

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс В-1
Ростов-на-Дону

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Покорч Воробьевы горы!"

по математике

Кружмалева Михаила Андреевич
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«6» апреля 2025 года

Подпись участника

[Подпись]

97-16-19-47

(150.3)

Черновик 1

 $\sqrt{2}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Числовик 1

№ 3

$$2 \log_4^2(x+3) \cdot \log_3^2(x+8) \leq \log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) - 2$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+3 > 0 \\ x+8 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > -3$$

$$2 \cdot \frac{1}{4} \log_2^2(x+3) \cdot \frac{1}{4} \log_3^2(x+8) \leq \log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) - 2$$

$$\log_2^2(x+3) \cdot \log_3^2(x+8) \leq 8 \log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) - 16$$

Заметим: $\log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) = \frac{\log_2(x+3)}{\log_2 3}$.

$$\bullet \frac{\log_3(x+8)}{\log_3 2} = \log_2(x+3) \cdot \log_3(x+8),$$

Т.к. $\log_2 3 \cdot \log_3 2 = 1$

Тогда исходное нер-во:

$$\log_2^2(x+3) \cdot \log_3^2(x+8) \leq 8 \log_2(x+3) \cdot \log_3(x+8) - 16$$

$t = \log_2(x+3) \cdot \log_3(x+8)$, тогда:

$$t^2 \leq 8t - 16$$

$$t^2 - 8t + 16 \leq 0$$

$$(t-4)^2 \leq 0, \text{ значит, } t=4.$$

Обр. замена:

$$\log_2(x+3) \cdot \log_3(x+8) = 4.$$

$$\frac{\ln(x+3)}{\ln 2} \cdot \frac{\ln(x+8)}{\ln 3} = 4$$

97-16-19-47
(150.3)

Числовик 2

$$\ln(x+3) \cdot \ln(x+8) = 4 \cdot \ln 2 \cdot \ln 3$$

$$\text{Пусть } x+3 = b, b > 0 \Rightarrow x+8 = b+5$$

В силу монотонного возрастания функции $F(z) = \ln z$; если $b \in [0; 1]$, и $z < 0$,

$$\ln b < \ln 4 \text{ при } b < 4$$

~~перво~~ не достигается равенство, при $b=1$, и $z=0$

$$\ln(b+5) < \ln 9 \text{ при } b < 4 \Rightarrow \text{левая}$$

часть уравнения меньше правой.

$$\text{При } b > 4, \ln b > \ln 4, \ln(b+5) > \ln 9 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ левая часть больше правой.

Значит, равенство достигается только при $b=4$, тогда $x+3=4 \Rightarrow x=1$ - подходит под ОДЗ

$$\text{Ответ: } x=1$$

✓ 1

Всего было проведено 193 игр. В каждой было сыграно по 3 очка, значит, всего было сыграно $193 \cdot 3 = 570$ очков. Пусть команда, занявшая последнее место получила a очков, а шаг прогрессии равен d , тогда общая сумма очков равна:

$$\frac{(a+19d)}{2} \cdot 20 = 10(a+19d)$$

Но, как было сказано выше, суммарное кол-во очков - 570, тогда:

$$10 \cdot (2a+19d) = 570$$

$$2a+19d = 57$$

Числовик 3

$$a = \frac{57-18d}{2}$$

Очевидно, $a, d \in \mathbb{Z}$ (целые числа) и $a, d \geq 0$

(т.к. в каждой мате пишется целое неотрицательное кол-во очков).

При этом $a \div 3$ (т.к. в каждой мате пишется кол-во очков, кратное 3-м).

При $d=0$: a -нечетное ($\frac{57}{2}$)

При $d=1$: $a \not\div 3$

При $d=2$: a -нечетное

При $d=3$: $a=0$.

При $d>3$: $a<0$

Значит, $d=3$, $a=0$. Тогда команда, занявшая второе место, получила

$$a+18d = 18 \cdot 3 = 54 \text{ очка.}$$

Пример:

Пронумеруем команды от 1 до 20.

Команда с номером K , победит все команды, у которых номер больше, а остальные проигрывает. Тогда, команда с номером K займет K -ое место, набрав $3(20-K)$ очков.

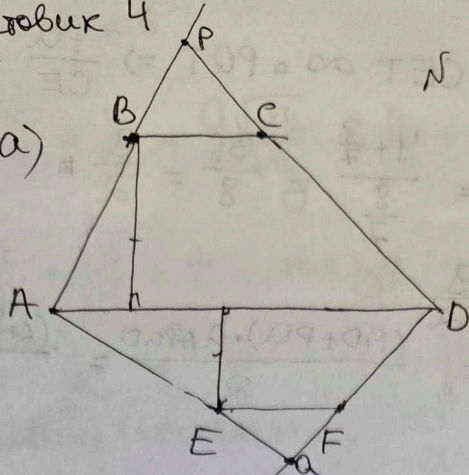
Ответ: 54 очка.

97-16-19-47
(150,3)

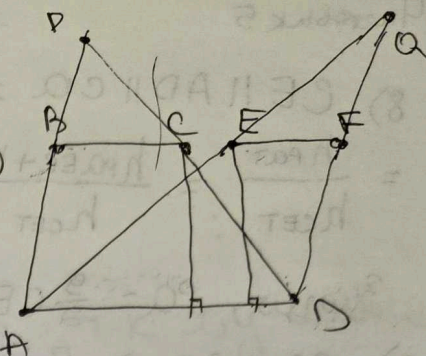
Числовик 4

№ 2

а)



б)



Рассмотрим 2 случая расположения
т. Е

а) Е и В лежат по разные стороны
от С.

1) $CE = 1$. Высота трапеции равна 8.
т.к. высота трапеции = 8, а расст. между С и Е = 1,
значит, ~~очевидно~~, ВС и ЕF лежат по
одну сторону от AD
(тогда расст. между С и Е не меньше 16)
всходы трап. равны, а AD-ось расст. то В, Е, F лежат на одной прямой

2) Высоты трапеции равны $\Rightarrow$ ВС и ЕF
лежат на одной прямой
3) $BC \parallel AD \Rightarrow \triangle PBC \sim \triangle PAD \Rightarrow \frac{h_{PBC}}{h_{PAD}} = \frac{h_{PBC}}{h_{PAD}}$

$$= \frac{2}{6}, \text{ т.е. } \frac{h_{PBC}}{h_{PBC} + h_{ABCD}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{h_{PBC}}{h_{PBC} + 8} = \frac{1}{3}$$

значит $h_{PBC} = 4$

4) Аналогично п. 3) $h_{AEF} = 4$

5) $h_{PAD} = h_{AAD} = 12 \Rightarrow PQ \parallel AD$

6) Пусть Т - т. пересек AE и CD
7) $AD \parallel CE \Rightarrow \triangle ATD \sim \triangle ETC \Rightarrow \frac{h_{ATD}}{h_{ETC}} =$

$$= \frac{AD}{CE} = \frac{6}{1} \Rightarrow \text{т.к. } h_{ABCD} = 8 \Rightarrow h_{ATD} = \frac{48}{7},$$

$$h_{ETC} = \frac{8}{7}$$

рассм. 2 случая, когда ВС и ЕF пересекаются и не пересекаются.

Числовик 5

$$8) CE \parallel AD \parallel CA \Rightarrow \triangle CET \sim \triangle PQT \Rightarrow \frac{PA}{CE} = \frac{h_{PAT}}{h_{CET}} = \frac{h_{PAE} + h_{CET}}{h_{CET}} = \frac{4 + \frac{8}{7}}{\frac{8}{7}} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$

$$\text{Значит, } PA = \frac{9}{2} CE = \frac{9}{2} \\ 9) PA \parallel AD \Rightarrow S_{APAD} = \frac{(AD+PA) \cdot h_{APAD}}{2} = \frac{(6 + \frac{9}{2}) \cdot 12}{2} = 6 \cdot \frac{21}{2} = 63$$

б) E и B имеют по одну сторону от C.

1) Аналогично п. а) $PA \parallel AD$, BE и CF имеют на одной прямой и $h_{PBE} = h_{AEP} = 4$

$$2) BC=2, EF=2, CE=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BE=EF=CE=1$$

$$3) PA \parallel AD \parallel EF \Rightarrow \triangle DCF \sim \triangle DPQ \Rightarrow \frac{PA}{CF} = \frac{h_{DPA}}{h_{DCF}} = \frac{8+4}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow PA = \frac{3}{2} CF = \frac{3}{2}$$

$$4) S_{APAD} = \frac{(AD+PA) \cdot h_{APAD}}{2} = \frac{(6 + \frac{3}{2}) \cdot 12}{2} = \frac{15}{2} \cdot 6 = 45$$

Ответ: 63; 45.

Чистовик 6

N 5

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2} + 2$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = t, \text{ тогда:}$$

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t^2 - 2$, при этом, т.к. x, y - любые положительные, то $\sqrt{\frac{x}{y}}$ - любое (достаточно взять $y=1$, а $x = b + \frac{1}{b}$ принимает любое значение больше $\frac{1}{b}$ или равно двум. при $b > 0$, т.к. если $b + \frac{1}{b} = c$, то $b^2 - bt + 1 = 0$, $D = t^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow$

$|t| \geq 2$, с учетом знака: $t \geq 2$
и тогда где либо $t \geq 2$
существует b , чтобы выполнялось
равенство $\Rightarrow$ проверим где либо
 $t \geq 2$

$$t^2 - 2 + \frac{a}{t} \geq \frac{a}{2} + 2 \Leftrightarrow t^2 + \frac{a}{t} \geq \frac{a}{2} + 4 \Leftrightarrow$$

$$(t-2)(t+2) \geq \frac{a(t-2)}{2t}, \text{ т.к. } t \geq 2, \text{ получим}$$

$$(2t(t+2) - a)(t-2) \geq 0, \text{ при } t=2. -$$

нер-во верно $\forall a$, т.к. $0 \geq 0 \Rightarrow$

остаток рассмотреть $t > 2$, тогда

нер-во равносильно $2t(t+2) - a \geq 0 \Rightarrow$

чтобы выполнялось $\forall t$, достаточно

найти $\min(2t(t+2))$, при $t > 2$, т.к.

$(2t^2 + 4t)' = 4t + 4 > 0$ при $t > 2 \Rightarrow$ функция
возрастает $\Rightarrow \min$ в $t=2$, он равен 16

Числовик 7

Также можно найти минимальное значение функции через вершину параболы, т.к. вершина в точке $t = -1$, а в-ва вверх, то при $t \geq 2$ ф-ия возр. и имеет min значение при $t = 2$, при это подставим $a = 16$, получим: $2(t-2)^2(t+4) \geq 0$, что верно всегда $\Rightarrow$ 16 тоже подходит
 Ответ: $[0; 16]$

N 4

$k = \lceil \sqrt[3]{n} \rceil$, по определению целой части: $\lceil \sqrt[3]{n} \rceil \leq \sqrt[3]{n} < \sqrt[3]{n} + 1$

$$k^3 \leq n < (k+1)^3$$

Т.к. $n : \lceil \sqrt[3]{n} \rceil \Rightarrow n : k \Rightarrow n = k \cdot q$,

$$k \geq 1, \text{ т.к. } n > 1. \quad k^3 \leq kq < (k+1)^3$$

Т.к. $n \in [25; 2025]$, рассмотрим крайние значения

$$n = 25 \Rightarrow k = 2 \quad \Rightarrow k \in [2; 12]$$

$$n = 2025 \Rightarrow k = 12$$

$$\frac{(k+1)^3}{k} = k^2 + 3k + 3 + \frac{1}{k} \Rightarrow q < k^2 + 3k + 3 + \frac{1}{k}$$

Числовик 8

$$q_{\max} = k^2 + 3k + 3$$

Тогда кол-во чисел, которые подходит для данного k : $k^2 + 3k + 3 - k^2 + 1 = 3k + 4$; проверим, что для крайних значений k верно, что n лежит в интервале $[25; 2025]$.

$$k=2: 2^3 \leq n < 3^3 \Rightarrow 8 \leq n < 27 \Rightarrow \text{только } n=25, n=26.$$

При $n=25$ не выполняется $\leq$ условие, а при $n=26$ выполняется

$$k=12: 12^3 \leq n < 13^3 \Rightarrow 1728 \leq n < 2197 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1728 \leq n \leq 2025$$

$$1728 \leq 12q \leq 2025$$

$$144 \leq q \leq 168,75$$

$$q\text{-целое} \Rightarrow 168 - 144 + 1 = 25 - \text{вар. для}$$

$3 \leq k \leq 11$, воспользуемся формулой $3k+4$, т.к. n при данном k лежит полностью в интервале $[25; 2025]$. ~~При k~~

$$\begin{aligned} & 3k_3 + 4 + 3k_4 + 4 \dots + 3k_{11} + 4 = 9 \cdot 4 + \\ & + 3(k_3 + k_4 + \dots + k_{11}) = 9 \cdot 4 + 3 \cdot (3 + 4 + 5 + \dots + 11) = \\ & = 9 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{7 \cdot 14 \cdot 9}{2} = 9 \cdot 4 + 3 \cdot 7 \cdot 9 = 36 + 189 = \\ & = 225 \end{aligned}$$

Тогда, в общем кол-ве чисел ~~1+20~~

$$1 + 225 + 25 = 251$$

Ответ: 251.

Задача 9

№6

Пусть $\tau. O$ будет началом координат $(0;0)$. Прямую I , на которой лежит отрезок AB , примем за ось Ox . Пусть отрезок CD лежит на прямой P , проходящей через начало координат. ~~Пусть~~

По условию отрезок $AB=1$, пусть его концы в новом положении будут A' и B' , пусть $A'=(A;0)$, а $B'=(A+1;0)$ где некоторо действительного числа A .

Отрезок CD имеет длину m и $\tau. O$ делит его в отношении $CO:OD=k \Rightarrow CD = \frac{m}{k+1} = \frac{kn}{k+1}$ и $OD = \frac{m}{k+1}$, точки C и D лежат на прямой P по разные стороны от O .

$\angle AOC = 60^\circ$, поскольку O лежит на AB , лучи OA и OB направлены в противоположные стороны вдоль прямой I (или Ox)

Задача 10

Пусть луч OD совпадает с положительным направлением оси Ox , вектор $q = (1; 0)$, тогда луч OA направлен в прот. сторону. Вектор $-q = (-1; 0)$. Пусть луч OC образует угол φ с лучом OB (положит. направлением оси Ox), тогда вектор $\bar{V} = (\cos \varphi; \sin \varphi)$, единичный вектор вдоль OC .

$\angle AOC$ - это угол между лучом OA (направление $-q$) и лучом OC (направ. $\bar{V}$). Этот угол равен $180^\circ - \varphi$ (если $0^\circ < \varphi < 180^\circ$). По условию, $\angle AOC = 60^\circ$, значит $180 - \varphi = 60^\circ$, откуда $\varphi = 120^\circ$.

Т.е. угол между лучом OB (положит. ось Ox) и лучом $OC = 120^\circ$, ~~cos~~ косинус этого угла $= \cos 120 = -\frac{1}{2}$.

Координаты точек C и D : вектор $OC = CO \cdot \bar{V} = \frac{km}{k+1} \cdot (\cos 120, \sin 120)$.

Вектор $OD = OD \cdot (-\bar{V}) = \frac{m}{k+1} \cdot (-\cos 120, -\sin 120)$

$$C = \left(\frac{-km}{2 \cdot (k+1)}, \frac{km\sqrt{3}}{2 \cdot (k+1)} \right)$$

$$D = \left(\frac{m}{2(k+1)}, \frac{-m\sqrt{3}}{2(k+1)} \right)$$

Найдем квадраты расстояний AC и $B'D$: в новом положении

$$A' = (A; 0)$$