0 072616 810007

07-26-16-81
(135.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы Горы!
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Субботина Михаила Максимовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«6» апреля 2025 года

Подпись участника

100 (сто)

№1.

Каждая команда могла в сумме набрать любое чётное число очков от 0 до 18. Таких чисел всего 10. Команд также 10, а очки, набранные командами, образуют убывающую прогрессию => ~~в~~ каждому из возможных чисел набранных очков соответствует ровно одна команда. Команда, занявшая 1-е место набрала 18 очков, 2-е – 16, 3-е – 14 и т.д.

Ответ: 16.

№3.

$$\log_2^2(x+2)\cdot\log_3^2(x+7)+16\le 32\cdot\log_9(x+2)\cdot\log_4(x+7)$$

$$\frac{1}{\log_{x+2}^2 2\cdot\log_{x+7}^2 3}-\frac{8}{\log_{x+2}3\cdot\log_{x+7}2}+16\le 0$$

$$\frac{16(\log_{x+2}2\cdot\log_{x+7}3)^2-8\frac{\log_{x+2}2}{\log_{x+2}3}\cdot\frac{\log_{x+7}3}{\log_{x+7}2}\cdot\log_{x+2}2\cdot\log_{x+7}3+1}{(\log_{x+2}2\cdot\log_{x+7}3)^2}\le 0$$

$$\left(\frac{4\log_{x+2}2\cdot\log_{x+7}3-1}{\log_{x+2}2\cdot\log_{x+7}3}\right)^2\le 0$$

$$\log_{x+2}2\cdot\log_{x+7}3=\frac{1}{4}$$

$$\log_2(x+2)\cdot\log_3(x+7)=4$$

~~[illegible]~~ При $x\le -2$ $\log_2(x+2)$ не существует.

При $x\in(-2,-1]$ $\log_2(x+2)\le 0$, $\log_3(x+7)>0$, решений нет

При $x>-1$ $\log_2(x+2)$, $\log_3(x+7)$ – функции положительные, монотонно возрастающие => только 1 решение $x=2$

Ответ: $x=2$.

№5.

x и y не удовлетворяют нер-ву $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}\ge\frac{a}{2}+2$ <=>

<=> x и y удовлетворяют нер-ву $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}<\frac{a}{2}+2$

Найдём все a, при которых найдутся x и y, удовлетворяющие данному нер-ву

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}<\frac{a}{2}+2$

$\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}-\frac{a}{2}-2<0$

$\begin{cases} u=\sqrt{xy} \\ v=x+y \end{cases}$

$\frac{v^2-2u^2}{u^2}+\frac{au}{v}-\frac{a}{2}-2<0$

$\frac{v}{u}=t$ $\quad \frac{x+y}{\sqrt{xy}}=\frac{\frac{x}{y}+1}{\sqrt{\frac{x}{y}}}=\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\geq 2 \Rightarrow t\geq 2$

t может принимать все значения от 2 до ∞

$t^2-2+\frac{a}{t}-\frac{a}{2}-2<0 \quad |\cdot t>0$

$t^3-\left(\frac{a}{2}+4\right)t+a<0$

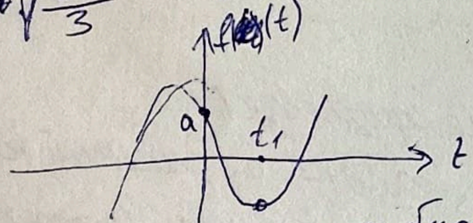
Необходимо найти такие a, при которых данная функция имеет значения <0 при $t\geq 2$

Если подставить $t=0$, получится $0 \Rightarrow$ график всегда при любом a проходит через $(2;0)$

Возьмём производную

$3t^2-\frac{a}{2}-4=0$

$t_1=\sqrt{\frac{\frac{a}{2}+4}{3}}$ – точка минимума функции



При $t_1>2$ функция будет иметь значения <0 при $t\geq 2$

При $t_1=2$ минимум функции будет в точке $(2;0)$, при всех $t\geq 2$ функция будет >0

При $t_1<2$ минимум функции будет слева от 2, при всех $t\geq 2$ функция будет >0

$t=\sqrt{\frac{\frac{a}{2}+4}{3}}>2$

$\frac{\frac{a}{2}+4}{3}>4 \qquad \underline{a>16}$

Ответ: $a>16$

N4.

Запишем, чему равен $[\sqrt[3]{n}]$ в зависимости от n:

n	27, 63	64, 124	125, 215	216, 342	343, 511	512, 728	729, 999	1000, 1330	1331, 1727	1728, 2197
$[\sqrt[3]{n}]$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

На отрезке 36, 63 $\frac{63-36}{3}+1=10$ подходящих чисел

На отрезке 1728, 2025 $\frac{2016-1728}{12}+1=25$ подходящих чисел

На отрезке 64, 124: $\frac{124-64}{4}+1=16$

125, 215: $\frac{215-125}{5}+1=19$

216, 342: $\frac{342-216}{6}+1=22$

343, 511: $\frac{511-343}{7}+1=25$

512, 728: $\frac{728-512}{8}+1=28$

729, 999: $\frac{999-729}{9}+1=31$

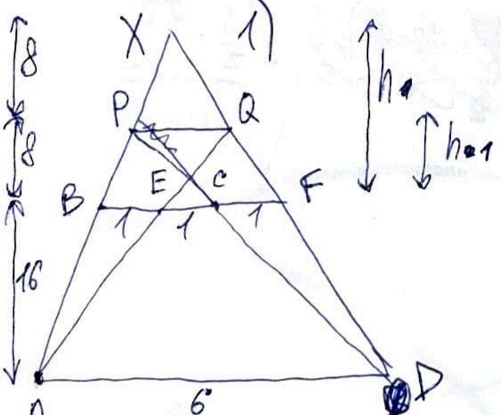
1000, 1330: $\frac{1330-1000}{10}+1=34$

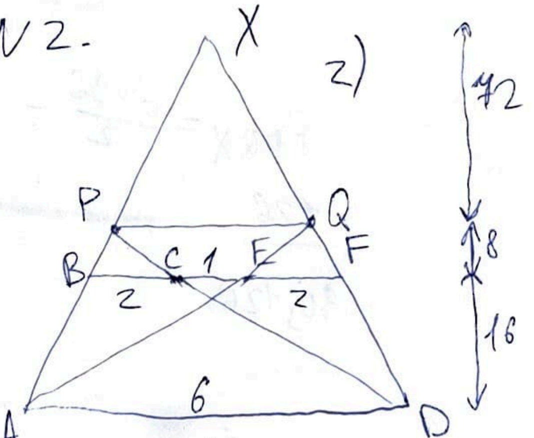
1331, 1727: $\frac{1727-1331}{11}+1=37$

Суммируя все числа, получаем 247.

Ответ: 247

N2.





Рассмотрим 2 случая: когда BC пересекается и не пересекается с EF

Высоты у трапеций одинаковые => BC и FE лежат на одной прямой

1-й случай) $BF = \frac{1}{2}AD \Rightarrow BF$ - ср линия $\triangle AXD \Rightarrow$

$h = 16$ - высота в $\triangle$-ке BXF

$\triangle APD \sim \triangle BPC$

h_1 - высота в $\triangle$-ке BPC

$\frac{h_1}{16+h_1} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{3}$

$h_1 = 8$

$\triangle XPQ \sim \triangle XAD \Rightarrow \frac{PQ}{AD} = \frac{8}{32}$ $PQ = \frac{3}{2}$

$S_{APQD} = S_{AXD} - S_{PQX} = \frac{6 \cdot 32}{2} - \frac{8 \cdot \frac{3}{2}}{2} = \underline{90}$

2-й случай)

$\triangle AXD \sim \triangle BXF$

$\frac{AD}{BF} = \frac{h+16}{h}$

$\frac{6}{5}h = h + 16$

$h = 80$ - высота в $\triangle$-ке BXF

$\triangle BPC \sim \triangle APD$

$\frac{AD}{BC} = \frac{16+h_1}{h_1}$

$h_1 = 8$ - высота в $\triangle$-ке BPC

$\triangle PXQ \sim \triangle AXD$

$\frac{PQ}{AD} = \frac{h-h_1}{h+16}$

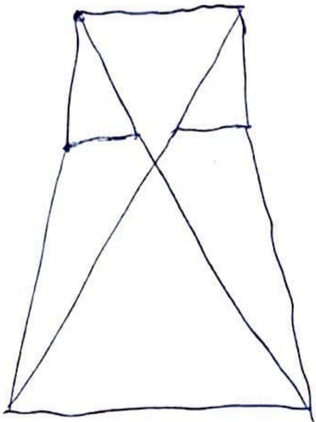
$PQ = \frac{9}{2}$

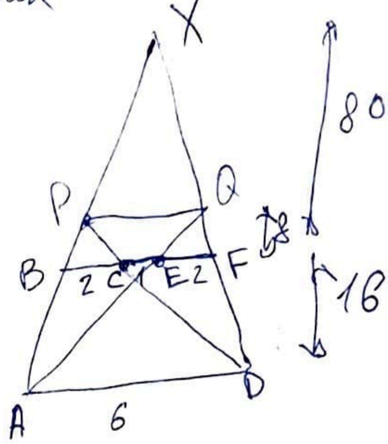
$S_{APQD} = S_{AXD} - P_{PQX} = \frac{6 \cdot 96}{2} - \frac{\frac{9}{2} \cdot 72}{2} =$

$= 288 - 162 = \underline{126}$

Ответ: 90; 126.

Черновик





$\begin{array}{r} 96 \\ 3 \\ \hline 288 \end{array}$

$6 \cdot \frac{80-\frac{16}{3}}{96} = 5-\frac{1}{3}$

$80-$

$t^3 - \left(\frac{a}{2}+4\right)t + a < 0$

$\begin{array}{r} 224 \\ 7 \\ \hline 1568 \end{array}$

$288 - \frac{1568}{9}$

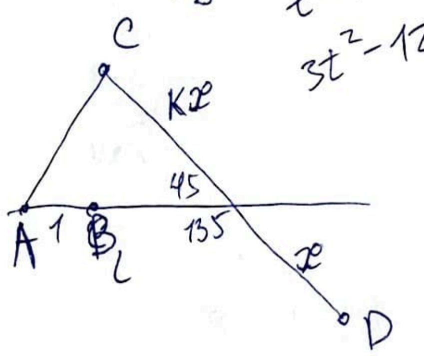
$\begin{array}{r} 288 \\ 9 \\ \hline \end{array}$

$\frac{x+y}{\sqrt{xy}}$

$t^3 - 12t + 16$

$3t^2 - 12$

$PQ = 6 \cdot \frac{80-8}{96} = 5-\frac{1}{2}$



$AC^2 = k^2x^2 + l^2 - \sqrt{2}kxl$

$BD^2 = x^2 + (l-1)^2 + \sqrt{2}x(l-1)$

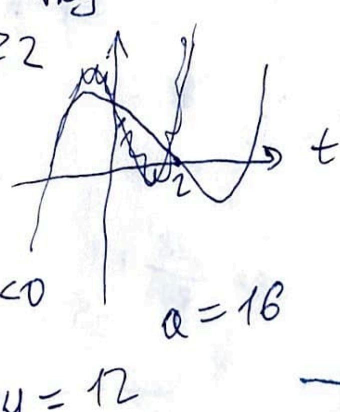
$(k^2-1)x^2 + 2l - 1 - \sqrt{2}xl(k+1) + \sqrt{2}x = 0$

$\frac{x+y}{\sqrt{xy}}$ $\quad x+y \vee \sqrt{xy}$

$\frac{t+1}{\sqrt{t}}$ $\quad \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \geq 2$

$3t^2 - \frac{a}{2} - 4 \vee 0$

$t = \sqrt{\frac{\frac{a}{2}+4}{3}} = 2$



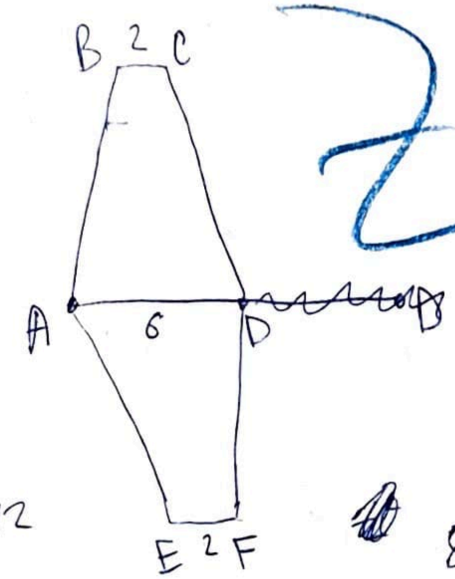
$-\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a}{2}+4\right)^{\frac{3}{2}} + a < 0$

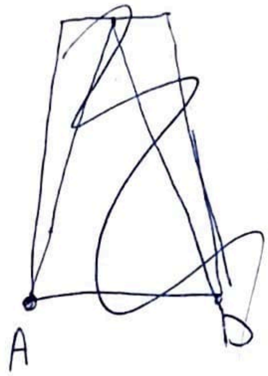
$a = 16$

$\frac{a}{2} + 4 = 12$

Черновик

0, 1 ... 9





$\frac{(16+37)\cdot 4}{2}$

53 212

$8(\log_3(x+2)\cdot\log_2(x+7))$

$\frac{1}{\log^2_{x+7}3\cdot\log^2_{x+2}2} - \frac{8}{\log_{x+2}3\cdot\log_{x+7}7} + 16 \leq 0$

$\frac{\log_{x+2}2}{\log_{x+2}3} = \log_3 2$

$16t^2 - 8\,\frac{\cancel{\log_{x+2}2}}{\cancel{\log_{x+2}3}}\cdot\log_3 2\,\log_{x+2}2\cdot\log_2 3\cdot\log_{x+7}3 + 1 \leq 0$

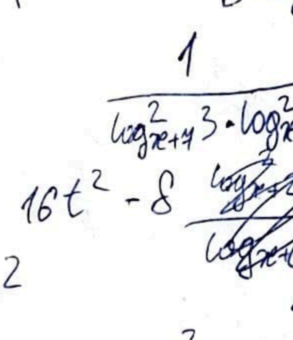
$\left(\frac{4t-1}{t}\right)^2 \leq 0 \qquad \frac{16t^2-8t+1\leq 0}{t^2}$

$t = \frac{1}{4}$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times\ 13 \\ \hline 507 \\ 169 \\ \hline 2197 \end{array}$$

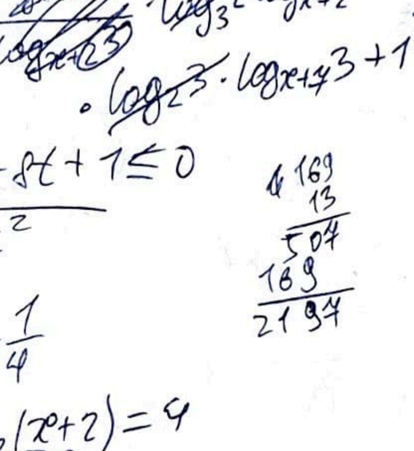
$\log_{x+7}3\cdot\log_{x+2}2 = \frac{1}{4}$

$\log_3(x+7)\cdot\log_2(x+2) = 4$



$\frac{16+x}{x} = 3$

$x = 8$



1728, 2016

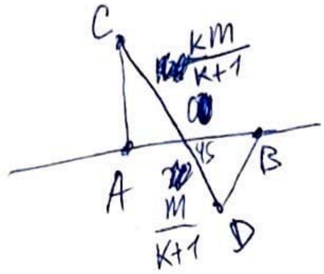
$\frac{288}{12} + 1$

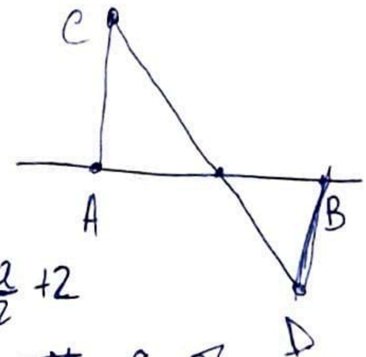
25

Черновик

$x(k+1)=m$

$81 \cdot 9 = 729$





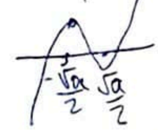
121

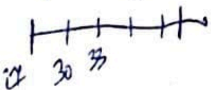
$36 \cdot 6 = 216$

$144 \cdot 12 = 288$

144

1728





$$\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{a\sqrt{xy}}{x+y}<\frac{a}{2}+2$$

$t^3-32t+64=0$

$\begin{cases}\sqrt{xy}=u\\ x+y=v\end{cases}$

$$\frac{v^2-2u^2}{u^2}+\frac{au}{v}<\frac{a}{2}-2$$

$\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=a>64$

$t=\frac{v}{u}$

$$\left(\frac{v}{u}\right)^2+a\frac{u}{v}-\frac{a}{2}<0$$

$144 \cdot 12 = 288$

144

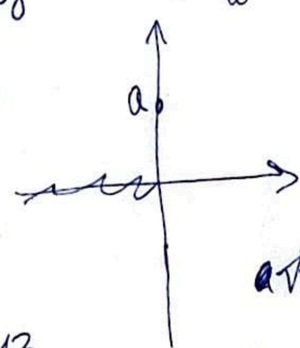
1728

$t^3-\frac{a}{2}t+a<0$

$a<\frac{a^{\frac{3}{2}}}{8}$

$2t^2-\frac{a}{2}$

$\left(t-\frac{\sqrt{a}}{2}\right)$ $\quad a>64$



$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{8}-\frac{a^{\frac{3}{2}}}{4}+a<0$

$x^2+2xy+y^2=a^2xy$

13

$a-\frac{a^{\frac{3}{2}}}{8}$

27 – 63 $\quad$ 64 – 124 $\quad$ 125 – 215

3 $\quad$ 4 $\quad$ 5

216 – 342 $\quad$ 343 – 511

6 $\quad$ 7

512 – 728 $\quad$ 729 – 999 $\quad$ 1000 – 1330

8 $\quad$ 9 $\quad$ 10

1331 – 1727 $\quad$ 1728 – 2025

11 $\quad$ 12

$\frac{124-64}{4}+1=16$

$t^2+\frac{a}{t}-\frac{a}{2}-4<0$

$t^3-\left(\frac{a}{2}+4\right)t+a<0$

$-\frac{2}{3}\frac{\left(\frac{a}{2}+4\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}}+a<0$

$3t^2-\frac{a}{2}-4$

$t=\frac{\sqrt{\frac{a}{2}+4}}{\sqrt{3}}$

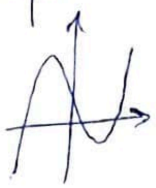
$$\frac{\left(\frac{a}{2}+4\right)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}}-\frac{\left(\frac{a}{2}+4\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}}+a<0$$

Черновик

$t^3 - t\left(\frac{a}{2}+4\right) + a < 0$

$3t^2 - \frac{a}{2} - 4$

$t = \sqrt{\frac{\frac{a}{2}+4}{3}}$



$\frac{x+y}{\sqrt{xy}}$

$\frac{\left(\frac{a}{2}+4\right)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} - \frac{\left(\frac{a}{2}+4\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} + a < 0$

$\frac{2}{3}\frac{\left(\frac{a}{2}+4\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} > a$ $\quad \left(\frac{a}{2}+4\right)^3 > \frac{27}{4}a^2$

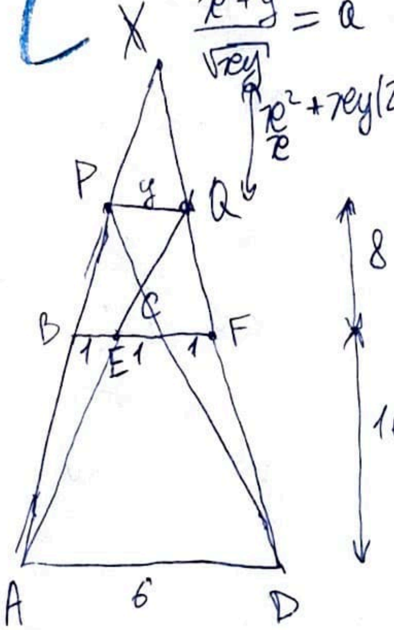
$\frac{a^3}{8} + 3a^2 + 24a + 64 > \frac{27}{4}a^2$

$\frac{x+y}{\sqrt{xy}} = a$

$x^2 + xy(2-a^2) + y^2 = 0$

$\frac{x}{x}$

$\frac{a^3}{8} - \frac{15}{4}a^2 + 24a + 64 > 0$



$-\frac{511}{343}$ $\quad 57+111$ $\quad 168$ $\quad \underline{25}$

$-\frac{1727}{1331}$
$396 \mid \frac{11}{36}$

$\frac{y}{6} = \frac{x+24}{x}$

$\frac{y}{3} = \frac{x+8}{x}$