+1 лист Гар

0 292115 450003

29-21-15-45
(136.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант В-3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори воробьёвы горы"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Леоновой Вероники Витальевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход 12:36 – 12:39

Дата
«06» апреля 2025 года

Подпись участника

29-21-15-45
(136.1)

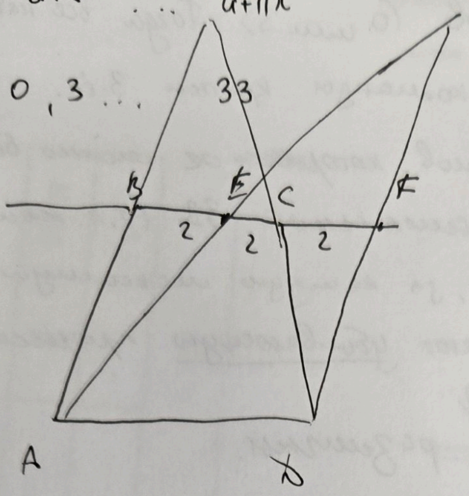
Черновик

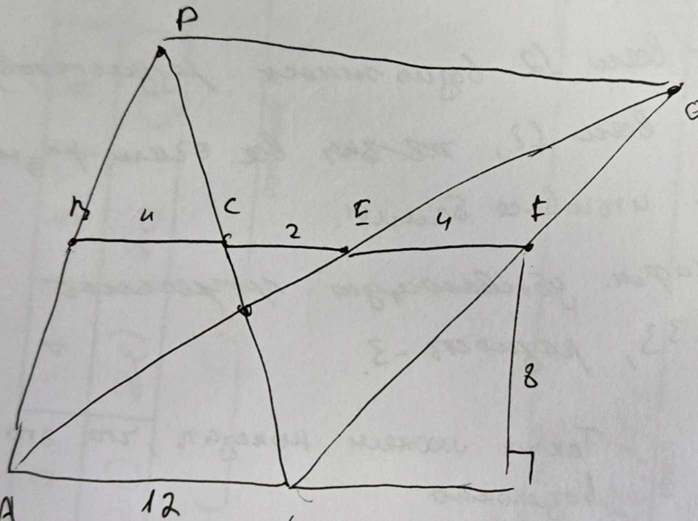
100 (сто)

АП

a a+k ... a+11k

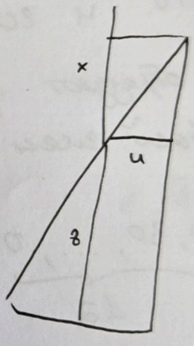
0, 3 ... 33

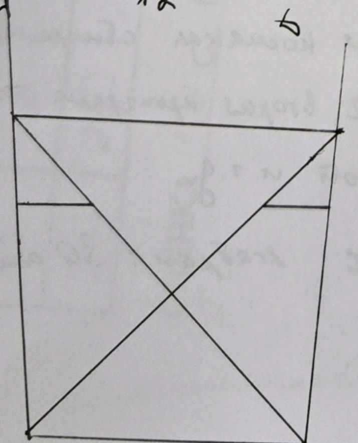


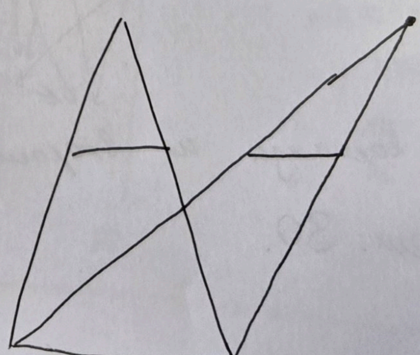


$\frac{x+3}{x} = 3$

$x = 4$







$$2\cdot\log_4^2(3-x)\cdot\log_9^2(8-x) \le \log_3(3-x)\cdot\log_2(8-x)-2$$

$$\frac{\log_4(3-x)}{\log_4 3}\cdot\frac{\log_9(8-x)}{\log_9 2}$$

Чистовик

1. Заметим, что ~~по~~ за каждую игру командам дают кратное 3 количество очков (0 или 3). Тогда все набранные баллы за турнир у каждой команды кратны 3-ём.

Минимальное количество баллов, которое можно было набрать это 0, а максимальное 33 (т.к. каждая команда сыграла 11 игр, за каждую максимум это 3)

Заметим, что очки составляют убывающую прогрессию

$\Downarrow$

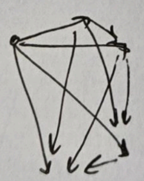
все очки различны.

0, 3, 6, ..., 33 - всего 12 возможных результатов, а т.к. команд всего 12, ~~то зная~~ все очки разные, то это и есть итоговые баллы.

Они образуют арифм. убывающую прогрессию. Первый член - 33, разность -3.

$\underbrace{33, 30, \ldots, 0}_{12}$

Также можем показать, что это возможно



Первая команда обыграла все, вторая проиграла только первой и т.д.

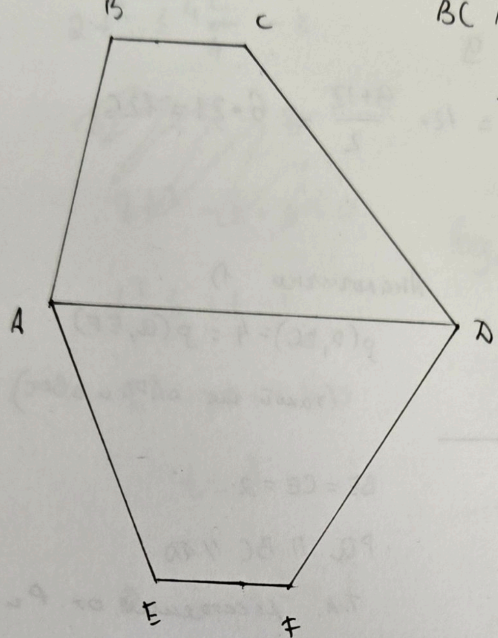
Тогда команда на втором месте набрала 30 очков.

Ответ: 30.

Лист 1 из 10

Чистовик

2.



Сначала проанализируем расположение точек.

$BC \parallel AD \parallel EF$

$\rho(BC, AD) = \rho(AD, EF) = 8$

Пусть BC и EF в разных полуплоскостях относительно AD.

По условию, $CE = 2$

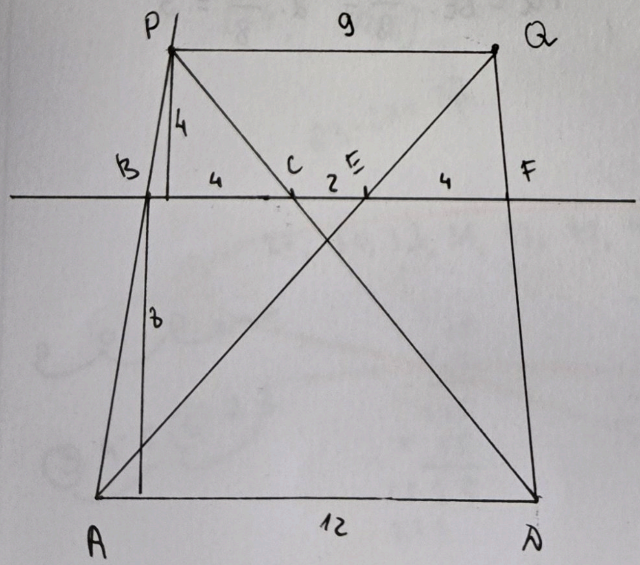
При этом $\underset{2}{\underset{\shortparallel}{CE}} > \underset{8}{\underset{\shortparallel}{\rho(BC, AD)}}$

Противоречие.

Значит, B, C, E, F – на одной прямой.

Разберем два случая: 1) $E \notin [BC]$, 2) $E \in [BC]$

1)



$BC \parallel AD$

$\Downarrow$

$\triangle PBC \sim \triangle PAD$

$\rho(P, AD) = \rho(P, BC) + \rho(BC, AD) = \rho(P, BC) + 8$

$\dfrac{\rho(P,AD)}{\rho(P,BC)} = \dfrac{AD}{BC} = 3$

$= \dfrac{\rho(P,BC)+8}{\rho(P,BC)}$

$2\rho(P, BC) = 8$

$\rho(P, BC) = 4$

Аналогично, $\rho(Q, EF) = 4$

Тогда $PQ \parallel AD \Rightarrow APQD$ – трапеция

Лист 2 из 10

Чистовик

$\triangle APQ \sim \triangle ABE$

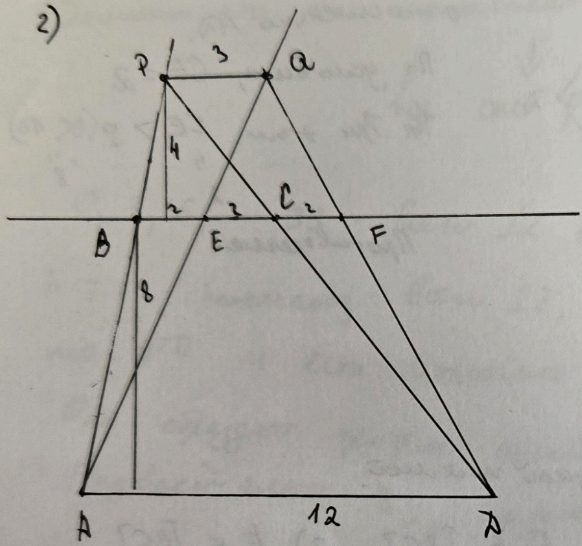
$\Downarrow$

$$\frac{PQ}{BE} = \frac{\rho(A, PQ)}{\rho(A, BE)} = \frac{12}{8}$$

$$PQ = \frac{12}{8} \cdot BE = \frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{8}_{2}} \cdot \cancel{6}^{3} = 9$$

$$S_{APQD} = \rho(PQ, AD) \cdot \frac{PQ + AD}{2} = 12 \cdot \frac{9+12}{2} = 6 \cdot 21 = 126$$

2)



Аналогично 1)

$\rho(P, BC) = 4 = \rho(Q, EF)$

(такой же $\triangle APD$ и $\triangle BDC$)

$BE = CE = 2$

$PQ \parallel BC \parallel AD$

т.к. расстояния от P и Q до BC равны.

$\triangle APQ \sim \triangle ABE$

$$\frac{PQ}{BE} = \frac{\rho(A, PQ)}{\rho(A, BE)} = \frac{12}{8}$$

$$PQ = BE \cdot \frac{12}{8} = 2 \cdot \frac{12}{8} = 3$$

$$S_{APQD} = \rho(PQ, AD) \cdot \frac{PQ + AD}{2} =$$

$$= 12 \cdot \frac{12+3}{2} = 6 \cdot 15 = 90$$

Ответ: 126 или 90.

Лист 3 из 10

29-21-15-45
(136.1)

Черновик

$$2\log_4^2(3-x)\cdot\log_9^2(8-x)\le\log_3(3-x)\cdot\log_2(8-x)-2$$

$$\frac{\log_4(3-x)}{\log_4 3}\cdot\frac{\log_9(8-x)}{\log_9 2}$$

$2t^2\le 4\frac{t}{4}-2$

$\cancel{8t^2\le 4t-8}$

$8t^2-\cancel{t+8}\le 0$

$t^2\le 2t-1$

$t^2-2t+1\le 0$

$t=1$

$\log_4 3=\frac{\log_2 3}{2}\cdot\log_9 2=$

$=\frac{\log_9 3}{2}=$

$=\frac{1}{4}$

$n\ \vdots\ [\sqrt[3]{n}]$

16 -2 -04

2: [16, 26] -6

3: [27, 63] -13

4: [64, 124]

$n^3,\dots,(n+1)^3-1$

n

$n^3+3n^2+3n-n^3$

$63-27=36$

$3n+3$

27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63

3 4 5 6 7 8

$15\times15=225$

$225\times15=1025$

225

169×13: 507, 169, 1997

14×14: 56, 14, 196

196×14: 784, 196, 2744

Чистовик

3.

$$2\log_4^2(3-x)\cdot\log_9^2(8-x)\le\log_3(3-x)\cdot\log_2(8-x)-2$$

$$\log_3(3-x)\cdot\log_2(8-x)=\frac{\log_4(3-x)}{\log_4 3}\cdot\frac{\log_9(8-x)}{\log_9 2}=$$

$$=\frac{\log_4(3-x)\cdot\log_9(8-x)}{\frac{\log_2 3}{2}\cdot\log_9 2}=\frac{\log_4(3-x)\cdot\log_9(8-x)}{\frac{\log_9 3}{2}}=$$

$$=4\log_4(3-x)\cdot\log_9(8-x)$$

Пусть $\log_4(3-x)\cdot\log_9(8-x)=t$

$2t^2\le 4t-2$

$t^2-2t+1\le 0$

$(t-1)^2\le 0$

$\Downarrow$

$t=1$

$\log_4(3-x)\cdot\log_9(8-x)=1$

$\log_4(4-(x+1))\cdot\log_9(9-(x+1))=1$

Если $x+1>0$, то $\underset{4>}{}$ $\overset{1}{\vee}\log_4(4-(x+1))\cdot\overset{1}{\vee}\log_9(9-(x+1))<1$, $\underset{\mathrm{O}}{\vee}$

Если $x+1<0$, то $\underset{\overset{\vee}{1}}{\log_4(4-(x+1))}\cdot\underset{\overset{\vee}{1}}{\log_9(9-(x+1))}>1$

Значит $x+1=0\Rightarrow x=-1$

Проверка: $\log_4 4\cdot\log_9 9=1$ - ok

Ответ: $\{-1\}$

Черновик

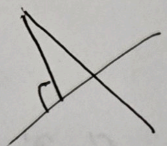
$$m^2(k-1)+\cancel{m}-k-1 \le (m-2)(k+1)$$

$$\| $$

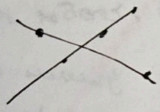
$$mk-2k+\cancel{m}-2$$

$$m^2k-m^2-mk+k+1 \le 0 \qquad \alpha < \frac{2}{3}$$

$$k(m^2-m+1) \le m^2-1 \qquad 1-\alpha > \frac{\alpha}{2}$$

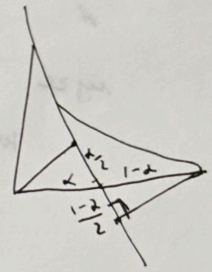


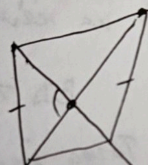
$$k \le \frac{m^2-1}{m^2-m+1} = 1+\frac{m-2}{m^2-m+1} \qquad 1-\alpha \cdot \frac{\alpha}{2}$$

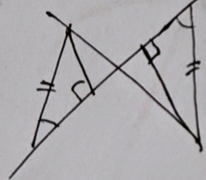


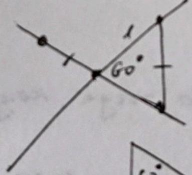
$k=1$

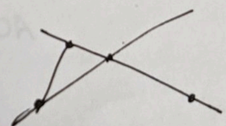
$$\frac{m-2}{(m-2)\alpha}$$

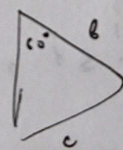




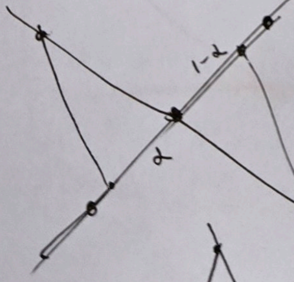






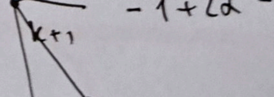


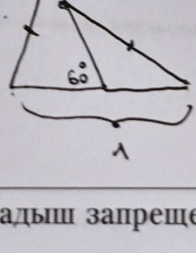
$$c^2 = a^2+b^2-ab = (a-b)^2+ab$$



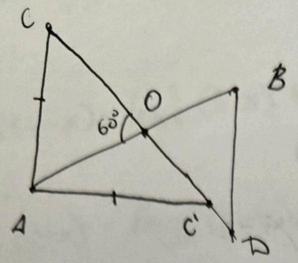
$$\frac{m^2k^2}{(k+1)^2}+\alpha^2-\frac{\alpha mk}{(k+1)} = \frac{m^2}{(k+1)^2}+(1-\alpha)^2-\frac{m(1-\alpha)}{k+1}$$

$$\frac{m^2(k-1)}{k+1}-1+2\alpha-\alpha m+\frac{m}{k+1}=0$$





Чистовик

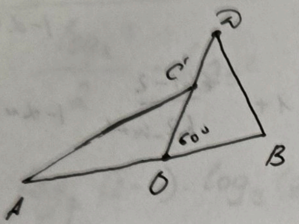


Будем двигать не отрезок AB, а отрезок CD.

То есть отмечаем O на AB=1, то есть строим прямую CD и ищем подходящие C, D.

$AC = AC'$

Пусть $\cancel{CD=AC'D}$ и $C' \in OD$



$AC' \geq AO$

$BD \geq \rho(B, CD)$

Тогда, чтобы найти C' и D' на луче с вершиной в O и углом с AB $60°$, нужно взять любую D на нём так, чтобы

$BD \geq \max(AO, \rho(B, CD))$

Тогда найдётся C'. так, что

$AC' = BD$

Ответ: тогда и только тогда, когда

$$0 \leq \frac{m^2(k-1)+m-k-1}{(m-2)(k+1)} \leq 1, \text{ или } (2, 1)$$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Чистовик

4. $n \;\vdots\; [\sqrt[3]{n}]$

Пусть есть натуральное число x. ~~Это~~ Для n $\quad x = [\sqrt[3]{n}]$

$$\Updownarrow$$

$$(x+1)^3 > n \geq x^3$$

То есть

2 является $[\sqrt[3]{n}]$ для чисел $[16, 17, \ldots, 27-1]$ (из отрезка в условии)

$3 : [27, 28, \ldots, 63]$

и т. д.

$x : [x^3, \ldots, (x+1)^3 - 1]$ ← Изучим сколько чисел из такого отрезка кратно x.

$x^3, x^3+1, \ldots, (x+1)^3 - 1$

$\qquad (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x$

$\vdots x \Rightarrow$ ~~Из них кратно x количество чисел в отрезке~~

$(x+1)^3 - 1 - x^3$ – количество чисел в отрезке минус 1.

$\dfrac{(x+1)^3 - 1 - x^3}{x}$ – количество кратных x чисел кроме последних

$\dfrac{(x+1)^3 - 1 - x^3}{x} + 1$ – всего чисел кратных x в отрезке

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 - x^3}{x} + 1 = 3x + 3 + 1 = 3x + 4.$$

~~$12^3 < 2025 < 13^3$~~

$13^3 > 2025 > 12^3$

$2 : [16, 17, \ldots, 26] - 6$

$3 : [27, 28, \ldots, 63] - 13$

$\ldots$

$x : [x^3, \ldots, (x+1)^3 - 1] - 3x + 4$

$\ldots$

~~$12 : [12^3, \ldots, (13)^3 - 1] - 40$~~

~~$13 : [13^3, \ldots, 2025]$~~

$11 : [11^3, \ldots, 12^3 - 1] - 37$

$12 : [12^3, \ldots 2025] - ?$

Чистовик

~~Таким образом, посчитаем все числа.~~

$$\cancel{(3\cdot3+4)+(3\cdot4+4)+(3\cdot5+4)+\ldots+(3\cdot11+4)=}$$

$$\cancel{=3\cdot(3+4+5+\ldots+11)+4\cdot10=3\cdot\left(\frac{12\cdot11}{2}-3\right)+40=}$$

$$\cancel{=3\cdot(6\cdot13-3)+40=3\cdot(78-3)+40=3\cdot75+40=265}$$

$$\cancel{\begin{array}{r}75\\ \times\ 3\\ \hline 225\end{array}\qquad \begin{array}{r}13\\ \times\ 13\\ \hline 39\\ 13\ \\ \hline 169\end{array}\qquad \begin{array}{r}169\\ \times\ 13\\ \hline 507\\ 169\ \\ \hline 2197\end{array}}$$

Таким образом, посчитаем все числа.

$$(3\cdot3+4)+(3\cdot4+4)+(3\cdot5+4)+\ldots+(3\cdot11+4)=3\cdot(3+4+\ldots+11)+9\cdot4=$$

$$=3\cdot\left(\frac{11\cdot12}{2}-3\right)+36=3\cdot63+36=189+36=225$$

$$\begin{array}{r}12\\ \times\ 12\\ \hline 24\\ 12\ \\ \hline 144\end{array}\qquad \begin{array}{r}144\\ \times\ 12\\ \hline 288\\ 144\ \\ \hline 1728\end{array}\qquad \begin{array}{r}13\\ \times\ 13\\ \hline 169\end{array}\qquad \begin{array}{r}169\\ \times\ 13\\ \hline 507\\ 169\ \\ \hline 2197\end{array}\qquad \begin{array}{r}189\\ +\ 36\\ \hline 225\end{array}$$

$12: [1728, \ldots, 2025] - 25$

всего чисел $\begin{array}{r}2025\\ -\,1728\\ \hline 297\end{array}+1=298$

~~2025 ≥ 1728~~

$$\left\lceil\frac{298}{12}\right\rceil=25$$

$2: [16, \ldots 26] - 6$

$225+25+6=256$

Ответ: 256

Лист 6 из 10

Черновик

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}\geqslant a+2$

$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$

$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$

$1\geqslant\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}$

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\geqslant 3$

$\frac{(x+y)^2}{xy}-2$

$\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{a\cdot 2\sqrt{xy}}{x+y}$

$\frac{m^2}{(k+1)^2}(k+1)(k-1)$

2 $\geqslant$

$\frac{m^2(k-1)}{k+1}-\frac{\alpha mk}{k+1}+2\alpha-1+\frac{m}{k+1}(1-\alpha)$

$-\alpha m+2\alpha-1+\frac{m}{k+1}$

$\frac{(x+y)^2}{xy}=t$

$t-2\geqslant 2$

$t\geqslant 4$

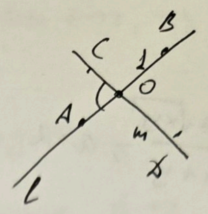
$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{(x+y)^2}{xy}-2\geqslant 2$

$t^2+\frac{2a}{t}-2\geqslant a+2$

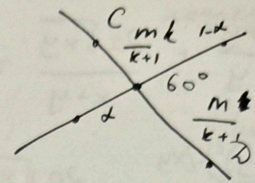
$t\in[2;+\infty)$

$13+16+19+\ldots+37$

$13\cdot 9+3$



$\frac{CO}{BD}=t$



$t^2+\frac{2a}{t}-2$

$t^2+\frac{2a}{t}-2\geqslant a+2$

$t^3+2a-2t\geqslant at+2t$

$t^3-t(a+4)+2a\geqslant 0$

$3t^2-(a+4)$

$\frac{m^2k^2}{(k+1)^2}+\alpha^2-2\cdot\frac{mk}{k+1}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{2}$

$=$

$\frac{m^2}{(k+1)^2}+(1-\alpha)^2-2\cdot\frac{m}{k+1}\cdot(1-\alpha)\frac{1}{2}$

$=$

$\alpha^2+1-2\alpha$

$t^3+2a-2t\geqslant at+2t$

$t^3-(a+4)t+2a\geqslant 0$

$27-3a-12+2a\geqslant 0$

$15\geqslant a$

$t^3-4t\geqslant a(t-2)$

$a\leqslant\frac{t^3-4t}{t-2}=\frac{t(t^2-4)}{t-2}=t\cdot(t+2)$

Чистовик

5.

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}\geqslant a+2$

$\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}\geqslant a+2$

$\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}\geqslant a+2$

$\frac{(x+y)^2}{xy}+\frac{2a\sqrt{xy}}{x+y}-2\geqslant a+2$

Пусть $t=\frac{x+y}{\sqrt{xy}}$ По нер-ву о средних $(x,y>0)$

$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy} \Rightarrow \frac{x+y}{\sqrt{xy}}\geqslant 2 \Rightarrow t\geqslant 2$

$t^2+\frac{2a}{t}-2\geqslant a+2$

$t^3+2a-2t\geqslant at+2t$

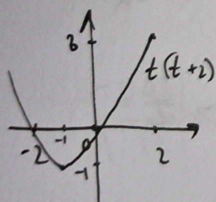
$t^3-4t\geqslant a(t-2)$

$t(t^2-4)\geqslant a(t-2)$

$t(t-2)(t+2)\geqslant a(t-2)$ При $t=2$ все a подходят,

Пусть $t\neq 2$ $(t>2)$

$a\leq t(t+2)$



Среди $t\in[2;+\infty)$

$\min(t(t+2))=8$

При $t\to 2$, $t(t+2)\to 8$

Понятно, что можно подобрать для любого $t\geqslant 2$

x и y, т.к. $\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=t$ $x^2+y^2+2xy=xyt^2$

$x^2+x(2y-yt^2)+y^2=0$

$D=4y^2+y^2t^4-4y^2t^2-4y^2=$

$=y^2t^2(t^2-4)\geqslant 0$

$2y-yt^2<0$

$y^2>0$

То есть x выражается через y. $(x,y>0)$

Лист 7 из 10

То есть при любых x, y a должно подходить под условие.

Тогда при $t \to 2$ $a \le 8$ (Для любого $t \to 2$, x, y подбираются)

Значит a не больше 8.

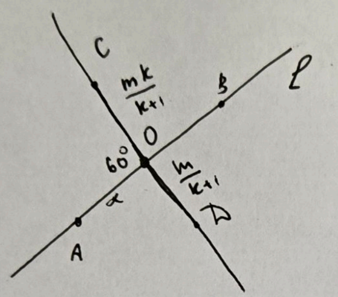
Докажем, что такие a подходят.

$a \le t(t+2)$ для всех возможных $t \Rightarrow$ такие a подходят.

Чистовик

Ответ: $(0;8]$

6.



$\frac{CO}{OD} = k$ $\quad CD = m$

$\Downarrow$

$CO = \frac{mk}{k+1}$ $\quad OD = \frac{m}{k+1}$

Пусть для таких m и k нашлось положение отрезка AB, что $AC = BD$

Пусть $AO = \alpha$, $OB = 1-\alpha$

Применим т. косинусов к $\triangle COA$:

$$AC^2 = \frac{m^2k^2}{(k+1)^2} + \alpha^2 - 2 \cdot \frac{mk}{k+1} \cdot \alpha \cdot \cos 60^\circ =$$

$$= \frac{m^2k^2}{(k+1)^2} + \alpha^2 - \frac{mk\alpha}{k+1}$$

Аналогично с $\triangle DOB$:

$$BD^2 = \frac{m^2}{(k+1)^2} + (1-\alpha)^2 - 2 \cdot (1-\alpha) \cdot \frac{m}{k+1} \cdot \cos 60^\circ =$$

$$= \frac{m^2}{(k+1)^2} + (1-\alpha)^2 + \frac{m(1-\alpha)}{k+1}$$

$$AC = BD \Rightarrow \frac{m^2k^2}{(k+1)^2} - \frac{m^2}{(k+1)^2} + \alpha^2 - (1-\alpha)^2 + \frac{m(1-\alpha)}{k+1} - \frac{mk\alpha}{k+1} = 0$$

$$\frac{m^2(k-1)}{k+1} - 1 + 2\alpha - \frac{m\alpha(k+1)}{k+1} + \frac{m}{k+1} = 0$$

Лист 8 из 10

Чистовик

$$\alpha(m-2) = \frac{m^2(k-1)+m}{k+1} - 1$$

$$0 \le \alpha = \frac{m^2(k-1)+m-k-1}{(m-2)(k+1)} \le 1$$

$m>0,\ k>0$

$m^2k - m^2 + m - k - 1$

Пусть $m>2$ (при $m=2$ $\frac{4(k-1)+2}{k+1}=1$, $4k-2=k+1$, $3k=3$, $k=1$)

$k(m^2-1)-m^2+m-1$

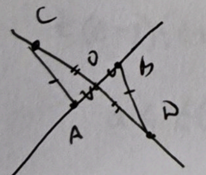
Тогда $m^2(k-1)+m-k-1 \ge 0$

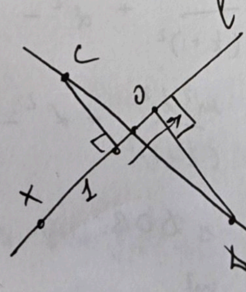
$k(m^2-1)+m^2+m-1 \ge 0$

$(m-1)(1+k(m+1))+m^2 \ge 0$

~~Подходят любые $m>2$, $k>0$~~

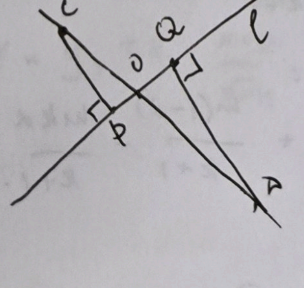
При $k=1$, $m>0$ подходит





Пусть $OX=1$, $\angle XOC = 60°$ ~~Двигая OX по прямой l~~

~~CD уменьшается~~, а



Опустим из C и D перпендикуляры на l (P, Q соотв)

$$\frac{PO}{OQ} = \frac{CO}{OD} = k \qquad PO = \frac{OC}{2} \qquad OQ = \frac{DQ}{2}$$