0 670532 670004

67-05-32-67
(134.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант В-1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы
наменование олимпиады

~~по~~

по математике
профиль олимпиады

Гаврилова Ильи Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход: 12:20 – 12:24

Дата
«6» апреля 2025 года

Подпись участника

67-05-32-67 (134.3)

1 Черновик

№3

$$\begin{cases} \log_9(x+8)\cdot\log_9(x+8) = 4\cdot\log_3(x+8)^2 \\ \log_4(x+3)\cdot\log_4(x+3) = 4\cdot\log_2(x+3)^2 \end{cases}$$

$$2\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8) \le \log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2$$

$$2\cdot 4\cdot 4\log_2^2(x+3)\cdot\log_3^2(x+8) \le \log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2$$

$$t=\log_3(x+8)\cdot\log_2(x+3)$$

$$16\cdot t^2 \le t-2$$

$$16t^2-t+2\le 0$$

$$D=1-4\cdot 16\cdot 2=-128$$

$$D<0 \Rightarrow \longrightarrow t$$

$$t\in\varnothing$$

№3 $2\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8) \le \log_5(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2$

$$16\log_2^2(x+8)\cdot\log_3^2(x+3)-\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)\le 2$$

2|

Черновик

$a_{20} =$

$a_n = a_{n-1} + d$

№1. $a_2 - ?$

$a_n = a_1 - d(n-1)$

$a_2 = a_1 - d$

20 команд.

Кол-во очков - ↓ арифм. прогр.

всего игр.

$a = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$

$190 \cdot 3 = 570$ ← сколько всего очков

↖ в каждой игре кто-то победил

№3

$\log_a b \cdot \log_c d = \log_a d \cdot \log_c b$

$\log_2^3 4 \cdot \log_3^3 9 = \log_2 9 \cdot \log_3 4$

$2 \cdot 2 \log_2 3 \cdot \log_3 2 = 4 \cdot 1 = 4$

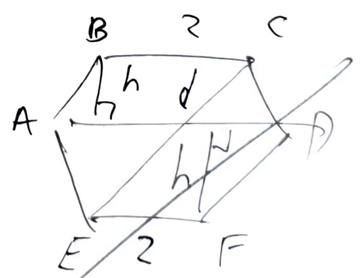
$2\log_4^2(x+3) \cdot \log_9^2(x+8) \leq \log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) - 2$

№2.

▱ABCD и ▱AEFD ∈ α

$AD = 6$ $BC = EF = 2$

$h = 8$ $d = 1$



3

черновик

№3.

$2\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8)\le\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2$

$\cancel{2(\log_4(x+3)\cdot\log_9(x+8))^2\le\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2}$

$2\log_4^2(x+8)\cdot\log_9^2(x+3)\le\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)-2$

$\boxed{\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)=\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)}$

$\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)=t$

$\frac{1}{8}t^2\le t-2$

$t^2-8t+16\le 0$

$(t-4)^2\le 0$

$t=4$

$\log_2(x+3)\cdot\log_3(x+8)=4$

1) $0<x+3<1$
$0<x\le -2$
$\log_2(x+3)<0$
$\varnothing$

2) $x+3>1$
$x>-2$
$\log_2(x+3)>0$

В силу монотонности логарифмов $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ед. корень $x=1$

$\cancel{2t^2-t+2\le 0}$

$\cancel{D=1}$

$\cancel{2\cdot 4\cdot 4\log_2^2(x+8)\cdot\log_3^2(x+3)\le\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)-2}$

$\cancel{\begin{cases}\log_2(x+8)\cdot\log_3(x+3)=t\\ (x+8)/2>0\\ (x+3)/2\end{cases}}$ $\Leftrightarrow$ $\cancel{\begin{cases}t=\log_2(x+8)\cdot\log_3(x+3)\\ x>-3\end{cases}}$

$16t^2\le t-2$

$16t^2-t+2\le 0$

$D<0$ $\rightarrow t$ $\cancel{t\in\varnothing}$

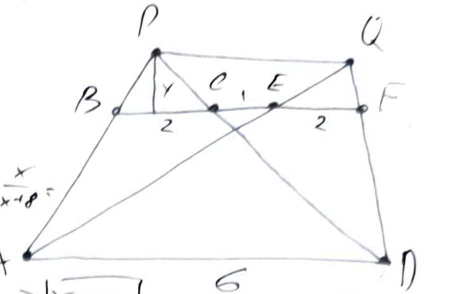
$\cancel{t=\frac{1}{32}}$ верн

$\cancel{\log_2(x+8)\cdot\log_3(x+3)\in\varnothing}$

$\cancel{x\in\varnothing}$

4

Черновик Чистовик



№2. α - плоскость

▱ABCD и ▱AEFD $\in \alpha$

AD = 6 BC = EF = 2

h = 8. CE = 1

$\Delta BPC \sim \Delta APD \Rightarrow \frac{x}{x+8} = \frac{2}{6} \Rightarrow 3x = x+8 \Rightarrow \boxed{x=4}$

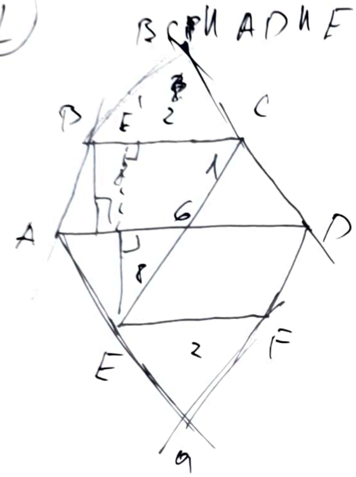
$\Delta ABE \sim \Delta APQ \Rightarrow \frac{3}{PQ} = \frac{8}{8+4} \Rightarrow \frac{3}{PQ} = \frac{2}{3}$ $PQ = 9/2$

$S_{APQD} = \frac{6+9/2}{2} \cdot (4+8) = 63$

Есть два варианта расположения фигур на плоскости:

I

BC ∥ AD ∥ EF => BC ∥ EF



Такой фигуры не может быть, так как CE = 1:

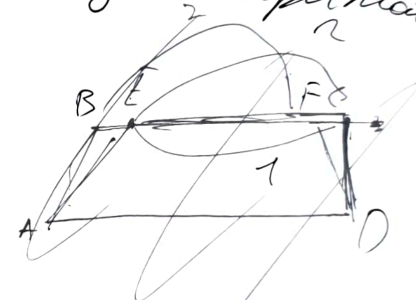
Продолжим высоту из точки E до основания BC, тогда $EE' = 2h = 16$

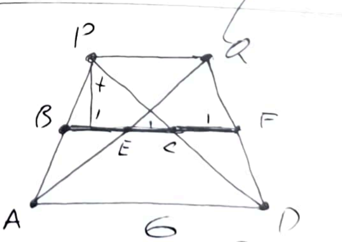
По т. Пиф:

$|EE'|^2 + 1$

II

Т.к BC ∥ EF и высоты трапеций равны, то основания BC и EF будут находится на одной прямой





$\Delta BPC \sim \Delta APD \Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{x}{x+8}$

$\frac{x}{x+8} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow \boxed{x=4}$

$\Delta ABE \sim \Delta APQ \Rightarrow \frac{1}{PQ} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$PQ = 3/2$

$S_{APQD} = \frac{6+3/2}{2} \cdot 12 = 45$

Ответ: 63 или 45.

67-05-32-67
(134.3)

5|

Черновик

№6. $m g k$ - ?

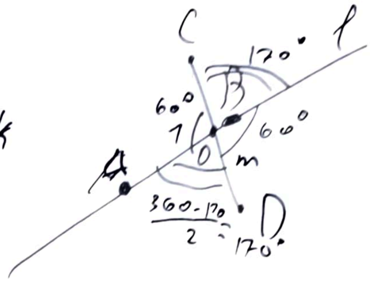
$AB = 1 \in l$ $CD = m$

AB ✗ CD в точке O

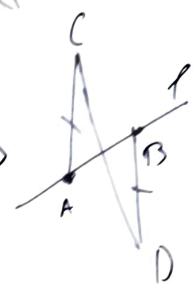
$CO : OD = k \Leftrightarrow \frac{CO}{OD} = k$

$\angle AOC = 60^\circ$

$AC \neq BD$



=>



(6)

№3. Чистовик

$$\begin{cases} 2\log_4^2(x+3)\cdot\log_9^2(x+8) \le \log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8) - 2 \\ x+3>0 \\ x+8>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cdot 4\cdot 4\cdot\log_2^2(x+3)\cdot\log_3(x+8) \le \log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8) - 2 \\ x > -3 \end{cases}$$

$$16\cdot\log_3^2(x+3)\cdot\log_2(x+8) \le \log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8) - 2$$

$$t = \log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8)$$

$$16t^2 \le t - 2$$

$$16t^2 - t + 2 \le 0$$

$$D = 1 - 4\cdot 2\cdot 16 = -127.$$

$$D<0, \longrightarrow t \Leftrightarrow t\in\varnothing$$

$$\log_3(x+3)\cdot\log_2(x+8) \in \varnothing$$

$$x\in\varnothing$$

Ответ: $x\in\varnothing$

№4.

$n : \sqrt[3]{n}$

$[\sqrt[3]{1}]=1,\ [\sqrt[3]{2}]=1, \dots$

$[\sqrt[3]{8}]=2, \dots [\sqrt[3]{27}]=3,$

$[\sqrt[3]{64}]=4, \dots [\sqrt[3]{125}]=5$

Оценим, какие числа входят в A:

$n\in[1;7]$ — все 7 чисел

$n\in[8,26]$ — чётные $\Sigma_1 = \frac{26-8}{2}+1=10$

$n\in[27,63]$ — $n=3k_1$ $\Sigma_2 = \frac{63-27}{3}+1=13$

$n\in[64,124]$ — $n=4k_2$ $\Sigma_3 = \frac{124-64}{4}+1=16$

$n\in[125,215]$ — $n=5k_3$ $\Sigma_4 = 19$

$n\in[216,342]$, $\Sigma_5 = \cancel{21}\ 22$

$n\in[343,511]$, $\Sigma_6 = 25$

$n\in[512,728]$, $\Sigma_7 = 28$

$n\in[729,999]$, $\Sigma_8 = 31$

$n\in[1000,1330]$, $\Sigma_9 = 34$

$n\in[1331,1727]$, $\Sigma_{10} = 37$

$n\in[1728,2025]$, $\Sigma_{11} = 25$

Разобьём отрезок на части:

$$\Sigma = 1+\Sigma_2+\dots+\Sigma_{11} = 251 \Longleftarrow$$

Ответ: 251

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

7

Чистовик

№1. кол-во очков команды, занявшая второе место $= a_2$ — ?

$n=20$

за победу 3 очка

Σ очков $=$ ↓ арифм. прогресии

$\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ — кол-во всего игр

a_1 — кол-во очков первой команды
Команда победила =>
=> Она победила все остальные команды =>
=> $a_1 = 19 \cdot 3 = 57$

в каждой игре кто-то победил =>

=> $190 \cdot 3 = 570$ — суммарное кол-во очков в турнире

" Σ очков

$\Sigma = 570 = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot n$

$570 = \frac{57 + a_{20}}{2} \cdot 20$

$a_{20} = 0$

a_{20} — получила ноль очков, так как проиграла всем

<=> можно сказать что шаг прогрессии $= 3 = d$

$a_1 - d = a_2$

$57 - 3 = 54$

Ответ: $a_2 = 54$.

8| Чистовик

№2. α - плоскость S_{APBQ} - ?

Дано:

▱ABCD и ▱AEFD $\subset \alpha$

$AD=6$ $h_{ABCD}=h_{AEFD}=8$

$BC=EF=2$

$CE=1$

прямые AB и CD $\times$ в точке P

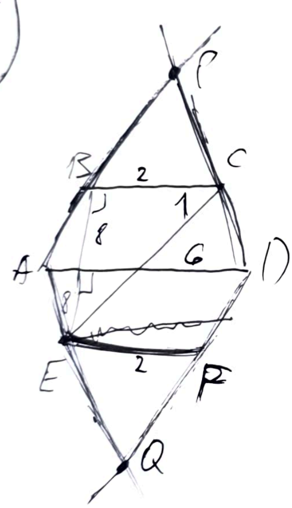
прямые AE и BF $\times$ в точке Q

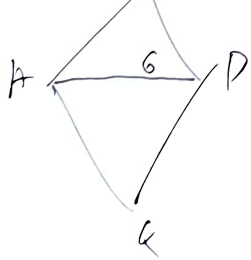
Рассмотрим два варианта положения фигур:

$$
\begin{array}{l|l}
2p^3+10p^2-(a+8)p+2a & p-2 \\
\hline
2p^3-4p^2 & 2p^2+4p-a \\
\quad 4p^2-(a+8)p & \\
\quad 4p^2-8p & p_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2a+4}}{2}-1 \\
\quad (-a-8+8)p+2a & \\
\quad -ap+2a & \\
\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

Задача №4

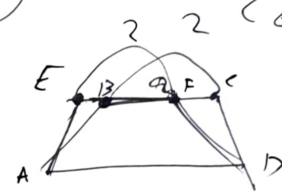
I





II

$CE=1$



Такого варианта не может быть, так как по рисунку $CE>1$, что противоречит условию

9

Чистовик

№4.

множество A состоит из n : $\sqrt[3]{n}$

$\lfloor x \rfloor =$ ~~[illegible]~~ $x_{max} \in \mathbb{Z}$

кол-во ~~[illegible]~~ чисел $\in [25, 2025]$, $\in A$

№5

все a - ?, $a > 0$; x и $y > 0$

$\cancel{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2} + 2}$

$\cancel{\frac{x^2+y^2}{xy} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a+4}{2}}$

$\cancel{\frac{(x^2+y^2)(x+y)+a\sqrt{xy}\cdot xy}{xy(x+y)}^{12} - \frac{a+4}{2} \geq 0}$

$\cancel{\frac{2(x^2+y^2)(x+y)+2a\sqrt{xy}\cdot xy-(a+4)xy(x+y)}{2xy(x+y)} \geq 0}$

Уравнение окружности

$\frac{x^2+y^2}{xy} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2} + 2$

$\frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2} + 2$

$\frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2} + 2$

$\frac{(x+y)^2}{xy} + \frac{a\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{a}{2} + 4$

Пусть $x+y = t_1 > 0$

$\sqrt{xy} = t_2 > 0$

$\frac{t_1^2}{t_2^2} + \frac{at_2}{t_1} \geq \frac{a}{2} + 4$

$\frac{t_1}{t_2} = p$

$p^2 + \frac{a}{p} - \frac{a}{2} - 4 \geq 0$

$p > 0 \Rightarrow p^3 + a - (\frac{a}{2}+4)p \geq 0$

$2p^3 - (a+8)p + 2a \geq 0$

Проверим по т. Безу:

$P = 2 \to 16 - 2a - 16 + 2a = 0$

См. вычисление слева

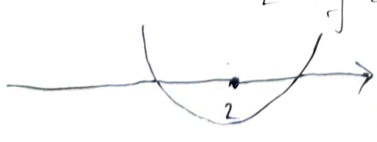
$\Rightarrow \frac{\sqrt{2a+4}}{2} - 1 \leq 2$

$\frac{\sqrt{2a+4}}{2} - 1 \leq 2 \Rightarrow \sqrt{2a+4} \leq 6$

$2a+4 \leq 36$

$2a \leq 32$

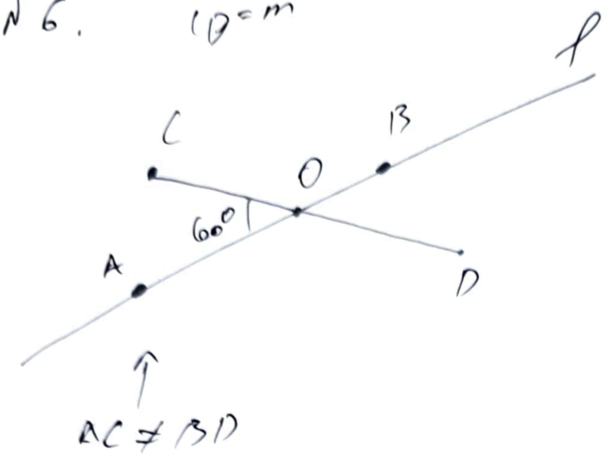
$a \leq 16$

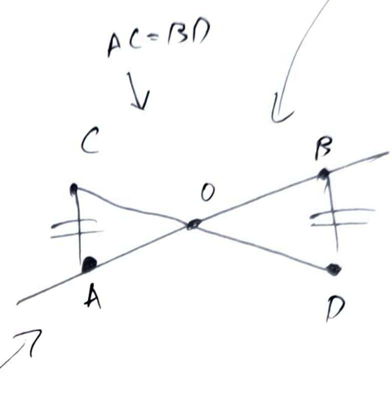


Ответ: $a \in (0; 16]$

10

№6. $AB = l$, $CD = m$, $\frac{CO}{OD} = k$ $m, k - ?$;





чтобы так получилось, нужно сделать $CD = AB = l$, чтобы Δ-ки ΔCOA и ΔDOB были равны к тому же $k = 1$, чтобы Δ-ки были равны