ водной половине ~~реки~~ канала:
Значит через 10 секунд гидра в (10; 10). Далее заметим, что для того, чтобы гидра и выдра встретились в одной точке, то к десятой секунде выдра должна оказаться в точке $(10; y_1)$, т.к. далее по X их корд. меняется каждую секунду по 1 метра, а значит если выдра через 10 секунд не на $(10; y_1)$, то гидра и выдра не встретятся.

ЧИСТОВИК
СТР. 2/6

Т.к. выдра через 10 сек. после начала движения в $(10; y_1)$, а двигается ~~на реке~~ по каналу она только по участку с течением 2 м/с, то двигалась по ~~реке~~ каналу она $\frac{10\text{ м}}{2\frac{\text{м}}{\text{с}}} = 5\text{ с.}$, а значит кусок участка в 7 м. выдра прошла за 5 с., тогда скорость $V = \frac{7}{5}\frac{\text{м}}{\text{с}}$

Расстояние по y от выдры до гидры 27 м, $V_{\text{сбл.}y} = (1+\frac{7}{5})\frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{12}{5}\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Значит встретятся они через $\frac{5\cdot 27}{12}\text{с} = \frac{45}{4}\text{ с.} = 11{,}25\text{ сек.}$ Это произойдет на расстоянии $11{,}25\text{с} \cdot 1\frac{\text{м}}{\text{с}} - 10\text{ м} = 1{,}25\text{ м}$ от середины канала

II сл. встреча на первой половине канала

Первые 7 м. выдра пройдет за $\frac{7\text{ м}}{V\frac{\text{м}}{\text{с}}} = \frac{7}{V}\text{с.}$, в это время гидра по x пройдет $\frac{7}{V}\text{с.} \cdot 1\frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{7}{V}\text{ м}$

Далее выдра ~~идёт~~ плывет по первой половине канала $\frac{10}{V}\text{ с.}$ и за это время ее коорд. по x становится $\frac{10}{V}\text{с.} \cdot 2\frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{20}{V}\text{ м}$, но при этом гидра за $\frac{10}{V}\text{ с.}$ проплывет $\frac{10}{V}\text{с.} \cdot 1\frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{10}{V}\text{ м}$. Но тогда у гидры и выдры при попадании на участок канала с течением $1\frac{\text{м}}{\text{с}}$ коорд. по x различаются (у гидры $\frac{10}{V} + \frac{7}{V} = \frac{17}{V}$, у выдры $\frac{20}{V}$), а значит они никогда не встретятся

Ответ: $V = \frac{7}{5}\frac{\text{м}}{\text{с}}$

№4.

Найти наиб. значение $\frac{ab}{(1+a)(a+b)(b+8)}$ равно. найти

Наим. знач. $\frac{(1+a)(a+b)(b+8)}{ab}$ (т.к. $\frac{ab}{(1+a)(a+b)(b+8)} =$

ЧЕРНОВИК

СТР 6/6

$(1+a)(a+b)(b+8)$

$(1+a)(ab+b^2+8a+8b)$

$$\frac{ab+b^2+8a+8b+a^2b+ab^2+8a^2+8ab}{ab}$$

$$1+\frac{b}{a}+\frac{8}{b}+\frac{8}{a}+a+b+\frac{8a}{b}+8$$

$9+\sqrt{}$

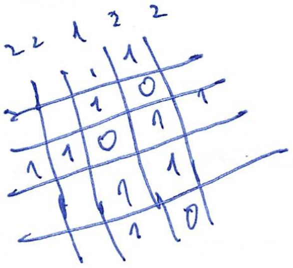
$$\frac{b}{a}=\frac{8}{b}=\frac{8}{a}=a=b=\frac{8a}{b}$$

$$\frac{8}{b}=b$$

$8=b^2$

$b=\sqrt{8}$

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}}=\frac{8}{\sqrt{8}}=\frac{8}{\sqrt{8}}=\sqrt{8}=\sqrt{8}=\frac{8\sqrt{8}}{8}$$



$1=\sqrt{8}=\sqrt{8}=\sqrt{8}=\sqrt{8}=\sqrt{8}$

$$\frac{(1+\sqrt{8})(2\sqrt{8})(\sqrt{8}+8)}{8}$$

$$\frac{(2\sqrt{8}+16)(\sqrt{8}+8)}{8}=\frac{16+16\sqrt{8}+16\sqrt{8}+16\cdot 8}{8}=$$

$=2+16+4\sqrt{8}=18+4\sqrt{8}$

$=18+8\sqrt{2}$

$9+12\sqrt{2}$

$9+4\sqrt{2}$

№4 (прод.) Чистовик стр. 3/6

$$= \frac{1}{\frac{(1+a)(a+b)(b+8)}{ab}}$$

$(1+a)(a+b)(b+8) = (a+a^2+b+ab)(b+8) = ab+8a+a^2b+8a^2+$
$+b^2+8b+ab^2+8ab$

$$\frac{ab+8a+a^2b+8a^2+b^2+8b+ab^2+8ab}{ab} = 9+\frac{8}{b}+a+\frac{8a}{b}+\frac{b}{a}+$$
$$+\frac{8}{a}+b$$

по нерав. о ср.

$$\frac{\frac{8}{b}+a+\frac{8a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{8}{a}+b}{6} \geq \sqrt[6]{\frac{8}{b}\cdot a\cdot\frac{8a}{b}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{8}{a}\cdot b}$$

$$\frac{8}{b}+a+\frac{8a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{8}{a}+b \geq \cancel{6\sqrt[6]{\frac{2^9}{a^2}}}\ 6\sqrt[6]{8^3} =$$

$= 6\sqrt{8} = 12\sqrt{2}$

Достигается при $\frac{8}{b} = a = \frac{8a}{b} = \frac{b}{a} = \frac{8}{a} = b$

Но такое равенство невозможно,

Однако при $a=b=\sqrt{8}$ верно $a=b=\frac{8}{a}=\frac{8}{b}$, значит

наим. знач. при $a=b=\sqrt{8}$

Ответ: $a=b=\sqrt{8}$.

ЧИСТОВИК

СТР. 4/6

N 6.

Оценка:

~~$\frac{a+b}{2} \geq$~~ ~~$\frac{a_1+a_2}{}$~~ $\max(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Значит размах $(y_1, \ldots, y_{2025})$ не превышает 1, т.к. каждый ~~y_i~~ y_i удовл. $\max(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq y_i \geq \min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Заметим также, что ~~$\frac{x_1+\ldots+x_{2025}}{2025} > \min(a_1, a_2, \ldots$~~

$\max(x_1, x_2, \ldots, x_{2025}) > \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2025}}{2025} > \min(x_1, x_2, \ldots, x_{2025})$,

т.к. существует хотя бы 2 различн. числа. Но тогда размах $(y_1, \ldots, y_{2025})$ точно меньше 1, т.к. максимум и минимум $\{x_1, x_2, \ldots x_{2025})$ среди $y_1, y_2, \ldots, y_{2024}$ находиться оба не могут (т.к. с добавлением ср. арифм. x_i оно ~~...~~ должно или увелич. или уменьш. с x_1, ~~что не~~ но тогда т.к. x_1 содержится в ср. арифм., то и ср. арифм. ~~число~~ не может достигать ~~...~~ min и max $(x_1, x_2, \ldots, x_{2025})$

А т.к. хотя бы одно x_i ~~число~~ отлич. от другого x_j на ~~...~~ 1, то размах $y_1, y_2, \ldots, y_{2025} \leq 1 - \frac{1}{2025} = \frac{2024}{2025}$

Пример:

$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ \ldots,\ x_{2025} = 0$

$y_1 = 1,\ y_2 = \frac{1}{2},\ \ldots,\ y_{2025} = \frac{1}{2025}$

разм. $1 - \frac{1}{2025} = \frac{2024}{2025}$

Ответ: $\frac{2024}{2025}$

№ 2.

Чистовик

стр 5/6

Ответ: 16 единиц.

Пример:

1	1	0	1	1
1	1	0	1	1
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	0	1	1

Оценка:

в каждом столбце хотя бы 1 ноль и в каждой строке хотя бы 1 ноль (т.к. иначе 5 „1" подряд)

допустим, что нулей 5. Тогда каждый из них стоит попарно

(1) в разных строках и столбцах. Но тогда в четырех строках он стоит не в центре, а значит необходимо еще минимум 4 нуля (если „0" не в центре, то три единицы могут стоять подряд | |0|1|1|1| |0|1|1|1|1|), т.е. нулей 9

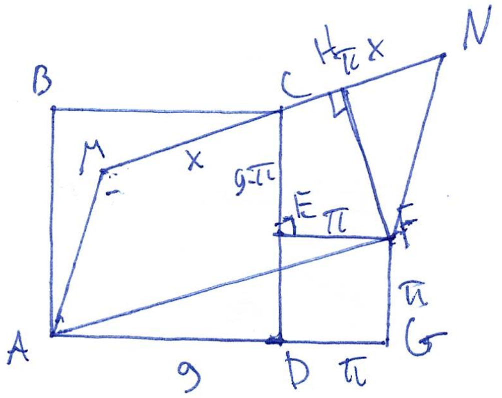
(2) допустим, что нулей 6. Тогда найдется хотя бы 3 строки или хотя бы 3 столбца, где не 2 нуля и ноль не в центре. Аналогичным (1) рассуждениям, нулей хотя бы 9

аналогично проверяем для 7 и 8 нулей

~~Ответ:~~ Значит нулей хотя бы 9, а значит единиц не больше 16.

№3.

ЧИСТОВИК
СТР 6/6



по т. Пифагора

$$AF = \sqrt{(9+\pi)^2 - \pi^2} = \sqrt{81 + 18\pi + \pi^2 - \pi^2} = \sqrt{81 + 18\pi} = 3\sqrt{9 + 2\pi}$$

Пусть FH – высота. Найдем max FH

CEFH ~~опис.~~ впис. четырехуг., т.к. $\angle CEF = \angle CHF = 90^\circ$

max FH при прямоуг. ΔCEF

$$(9-\pi)^2 + \pi^2 = HF^2$$

$$\max HF = \sqrt{81 - 18\pi + \pi^2 + \pi^2} = \sqrt{81 - 18\pi + 2\pi^2}$$

$$\max S(AMNF) = HF \cdot AF = 3\sqrt{(81 - 18\pi + 2\pi^2)(9 + 2\pi)}$$

Ответ: $3\sqrt{(81 - 18\pi + 2\pi^2)(9 + 2\pi)}$.