0 459692 580008

45-96-92-58
(137.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант В-4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы Горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Горятнова Ольга Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1 лист

+1 12:54

Дата

«6» апреля 2025 года

Подпись участника

95 (девяносто пять)

~~85 (восемьдесят пять)~~ Черновик

1 +
2 +
3 +
4 +
5
6

Исправленному верить по итогам рассмотрения апелляции

№1

15 команд

в – 2
п – 0

$a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{15}$

$a_2 - ?$

Раундов: $C_{15}^2 = \frac{15 \cdot 14}{2} = 15 \cdot 7 = 105$

Очков $= 105 \cdot 2 = 210$

$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 210$

$\frac{a_1 + a_{15}}{2} = \frac{21 \cdot 10}{15} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5}{15} = 14$

$a_1 + a_{15} = 28$

$a_1 = a_{15} + 14d$

$2a_{15} + 14d = 28$

$a_{15} + 7d = 14$

$d \neq 0$

$\frac{210}{15} = 14$

$d \geq 2$ – нет т.к. $a_{15} > 0$

$d = 2$

~~$a_2 = 7 + 14 \cdot 7 = 15 \cdot 7$~~

$a_1 = 7 + 14$

$a_{15} = 7$
$a_{14} = 8$
$a_{13} = 9$
...
$a_1 = 22$

$a_1 + a_n = 28$

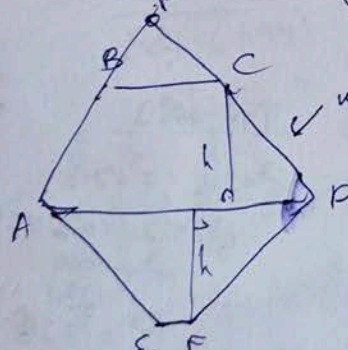
$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot 15 = 14 \cdot 15$

$a_1 = a_{15} - 14d$

$a_2 = 21$

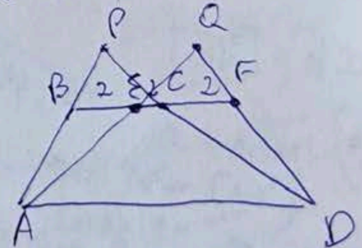
$\boxed{\text{Ответ: 21}}$

№2



не может

$AP = 12$
$h = 16$
$BC = EF = 4$
т.к. $CE \geq 2h > 32$



Черновик

№3

$$\log_2^2(2-x)\cdot\log_3^2(7-x)+16\le 32\cdot\log_9(2-x)\cdot\log_4(7-x)$$

ОДЗ: $\begin{cases}2-x>0\\7-x>0\end{cases}$ $\begin{cases}x<2\\x<7\end{cases}$ $\boxed{x<2}$

$$\left(\log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x)\right)^2+16\le 8\log_3(2-x)\cdot\log_2(7-x)$$

$t=\log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x)$

$t^2+16\le 8t$

$t^2-8t+16\le 0$

$(t-4)^2\le 0$

$t=4$:

$\log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x)=4.$

$x=1$

$\log_2 1=0$

$x=0$:

$\log_2 2\cdot\log_3 7=\log_3 7$

$x=-1$:

$\log_2 3\cdot\log_3 8=3$

$x=-2$:

$\log_2 4\cdot\log_3 9=4$ ✓

$x=-3$

$\log_2 5\cdot\log_3 10>4$

при $x\ge -3$ очев.

$\boxed{\text{Ответ: } -2}$

№4

$[49;2025]$ $[7^2;45^2]$

$n:[\sqrt[3]{n}]$

$3^3=27$; $4^3=64$; $5^3=125$ $6^3=216$; $7^3=343$;

$8^3=512$; $9^3=729$

$10^3=1000$

$11^3=1331$

$12^3=1728$

$13^3=2197$

$n=49$:

$[\sqrt[3]{49}]=3$

от 49 до 63 3

от 64 до 124 4

от 125 до 215 5

от 216 до 342 6 ну и считаем

от 343 до 512 .. очев.

$121\cdot 11=1331$

$144\cdot 12=1728$

$169\cdot 13$: $507+169=2197$

45-96-92-58 (137.2)

Черновик

№5

$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$

$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \frac{x^2+2xy+y^2}{4}$

$2(x^2+y^2) \geq x^2+2xy+y^2$

$a>0$

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a+2$

Или можно найти a при которых это ~~тождество~~ верно всегда

$S = \frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a+2$

$\frac{S}{2} \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{xy}\cdot\frac{2a\sqrt{xy}}{(x+y)}} = \sqrt{\frac{(x^2+y^2)\cdot 2a}{\sqrt{xy}\,(x+y)}}$

$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{2xy}$

(1) $\boxed{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{xy}} \geq \sqrt{2}}$

$2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$

$\sqrt{2(x^2+y^2)} \geq x+y$

(2) $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

(1)·(2)

$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{xy}\cdot(x+y)} \geq 1$

$\frac{S}{2} \geq \sqrt{2a}$

$S \geq 2\sqrt{2a}$ — нет

$2\sqrt{2}a \geq a+2$

$a(2\sqrt{2}-1) \geq 2$

$a \geq \frac{2}{2\sqrt{2}-1} = \frac{2(2\sqrt{2}+1)}{(2\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}+1)}$

$a \geq \frac{2(2\sqrt{2}+1)}{8-1}$

$a \geq \frac{2}{7}(2\sqrt{2}+1)$

т.е. при $a \geq \frac{2}{7}(2\sqrt{2}+1)$ — это тождество верно

а при $0<a<\frac{2}{7}(2\sqrt{2}+1)$ — нет

$\frac{2}{7}\cdot 3{,}8 \approx \frac{7{,}6}{7} \approx 1{,}08$

~~$a=2$: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2\sqrt{xy}}{x+y} \geq 3$~~

$a=2$: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{4\sqrt{xy}}{x+y} \geq 4$

$2\sqrt{2a} \geq a+2$

$2\sqrt{2}\cdot\sqrt{a} \geq a+2$

$\sqrt{a}=t$

$2\sqrt{2}t \geq t^2+2$

$t^2-2\sqrt{2}t+2 \leq 0.$

$(t-\sqrt{2})^2 \leq 0$

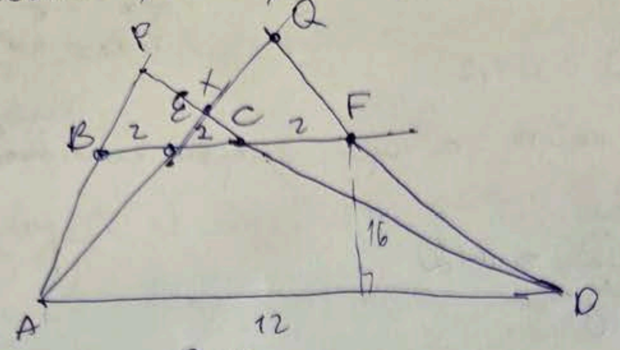
$t=\sqrt{2}$ $\sqrt{a}=\sqrt{2}$

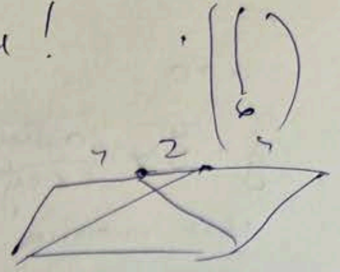
$a=2$

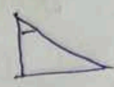
$\boxed{\text{Черновик}}$

№2

Обосновать, почему с одной стороны!







$S_{APQD} = S - ?$

$S_{BPC} = S_1$

$S_{APD} = S_2$

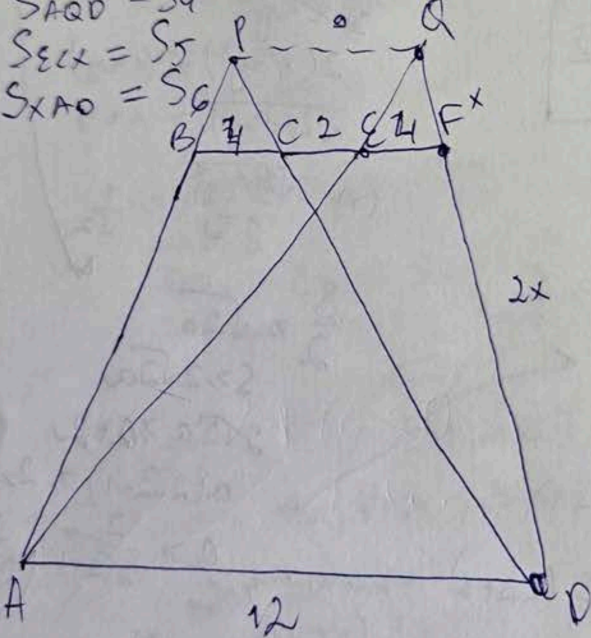
$S_{EQF} = S_3$

$S_{AQD} = S_4$

$S_{ECX} = S_5$

$S_{XAD} = S_6$

1)



$PQ \parallel AD$ потому что $BF \parallel AD$

$PC = x,\ CD = 2x$; $QE = y;\ EA = 2y$ $\Rightarrow$ по обратн. $PQ \parallel CE \parallel AD$

$h = 16$

$h_{PBC} = \frac{16 \cdot 4}{12} = \frac{16}{3}$

$h_{PBC} = x$

$\frac{h_{PAD}}{3} = h_{PBC}$

$\frac{x+h}{3} = x$

$x + h = 3x$

$h = 2x$

$x = \frac{h}{2} = 8$

$h_{APQD} = h + x = 16 + 8 = 24$

$\triangle BCF \sim \triangle DPQ$

$CF = 6 \to PQ = 9$

$S_{APQD} = \frac{PQ + AD}{2} \cdot h_{APQD} = \frac{9 + 12}{2} \cdot 24 =$

$= 21 \cdot 12 = \boxed{252}$

№5

$\frac{x\sqrt{x+y}}{xy} = \frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}$

$a = 1$ $(x+y)(x+y) = 2xy\sqrt{xy}$

$\frac{x\sqrt{x+y}}{\sqrt{xy}} + \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}$

$a = 4$

Чистовик 7

~~$PH_3 = PH +$~~ BH_1 №2 (продолжение)

$PH_3 = PH + BH_1$

$3PH = PH_3$

$3PH = PH + BH_1$

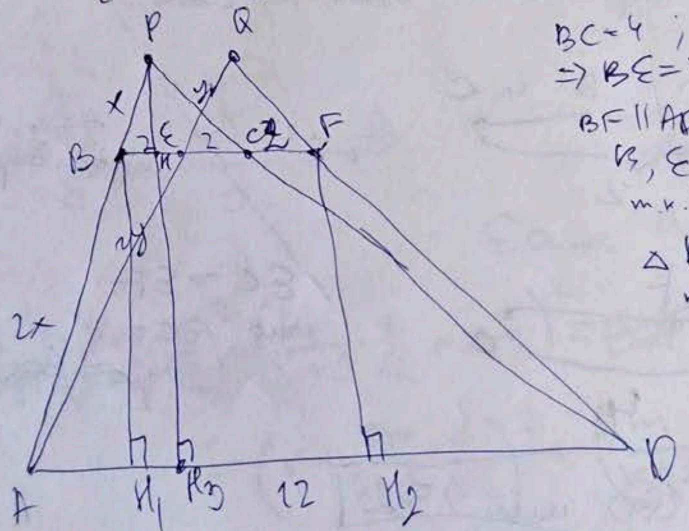
$2PH = BH_1 = 16 \Rightarrow PH = \frac{16}{2} = 8$

$PH_3 = PH + BH_1 = 16 + 8 = 24$

$S_{APQD} = \frac{PQ + AD}{2} \cdot PH_3 = \frac{9+12}{2} \cdot 24 = 21 \cdot 12 =$

$= 240 + 12 = \boxed{252}$

2) Когда отрезки BC и EF перес.



$BC = 4$; $EF = 4$, $EC = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow BE = 2$, $CF = 2$

$BF \parallel AD$ (док. в 1)

B, E, C, F – одна прямая.

т.к. $h = 16 = BH_1 = FH_2$

$\triangle PBC \sim \triangle PAD$

т.к. $BC \parallel AD$

т.к. $BC = 4$, а $AD = 12$,

то $PB = x$, $AB = 2x$

$\triangle QEF \sim \triangle QAD$

т.к. $EF \parallel AD$

т.к. $EF = 4$, $AD = 12$, то $EQ = y$; $AE = 2y$

~~$\triangle APQ$ общ.~~ $\frac{PB}{AB} = \frac{QE}{AE} = \frac{x}{2x} = \frac{y}{2y} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow BE \parallel PQ \Rightarrow BF \parallel PQ \parallel AD$.

$\triangle ABE \sim$ ~~$\triangle AP$~~ $\triangle APQ$ ($\angle PAQ$ – общий $BE \parallel PQ$) ~~с пропорц. отрезки~~)

$\frac{BE}{AB} = \frac{PQ}{AP}$ $\quad \frac{2}{2x} = \frac{PQ}{3x} \Rightarrow PQ = 3$

Пусть $PH \perp BC$ и $PH \cap AD = H_3$

т.к. $\triangle PBC \sim \triangle PAD$ (по док.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{PH}{PH_3} = \frac{BP}{AP} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$ $\quad PH_3 = PH + BH_1 = PH + 16$

$\boxed{\text{Чистовик 8}}$

№2 (прод.)

$$\frac{PK}{PH_3}=\frac{1}{3}$$

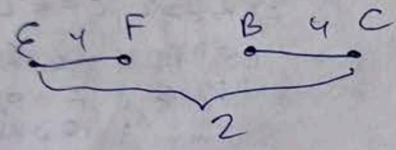
$$\frac{PK}{PH+16}=\frac{1}{3} \rightarrow 3PH=PH+16$$
$$PH=8$$

$$PH_3=PH+BH_1=16+8=24$$

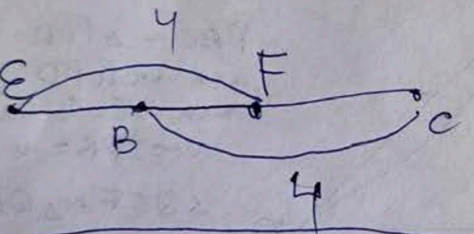
т.к. $PQ \parallel AD$, то $APQD$ – трап.

$$S_{PQDA}=\frac{PQ+AD}{2}\cdot PH_3=\frac{3+12}{2}\cdot 24=$$
$$=15\cdot 12=\boxed{180}$$

Других вариантов быть не может



– нет т.к. $2>4+4$ – противоречие



$EC>EF$
но $EC=2$, а $EF=4$
противоречие

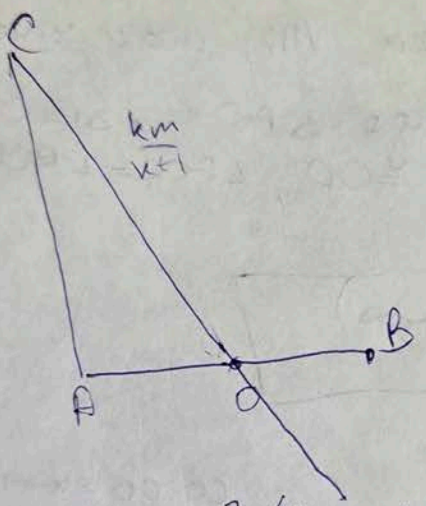
$\boxed{\text{Ответ: 180 или 252}}$

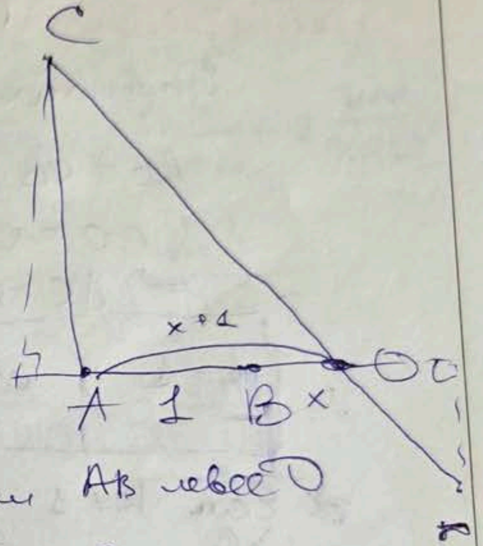
Черновик

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y} \geq a+2$$

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\dots+\frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2}{b_1+b_2+\dots+b_n}$$

Если $k>1$





Если AB левее O

$$AC^2 = \left(\frac{km}{k+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{km}{k+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-x-1\right)^2 = BD^2 =$$

$$= \left(x+\frac{\cancel{k}m}{k+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{m}{k+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2a\sqrt{xy}-ax-ay}{x+y} \geq 2$$

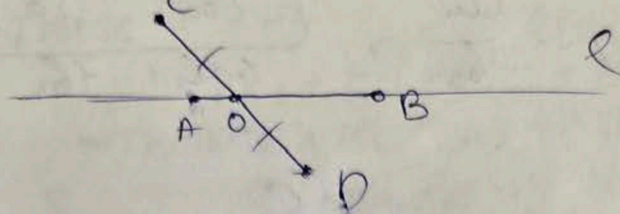
$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-\frac{a(x-2\sqrt{xy}+y)}{x+y} \geq 2$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-\frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x+y} \geq 2$$

$\boxed{\text{Чистовик 9}}$

№6

1) Если $k = 1$:

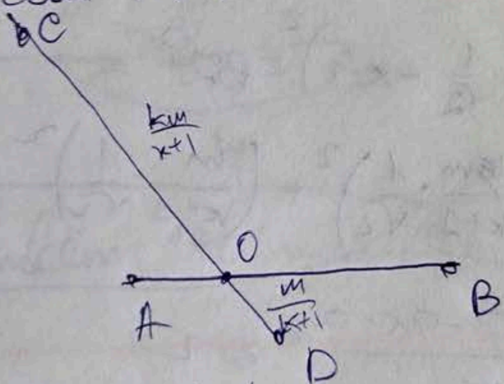


Тогда очевидно, что будет при любом m.

Подставим отрезки АК, так, чтобы $AO = OB$, тогда $\triangle AOC = \triangle BOD$ ($AO = OB$, $CO = OD$, $\angle AOC = \angle BOD$) $\Rightarrow AC = BD$

$$\boxed{k = 1; \quad m \in (0; +\infty)}$$

2) Если $k \neq 1$:



$CO : OD = k \Rightarrow$

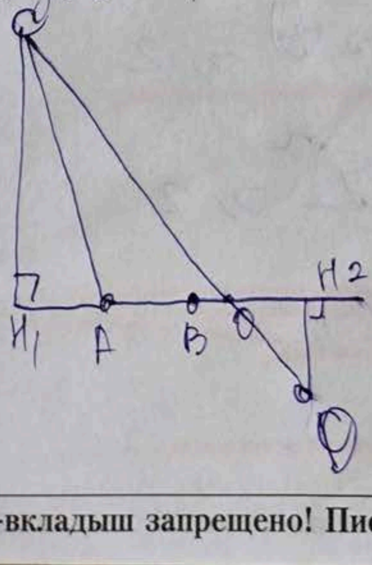
$CO = OD \cdot k$

$CD = m = CO + OD = OD(k+1)$

$OD = \frac{m}{k+1}$

$CO = \frac{km}{k+1}$

Пусть $k \neq 1$ и AB левее O. $\Rightarrow AB < AO$



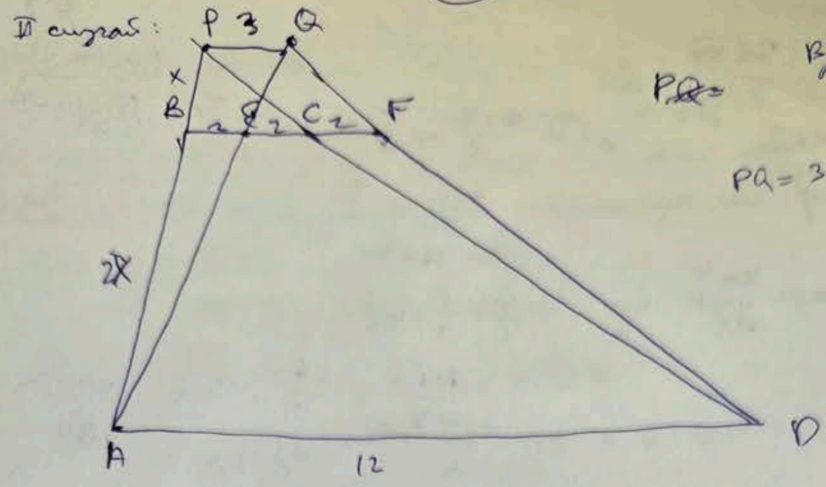
$CH_1 \perp AB$

$DH_2 \perp AB$

$\boxed{\text{Черновик}}$

№2

II случай:



~~PQ=~~

$BC = 4 \Rightarrow AD = 12 \Rightarrow BP : PA = 1:3$

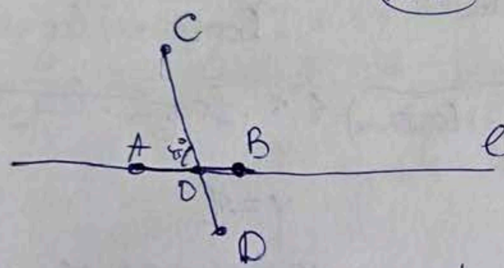
$x : 3x = 1:3x$

$PQ = 3$

$$S_{ABCD} = \frac{AD+PQ}{2} \cdot h_{APQD} = \frac{3+12}{2} \cdot 16 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2} \cdot 24 = 15 \cdot 12 = \boxed{180}$$

$\boxed{\text{Ответ: 252 или 180}}$

№6



$CD = m$

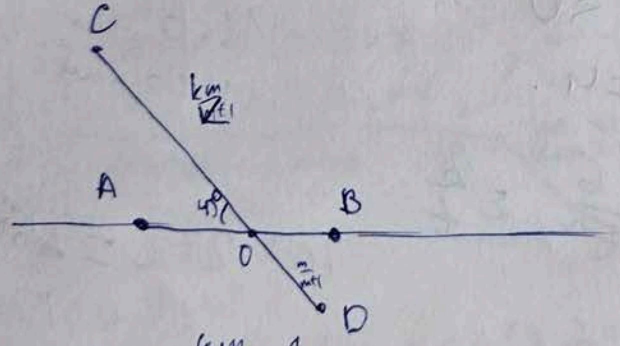
$CO : OD = k$

$CO = k \cdot OD$

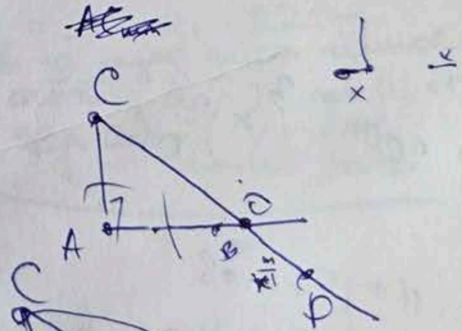
$CD = CO + OD = (k+1)\,OD$

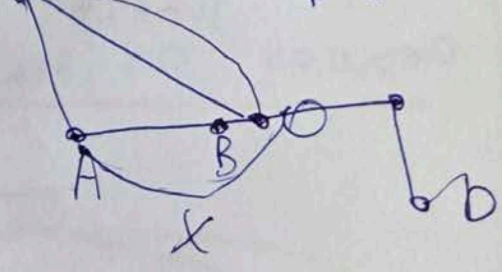
$\boxed{OD = \frac{m}{k+1} \quad OC = \frac{km}{k+1}}$

$k = 1$



~~AC~~





$$AC > \frac{km}{k+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$AC^2 = OC^2 - OC^2$$

Черновик

$\frac{3\cdot 14\cdot 10^2}{3\cdot 7}$

$a=4$

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{3\sqrt{xy}}{x+y}\geq 6$

$\log_3 2 = \frac{\log_3(2-x)}{\log_2(2-x)}$

$x=2$
$y=1$

$2\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{3}\geq 6$

$\frac{3\sqrt{2}}{3}\geq\frac{7}{2}$

$16\sqrt{2}$ 21

$x=4$
$y=1$

$\frac{4}{1}+\frac{1}{4}=4\frac{1}{4}$

$\frac{3\cdot\sqrt{4}}{5}=\frac{16}{5}=3\frac{1}{5}$

0, 2, 4 … 28

$(\log_2(7-x)\cdot\log_3(7-x))^2+16\leq 8\cdot\log_3(7-x)\cdot\log_2(7-x)$

$\log_2(7-x)\cdot\log_3(7-x)+\frac{16}{\log_2(7-x)\cdot\log_3(7-x)}\leq 8\cdot\frac{\log_3(7-x)\cdot\log_2(7-x)}{\log_2(7-x)\log_3(7-x)}$

$\log_2(7-x)\cdot\log_3(7-x)+\frac{16}{\log_2(7-x)\cdot\log_3(7-x)}\leq 8\cdot\cancel{\log_3 2\cdot\log_2 3}$

$\frac{627}{\frac{65}{72}}$

$t+\frac{16}{t}\leq 8$

$x=\cancel{1}$:

$0+16\leq 32\cdot 0$

$t^2-8t+16\leq 0$

$16\leq 0$ — нет

$16\geq 0$ — ист

$t=4$.

2004 : 3 ×12
2016

$1+\frac{16}{t^2}\leq\frac{8}{t}$

$16+272=288$

144; 12 n

11 + 157 = 168
140 + 28

Чистовик 1

№1

Всего раундов было: $C_{15}^2 = \frac{15 \cdot 14}{2} = 15 \cdot 7 = 105$

За каждый раунд одна команда получала 2 очка, другая 0

в сумме за раунд 2 очка. Значит ~~обо~~ сумма ~~наб~~ очков, набранными командами равна:

$105 \cdot 2 = 210$. ~~т.е. a_1~~

Пусть $a_1, a_2, a_3 \dots a_{15}$ - уб. ар. прогр.., $d<0$

Тогда $a_1 + a_2 + \dots + a_{15} = 210$

$a_1 + a_2 + \dots + a_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = 210$

$a_1 + a_{15} = \frac{420}{15}$

$a_1 + a_{15} = 28$

$a_1 = a_{15} - 14d$

$a_{15} + a_{15} - 14d = 28 \;|:2$

$a_{15} - 7d = 14$

$a_{15} \in \mathbb{Z}$ d - разность ар. прогр. из ~~нат.~~ целых чисел

$\Rightarrow d \in \mathbb{Z}, d<0$

$7d \,\vdots\, 7$ и $14 \,\vdots\, 7 \Rightarrow a_{15} \,\vdots\, 7$

$a_{15} = 14 + 7d$

$a_{15} = 7(2+d)$, где $d \le -1$, $d \in \mathbb{Z}$

$d = -1$:

$a_{15} = 7 \cdot (2-1) = 7$; $d=-1$, т.е.

$a_{15} = 7$; $a_{14} = 8$, ... $a_2 = 21$, $a_1 = 22$ — но за ~~раз~~ за раунд дают чётное кол-во очков ; $a_i \,\vdots\, 2$ при $1 \le i \le 15$, но $a_{15} = 7 \not\vdots\, 2 \Rightarrow$ не может быть

~~$d=2$~~ $d=-2$:

$a_{15} = 0$.

$a_{14} = 2$

$a_{13} = 4$

$a_1 = a_{15} - 14d = 0 + 14 \cdot 2 = 28$

$a_2 = 28 - 2 = 26$

Если $d \le -3$, то $a_{15} = 7(2+d) < 0$, но $a_{15} \ge 0$

Такого быть не может

$\boxed{\text{Ответ: } 26}$

Чистовик 2

№3

$$\log_2^2(2-x)\cdot\log_3^2(7-x)+16\le 32\cdot\log_3(2-x)\cdot\log_4(7-x)$$

ОДЗ:
$\begin{cases}2-x>0\\7-x>0\end{cases}$ $\begin{cases}x<2\\x<7\end{cases}$ $\boxed{x<2}$

$$\left(\log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x)\right)^2+16\le 32\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\log_3(2-x)\cdot\log_2(7-x)$$

1) Если $\log_2(2-x)=0$, т.е. $x=1$
$0+16\le 0$ - неверно

2) Если $\log_3(7-x)=0$ т.е. $x=6$
$0+16\le 0$ - неверно

3) Если $\log_2(2-x)\ne 0$ и $\log_3(7-x)\ne 0$

~~Поделим~~ Поделим нер-во на
$\left(\log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x)\right)^2>0$, т.к. $\log_2(2-x)\ne 0$, $\log_3(7-x)\ne 0$

$$1+\frac{16}{\left(\log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x)\right)^2}\le 32\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_3(2-x)\cdot\log_2(7-x)}{\left(\log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x)\right)^2}$$

$$1+\frac{16}{\left(\log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x)\right)^2}\le 8\cdot\left(\frac{\log_3(2-x)}{\log_2(2-x)}\right)\cdot\left(\frac{\log_2(7-x)}{\log_3(7-x)}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{\log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x)}\right)$$

$$1+\frac{16}{\left(\log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x)\right)^2}\le 8\cdot\log_3 2\cdot\log_2 3\cdot\frac{1}{\log_2(2-x)\log_3(7-x)}$$

Сделаем замену: $\log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x)=t$

$$1+\frac{16}{t^2}\le 8\cdot\log_3 2\cdot\log_2 3\cdot\frac{1}{t}$$

$$1+\frac{16}{t^2}\le\frac{8}{t}\quad\Big|\cdot t^2>0 \text{ т.к. } t\ne 0.$$

$\boxed{\text{Чистовик 3}}$

(№3 (продолжение))

$t^2+16 \le 8t$

$t^2-8t+16 \le 0$

$(t-4)^2 \le 0$

$t=4.$

$\log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x)=4$

при $x=-2$:

$\log_2 4\cdot\log_3 9=4$ — верно

~~при х<~~ при $x<-2$

$2-x>4 \Rightarrow \log_2(2-x)>2$

$7-x>9 \quad \log_2(7-x)>2$

$\log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x)>4$ — нет решений

при $1>x>-2$:

$1<2-x<4 \Rightarrow 0<\log_2(2-x)<2$

$6<7-x<9 \quad \cancel{\log_3 6}<\log_3(7-x)<2$

$1<\log_3 6$

Перемножим, т.к. больше нуля

$\log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x)<4$ — нет решений

при $x=1$

$\cancel{\log_2(2-x)\cdot}\ 0=4$ — неверно

при $1<x<2$

$\cancel{\log_2(2-x)}$ $0<2-x<1$

$5<7-x<6$

$\log_2(2-x)<0$

$1<\log_3 5<\log_3(7-x)<\log_3 6$

$\log_2(2-x)<0$, а $\log_3(7-x)>0$

т.е. $\log_2(2-x)\cdot\log_3(7-x)<0$, решений нет

$\boxed{\text{Ответ: } -2}$

Чистовик 4

№4

$3^3=27$; $4^3=64$; $5^3=125$; $6^3=216$; $7^3=343$; $8^3=512$;

$9^3=729$; $10^3=1000$; $11^3=1331$; $12^3=1728$;

$13^3=2197$

Заметим, что $[\sqrt[3]{n}]$, где $m^3 \le n < (m+1)^3$, $m \in \mathbb{N}$, то

$$[\sqrt[3]{n}] = m$$

Т.е. я хочу посчитать кол-во чисел:

$\left.\begin{array}{lll} [49;63], & \text{кратные } 3 & S_3 \\ [64;124], & \text{кратные } 4 & S_4 \\ [125;215], & \text{кратные } 5 & S_5 \\ [216;342], & \text{кратные } 6 & S_6 \\ [343;511], & \text{кратные } 7 & S_7 \\ [512;728], & \text{кратные } 8 & S_8 \\ [729;999], & \text{кратные } 9 & S_9 \\ [1000;1330], & \text{кратные } 10 & S_{10} \\ [1331;1727], & \text{кратные } 11 & S_{11} \\ [1728;2025], & \text{кратные } 12 & S_{12} \end{array}\right\}$ — кол-во чисел

Заметим, что во всех промежутках кроме крайних концы промежутков делятся на соотв. число.

Например: $[64;124]$; $64 \vdots 4$ и $124 \vdots 4$

Поэтому кол-во чисел S_i:

$S_4 = \frac{124-64}{4}+1 = \frac{60}{4}+1 = 16$

$S_5 = \frac{215-125}{5}+1 = \frac{90}{5}+1 = 19$

$S_6 = \frac{342-216}{6}+1 = \frac{126}{6}+1 = 22$

$S_7 = \frac{511-343}{7}+1 = 24+1 = 25$

$S_8 = \frac{728-512}{8}+1 = \frac{216}{8}+1 = 28$

$S_9 = \frac{999-729}{9}+1 = \frac{270}{9}+1 = 31$

$S_{10} = \frac{1330-1000}{10}+1 = 33+1 = 34$

$\boxed{\text{Чистовик 5}}$

(№4 (продолжение))

$S_{11} = \frac{1727-1331}{11} + 1 = \frac{396}{11} + 1 = 36 + 1 = 37$

S_3: $49 \not\vdots 3$, $50 \not\vdots 3$; $51 \vdots 3$; $63 \vdots 3$

$S_3 = \frac{63-51}{3} + 1 = \frac{12}{3} + 1 = 5$

S_{12}: $1728 \vdots 12$; $2016 \vdots 3$ и $2016 \vdots 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2016 \vdots 12$,
а $2016 + 12 = 2028$ уже больше 2025

$S_{12} = \frac{2016-1728}{12} + 1 = 24 + 1 = 25$

S - всего чисел

$S = S_3 + S_4 + \ldots + S_{12} = 5 + 16 + 19 + \ldots + 34 + 37 + 25 =$

$= 30 + \underbrace{16 + 19 + \ldots 37}_{\text{ар. пр.}} = 30 + \frac{16+37}{2} \cdot 8 =$

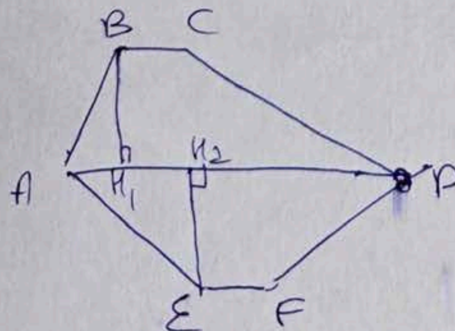
$= 30 + \frac{53}{2} \cdot 8 = 30 + 53 \cdot 4 = 30 + 212 = 242$

$\boxed{\text{Ответ: } 242}$

(№2)

Сначала д-ем, что трапеции ABCD и AEFD находятся по одну ~~пл-ть~~ полуплоскость от AD.

Если это не так:



$BH_1 = EH_2 = 16$ (по усл.)

$CE \geqslant BH_1 + EH_2 = 16 \cdot 2 = 32$

но $CE = 2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ противоречие

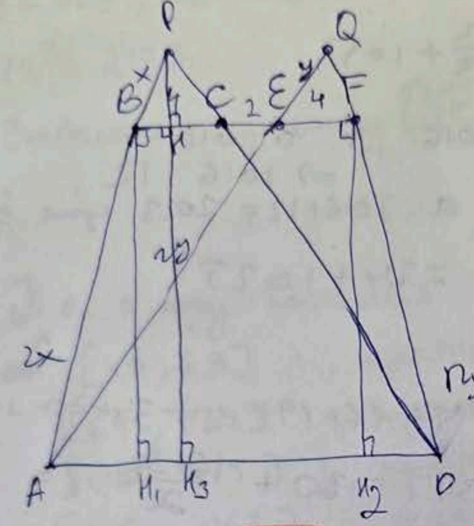
значит трапеции находятся не одной полуплоскости от AD.

Чистовик 6

№2 (продолжение)

Есть 2 варианта:

1) когда отрезки BC и EF – не пересекаются



т.к. $BH_1 = FH_2 = h = 16$, то $BF \parallel AD$ (т.к. BH_1H_2F – прямоуг.) и B, C, E, F – одна прямая

$BC = EF = 4$; $CE = 2$

$\triangle PBC \sim \triangle PAD$, т.к. $BC \parallel AD$ ($\angle PBC = \angle PAD$ и $\angle P$ – общий)

Пусть: ~~тогда~~ $PB = x$, $AB = \alpha x$

$\frac{PB}{4} = \frac{PA}{12}$

$\frac{x}{4} = \frac{\alpha x + x}{12}$

$\frac{1}{4} = \frac{\alpha + 1}{12}$

$12 = 4\alpha + 4$

$\alpha = 2$

Т.е. $PB = x$, $AB = 2x$,

Аналогично $QE = y$; $EA = 2y$

тогда $\triangle BAE \sim \triangle PAQ$ т.к. $\angle P$ – общий и

$\frac{AB}{AP} = \frac{AE}{AQ}$ $\quad \frac{2x}{3x} = \frac{2y}{3y}$, т.е. $PQ \parallel BE$ →

→ $PQ \parallel BF \parallel AD$ ⇒ $\square APQD$ – трапеция

$\frac{BE}{PQ} = \frac{AB}{AP}$ ⇒ $\frac{6}{PQ} = \frac{2x}{3x}$ ⇒ $PQ = 9$

$PH \perp BC$ и $PH \cap AD = H_3$

$\triangle PBC \sim \triangle PAD$ (по док.) ⇒

⇒ $\frac{PH}{PH_3} = \frac{BP}{AP}$ $\frac{PH}{PH_3} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$

$3PH = PH_3$

$PH_3 = PH + HH_3$

$HH_3 = BH_1$ т.к. BH_1H_3H – прямоуг.

45-96-92-58
(137.2)

Чистовик | 0

№6 (продолжение)

Пусть $BO = x$, тогда $AO = x+1$

$CO = \frac{km}{k+1} \Rightarrow CH_1 = H_1O = \frac{km}{(k+1)\sqrt{2}}$ т.к $\angle HDC = 45°$

$OD = \frac{m}{k+1} \Rightarrow OH_2 = DH_2 = \frac{m}{(k+1)\sqrt{2}}$

$AC^2 = H_1C^2 + H_1A^2 = \left(\frac{km}{(k+1)\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{km}{(k+1)\sqrt{2}} - x - 1\right)^2 =$

$= BD^2 = BH_2^2 + H_2^2D = \left(x + \frac{m}{(k+1)\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{m}{(k+1)\sqrt{2}}\right)^2$

$\frac{k^2m^2}{(k+1)^2 \cdot 2} + \frac{k^2m^2}{(k+1)^2 \cdot 2} + \cancel{x^2} + 1 + 2x - 2x \cdot \frac{km}{(k+1)\sqrt{2}} - 2 \cdot \frac{km}{(k+1)\sqrt{2}} =$

$= \cancel{x^2} + 2x \cdot \frac{m}{(k+1)\sqrt{2}} + \frac{m^2}{(k+1)^2 \cdot 2} + \frac{m^2}{(k+1)^2 \cdot 2}$

$\frac{k^2m^2}{(k+1)^2} + 1 + 2x - 2x \cdot \frac{km}{(k+1)\sqrt{2}} - 2 \cdot \frac{km}{(k+1)\sqrt{2}} =$

$= 2x \cdot \frac{m}{(k+1)\sqrt{2}} + \frac{m^2}{(k+1)^2}$

$\frac{(k^2-1)m^2}{(k+1)^2} + 1 + 2x - \sqrt{2} \cdot x \cdot \frac{km}{k+1} - \sqrt{2} \cdot \frac{km}{k+1} =$

$= \sqrt{2} \cdot x \cdot \frac{m}{k+1}$

$\frac{k-1}{k+1} \cdot m^2 + 1 + 2x - \sqrt{2} \cdot \frac{km}{k+1}(x+1) =$

$= \sqrt{2} \cdot \frac{m}{k+1} \cdot x$

$\frac{k-1}{k+1} \cdot m^2 + 1 + 2x = \sqrt{2} \cdot \frac{m}{k+1} \cdot x + \sqrt{2} \cdot \frac{m}{k+1}(x+1)k$

$\frac{k-1}{k+1} \cdot m^2 + 1 + 2x = \frac{m\sqrt{2}}{k+1}(x + xk + k) \quad | \cdot (k+1)$

$(k-1)m^2 + k + 1 + 2kx + 2x = m\sqrt{2}(x + xk + k)$

$(k-1)m^2 + k + 1 + x(2k+2) = x(m\sqrt{2} + km\sqrt{2}) + km\sqrt{2}$

Чистовик||

№6 (продолжение)

$$(k-1)m^2+(k+1)+x(2k+2)=x(m\sqrt{2}+km\sqrt{2})+km\sqrt{2}$$

$$x(2k+2-m\sqrt{2}-km\sqrt{2})=km\sqrt{2}-(k-1)m^2-(k+1)$$

$2k+2-m\sqrt{2}-km\sqrt{2}\neq 0$ иначе решений не будет

$$\sqrt{2}k+\sqrt{2}-m-km\neq 0$$

$\sqrt{2}(k+1)\neq m(k+1)$ $(k\neq -1)$

$$m\neq\sqrt{2}$$

Значит при $m=\sqrt{2}$ решений нет

Если коэф. перед x не равен 0 то решение есть всегда

Ответ: любые m и k ~~не равны~~, но $m\neq\sqrt{2}$

$\boxed{\text{Чистовик [2]}}$

№5

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}\geq a+2$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}-a\geq 2$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2a\sqrt{xy}-ax-ay}{x+y}\geq 2$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-\frac{a(x-2\sqrt{xy}+y)}{x+y}\geq 2$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-\frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x+y}\geq 2$$

$$\frac{x^2+y^2}{xy}-\frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x+y}\geq 2$$

при $x=y$ достигается р-во:

$$\cancel{\frac{x}{y}+y}\;\frac{x}{x}+\frac{x}{x}+\frac{2ax}{2x}\geq a+2$$

$$a+2\geq a+2$$

Повысить оценку на 10 (десять) баллов.
Старая оценка – 85, новая оценка – 95

/Хрущенко А.Б./

А /Букичева А.Я./

Председателю апелляционной комиссии олимпиады школьников „Покори Воробьёвы горы!"
Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова академику В.А. Садовничему
ученика 10 класса „Б" Муниципального бюджетного общеобразовательного учреждения гимназии им академика Н.Г. Басова при Воронежском государственном университете по адресу: г. Воронеж, ул. Карла Маркса, д. 57
Горчинова Олега Александровича

апелляция.

Прошу пересмотреть выставленные ~~баллы~~ технические баллы (85) за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что в 6 номере мне должны были выставить большее количество баллов. В решении я написал совокупность из двух множеств решений, но в ответе забыл указать одно из них. Т.е числа „m" и „k" я нашёл верно в решении, но забыл написать в ответе ~~так~~ одно множество: $k=1$ $m\in(0,+\infty)$
В решении на чистовике 9 я написал: „AB левее O" – я имел ввиду „AB можно подвинуть левее O". А в остальном решение полное и верное
(Первое множество решений написано на чистовике 9 $k=1$, $m\in(0;+\infty)$, второе множество на чистовике 11 при $m\neq\sqrt{2}$ решение есть всегда (очевидно, что положительные))

Дата: 23.04.2025

Подпись: [подпись]