



52-52-41-27
(107.6)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников _____
наименование олимпиады

Покари Варабеймы Горы

по Физике
профиль олимпиады

Бондаренко Бориса Эдуардовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«01» апреле 2023 года

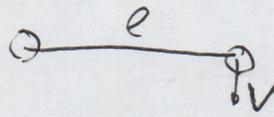
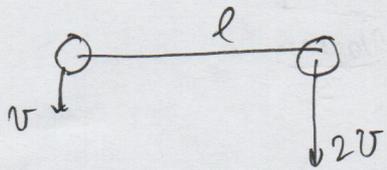
Подпись участника

Борис

52-52-41-27
(107.6)

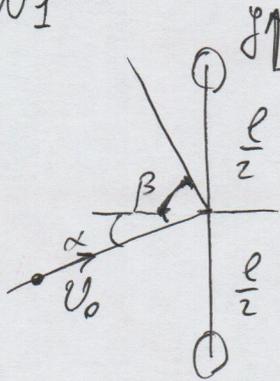
Вопрос 1

Перейдем в систему отсчета более медленного стержня:



тогда одна шайба не движется, а вторая вращается вокруг ~~второй~~ первой по окружности радиуса l , со скоростью v , тогда $\omega = \frac{v}{l}$

N1



Т.к. стержень гладкий, то на шайбу по оси y не действует сил, значит ~~его~~ её скорость в этом направлении останется прежней:
 $v_0 \cdot \sin \alpha = v_y$

По оси x произошло упругое соударение массы m и массы $2m$; ^{после} запишем для каждой ситуации ЗСИ и ЗСЭ:

ЗСЭ: $(v_0 \cdot \cos \alpha)^2 \cdot m = \frac{2m \cdot u^2}{2} + \frac{m v^2}{2}$

v - скорость шайбы после удара
 u - скорость палочки после удара

ЗСИ: $v_0 \cdot \cos \alpha \cdot m = 2mu - mV \Rightarrow v_0 \cos \alpha + v = 2u$

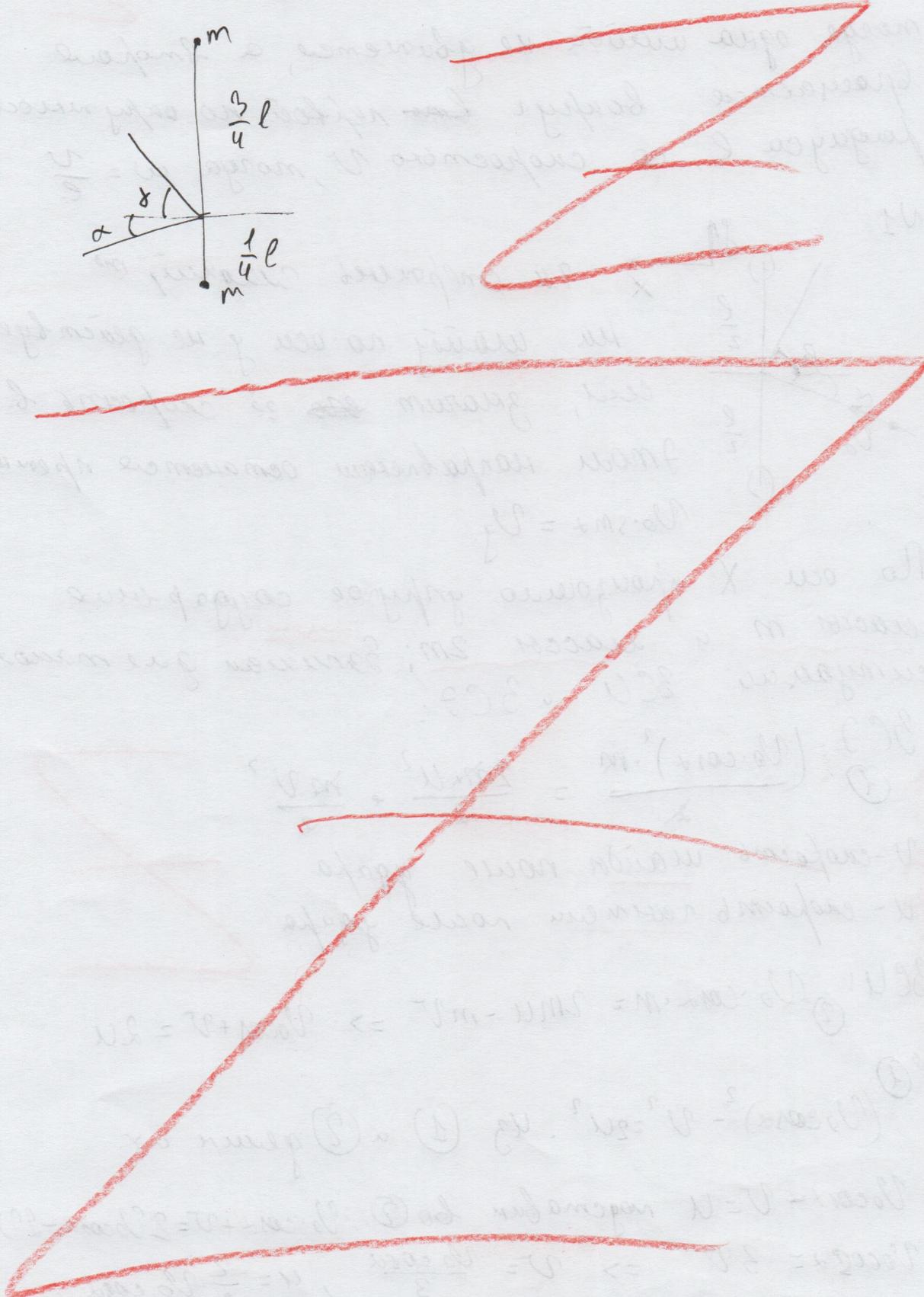
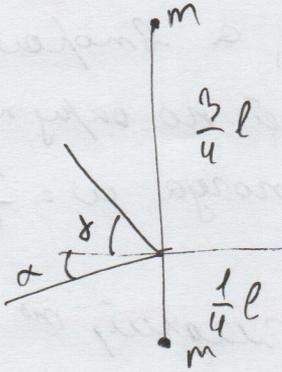
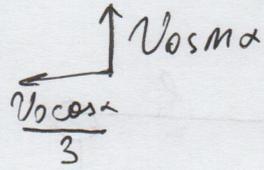
$(v_0 \cos \alpha)^2 - v^2 = 2u^2$. Из (1) и (2) делим их.

$v_0 \cos \alpha - v = u$ подставим во (2): $v_0 \cos \alpha + v = 2v_0 \cos \alpha - 2v$
 $v_0 \cos \alpha = 3v \Rightarrow v = \frac{v_0 \cos \alpha}{3}, u = \frac{2}{3} v_0 \cos \alpha$

Д. Бамбуков III
 Σ = 60
 2 18 42
 4 5 18
 3 5 18
 2 3 20
 1 5 3
 Топор Загора

После удара скорость шайбы:

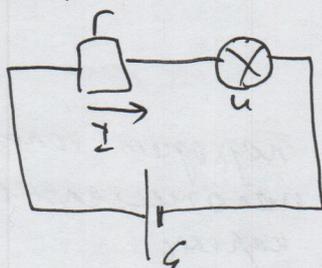
$$\operatorname{tg} \beta \cdot \frac{v_0 \cos \alpha}{3} = v_0 \sin \alpha$$



52-52-41-27

(107,6)

Вопрос 4



$$\mathcal{E} = I r + U \Rightarrow U = \mathcal{E} - I r$$

при $I = 0$, $U = \mathcal{E}$

при $U = 0$, $I = \frac{\mathcal{E}}{r}$, U зависит линейно от I , значит это будет прямая,

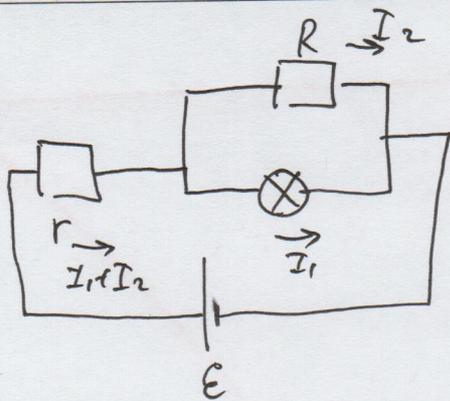
которая удовлетворяет и резистору и идеальной.

Пересечение прямой и ВАХ получилось в $I = 6 \text{ A}$, $U = 2 \text{ В}$

$$P = U \cdot I = 6 \cdot 2 = 12 \text{ Вт}$$

см. рисунок в задаче!

N4



$$\mathcal{E} = (I_1 + I_2) \cdot r + U(I_1)$$

$$U(I_1) = R \cdot I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{U(I_1)}{R}$$

$$\mathcal{E} = \left(I_1 + \frac{U(I_1)}{R} \right) \cdot r + U(I_1)$$

напряжение на лампочке

$$I^2 = \frac{1}{r^2} \cdot 3\mathcal{E}U \Rightarrow U = \frac{I^2 \cdot r^2}{3\mathcal{E}}, \quad U(I_1) = \frac{I_1^2 \cdot r^2}{3\mathcal{E}}$$

$$\mathcal{E} = \left(I_1 + \frac{I_1^2 \cdot r^2}{R \cdot 3\mathcal{E}} \right) \cdot r + \frac{I_1^2 \cdot r^2}{3\mathcal{E}} = rI_1 + \frac{I_1^2 \cdot r^2}{3\mathcal{E}} \cdot \left(1 + \frac{r}{R} \right)$$

$$I_1^2 \cdot \frac{r^2}{3\mathcal{E}} \cdot \frac{(R+r)}{R} + rI_1 - \mathcal{E} = 0$$

$$I_1 = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 4 \cdot \mathcal{E} \cdot \frac{r^2(R+r)}{3\mathcal{E}R}}}{2r^2 \cdot \frac{(R+r)}{3\mathcal{E}R}} =$$

$$= \frac{-3\mathcal{E}Rr \pm \sqrt{9\mathcal{E}^2 R^2 r^2 + 3\mathcal{E}R \cdot 4\mathcal{E}r^2(R+r)}}{2r^2 \cdot (R+r)} =$$

$$= \frac{-3\mathcal{E}Rr \pm \sqrt{9\mathcal{E}^2 R^2 r^2 + 12\mathcal{E}^2 \cdot Rr^2(R+r)}}{2r^2 \cdot (R+r)} =$$

$$= \frac{-9\mathcal{E}r^2 \pm \sqrt{9\mathcal{E}^2 \cdot 9r^4 + 12\mathcal{E}^2 \cdot 3r \cdot r^2 \cdot 4r}}{2r^2 \cdot 4r} =$$

$$= \frac{-9\mathcal{E}r^2 \pm \sqrt{225\mathcal{E}^2 \cdot r^4}}{8r^3} = \frac{-9\mathcal{E}r^2 + 15\mathcal{E}r^2}{8r^3}$$

подходит только положительный корень

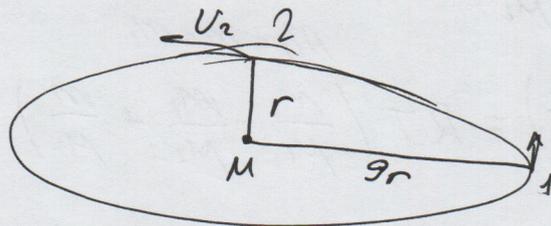
$$= \frac{6}{8} \frac{\mathcal{E}}{r} = \frac{3}{4} \frac{\mathcal{E}}{r} \quad \text{или } U(I_1) = \frac{I_1^2 \cdot r^2}{3\mathcal{E}} = \frac{3^2 \cdot \mathcal{E}^2 \cdot r^2}{4^2 \cdot r^2 \cdot 3\mathcal{E}} = \frac{3}{16} \mathcal{E}$$

$$P = U \cdot I = \frac{3}{4} \frac{\mathcal{E}}{r} \cdot \frac{3}{16} \mathcal{E} = \frac{9}{4 \cdot 16} \frac{\mathcal{E}^2}{r} = \frac{9}{4 \cdot 16} \cdot \frac{24 \cdot 24}{3} = \frac{3 \cdot 24 \cdot 24}{4 \cdot 16} =$$

$$= \frac{3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4} \geq \frac{3 \cdot 6 \cdot 6}{4} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{\underline{27 \text{ Вт}}}$$

Решение?

Вопрос 3



из З.С.Э очевидно, что максимальная скорость будет в самой ближней

точке к солнцу. З.С.Э.

Потенциал точки 1: $dx = g dx = \frac{GM}{r^2} \cdot dx$

$$U_1 = \int_0^{9r} \frac{GM}{r^2} dx = \frac{GM}{9r} \quad U_2 = \frac{GM}{r}$$

$$\text{З.С.Э: } \frac{m v_1^2}{2} + \frac{GM \cdot m}{9r} = \frac{m v_2^2}{2} + \frac{GM \cdot m}{r}$$

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{GM}{9r} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{GM}{r}$$

По закону Кеплера у кометы будет сохраненся момент импульса: $m v_1 \cdot 9r = m \cdot v_2 \cdot r$

$$v_2 = 9 v_1 = 54 \frac{\text{км}}{\text{с}}, \quad \text{~~54 км/с~~}$$

Вопрос 2

Т.к влажность воздуха не может быть больше 100%, то мы будем сжимать воздух, до того пока его влажность не станет 100%, а потом вода пар начнет конденсироваться, и давление будет постоянным, $v_2 = \frac{60}{100} v_1$ (?)

$$P_1 \cdot v_1 = \nu R T_1, \quad P_2 \cdot v_2 = \nu R T_1 \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{60}{100}$$

$$P_2 = \frac{100}{60} P_1 = \frac{10}{6} P_1 = \frac{5}{3} \text{ Атм.}$$

N_2 $T = t + 273$ $T' = t' + 273$

$P_0 \cdot V = \nu R T$

$P_0 V = R T \cdot \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right)$, $m_1 + m_2 = m \Rightarrow m_1 = m - m_2$
 $m_2 = m - m_1$

$P_0 V = R T \cdot \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m - m_1}{\mu_2} \right) = R T \left(\frac{m_1}{\mu_1} - \frac{m_1}{\mu_2} + \frac{m}{\mu_2} \right)$

$\frac{P_0 V}{R T} = m_1 \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) + \frac{m}{\mu_2} \Rightarrow m_1 \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) = \frac{P_0 V}{R T} - \frac{m}{\mu_2}$

$m_1 = \frac{P_0 V \cdot \mu_2 - m R T}{R T \mu_2} \cdot \frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{\mu_2 - \mu_1}$

m_1 - масса воды
 m_2 - масса воздуха

~~Так температура пара воздуха меньше, поэтому
 вся вода превратится в лёд.~~

~~$m_{\text{лед}} = m_1 = \frac{P_0 V \mu_2 - m R T}{R T \mu_2} \cdot \frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{\mu_2 - \mu_1}$~~

~~$= \frac{101 \cdot 10^3 \cdot \frac{3,73}{1000} \cdot 29 \cdot \frac{1}{1000} - \frac{2522}{831 \cdot 10^3} \cdot 0,31 \cdot 373}{0,31 \cdot 373 \cdot 29 \cdot \frac{1}{10^3} \cdot 11 \cdot \frac{1}{10^3}} \cdot \frac{29 \cdot 18}{10^6}$~~

~~$= \frac{101 \cdot 3,73 \cdot \frac{29}{1000} - \frac{2522}{10^5} \cdot 373}{0,31 \cdot 373 \cdot 29 \cdot 11} \cdot 29 \cdot 18 =$~~

~~$= \frac{373 \cdot \left(101 \cdot 29 \cdot \frac{1}{10^5} - \frac{2522}{10^5} \right)}{0,31 \cdot 373 \cdot 11} \cdot 18 =$~~

~~$= \frac{2929 - 2522}{0,31 \cdot 10^5 \cdot 11} \cdot 18 = \frac{407 \cdot 18}{0,31 \cdot 11 \cdot 10^5} = \frac{37 \cdot 11 \cdot 18}{0,31 \cdot 11 \cdot 10^5} = \frac{37 \cdot 18}{3 \cdot 277 \cdot 10^3} =$~~

~~$= \frac{37 \cdot 6}{277 \cdot 10^3} \text{ кг} = \frac{222}{277} \text{ г} = \frac{666}{831} \text{ г}$~~

~~$m_2 = m - m_1 = \frac{2522 - 666}{831} = \frac{1856}{831} \text{ г}$~~

Жидкость в т.ч. давление в сосуде частично создается водяным паром, а частично сухим воздухом: $\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2}$

$$p_1 + p_2 = p_0 \Rightarrow p_2 = p_0 - p_1$$

$$\frac{p_1}{p_0 - p_1} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow m_2 p_1 = m_1 p_0 - p_1 m_1$$

$p_1 \cdot (m_2 - m_1) = m_1 p_0 \Rightarrow p_1 = \frac{m_1}{m_2 - m_1} p_0$ - давление в начале при температуре T' останется водяного пара:

$$\frac{p_1}{p_1'} = \frac{m_1}{m_1'} \Rightarrow m_1' = m_1 \cdot \frac{p_1'}{p_1} = m_1 \cdot \frac{p_1'}{\frac{m_1}{m_2 - m_1} p_0} =$$

$$= \frac{p_1'}{p_0} \cdot (m_2 - m_1) = \frac{p_1'}{p_0} \cdot (m - 2m_1)$$

$$m_n = m_1 - m_1' = m_1 - \frac{p_1'}{p_0} \cdot (m - 2m_1) =$$

$$= \frac{p_1'}{p_0} \cdot \left(\frac{p_0}{p_1'} \cdot m_1 - m + 2m_1 \right) = \frac{p_1'}{p_0} \cdot \left(m_1 \left(\frac{p_0}{p_1'} + 2 \right) - m \right) =$$

$$= \frac{202}{101 \cdot 10^3} \cdot \left(\frac{666}{831} \cdot \left(\frac{101 \cdot 10^3}{202} + 2 \right) - \frac{2522}{831} \right) =$$

$$= \frac{2}{10^3} \cdot \left(\frac{666}{831} \cdot 502 - \frac{2522}{831} \right) = \frac{2 \cdot (331810)}{831 \cdot 10^3} = \frac{66362}{83100}$$

~~$$m_1' = \frac{101 \cdot 10^3}{202} \cdot \left(\frac{2522 \cdot 666}{831} \right) = \frac{10^3}{2} \cdot \frac{1190}{831} = \frac{1190 \cdot 10^3}{1662}$$~~

$$m_1' = \frac{66600}{83100} - \frac{66362}{83100} = \frac{238}{83100} \approx 0.0028\%$$

$$p_0 \cdot V = \nu R T' = \left(\frac{m_1'}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) R T' \Rightarrow V = \frac{R T'}{p_0} \cdot \left(\frac{m_1'}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) =$$

$$\frac{RT'}{P_0} \cdot \left(\frac{P'(m-2m_1)}{P_0 \mu_1} + \frac{m-m_1}{\mu_2} \right) = \frac{8,31 \cdot 260}{101 \cdot 10^3} \cdot \left(\frac{236 \cdot 10^3}{83100 \cdot 16 \cdot 10^3} + \frac{1856 \cdot 10^3}{831 \cdot 29 \cdot 10^3} \right) =$$

$$= \frac{831 \cdot 260}{10^3 \cdot 101 \cdot 100 \cdot 831} \cdot \left(\frac{236}{100 \cdot 18} + \frac{1856}{29} \right) =$$

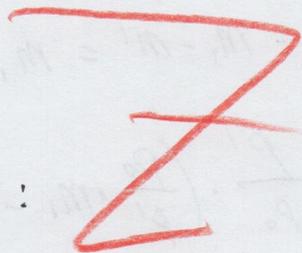
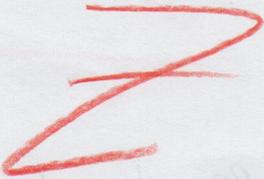
$$= \frac{26}{101 \cdot 10^3} \cdot \frac{238 \cdot 29 + 1856 \cdot 1800}{52200 \cdot 18 \cdot 29 \cdot 100} = \frac{26(238 \cdot 29 + 64 \cdot 29 \cdot 1800)}{101 \cdot 18 \cdot 29 \cdot 100} =$$

$$= \left(\frac{236}{1400} + 64 \right) = \frac{234}{1800} + \frac{4}{1800} + 64 = \frac{13}{100} + \frac{4}{1800} + 64 =$$

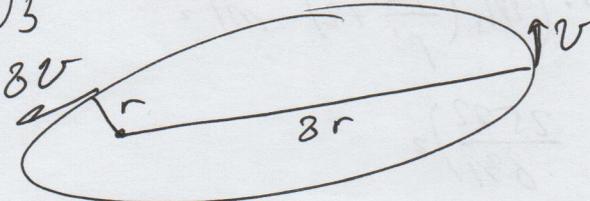
$$= 64,13 + \frac{2}{900} = \frac{26}{101} \cdot \left(64 + \frac{13}{100} + \frac{4}{1800} \right) =$$

$$= 64,13 \cdot \frac{26}{101} = \frac{26}{101 \cdot 10^3} \cdot \frac{238 + 64 \cdot 1800}{1800} \approx \frac{17}{1000} \text{ м}^2 \approx$$

$\approx 17 \mu\text{м}^2$



N3



из 3.С.Д:

$$\begin{cases} \frac{64v^2}{2} - \frac{km}{r} = \frac{v^2}{2} - \frac{km}{8r} \\ \frac{4^2 m}{2} \cdot 81 = \frac{km}{r} = \frac{4^2}{2} m + \frac{km}{9r} \end{cases}$$

← минимальная скорость

$$\frac{63}{2} v^2 = \frac{7}{8} \frac{km}{r}, \quad 80 \frac{4^2}{2} = \frac{8}{9} \frac{km}{r}$$

$$\frac{v^2}{4} = \frac{10}{8} \Rightarrow \frac{4^2}{v^2} = 0,8 \quad \frac{m \cdot 64v^2}{2} + X = \frac{m \cdot 81 \cdot 4^2}{2}$$

$$\frac{m \cdot 64 \cdot v^2}{2} + X = \frac{m \cdot 81 \cdot 0,8 v^2}{2} \Rightarrow X = \frac{m v^2 \cdot (98 \cdot 81 - 64)}{2}$$

$= \frac{m v^2}{2} \cdot \left(\frac{81 \cdot 8}{100} - 64 \right)$ за 5 раз ему передается 5X

$$\frac{m64v^2}{2} + 5X = \frac{m\omega^2}{2} = \frac{mV^2}{2} (64 + 5(64,3 - 64)) =$$

$$= \frac{mV^2}{2} \cdot (64 + 4,6) = \frac{mV^2}{2} \cdot 68,6 = \frac{m\omega^2}{2}$$

$$\omega^2 = 68,6 v^2$$

$$\text{З.С.З.} \quad \frac{\omega^2 m}{2} \rightarrow \frac{\kappa m}{r} = \frac{\left(\frac{\omega \cdot r}{R}\right)^2 m}{2} \rightarrow \frac{\kappa m}{R}$$

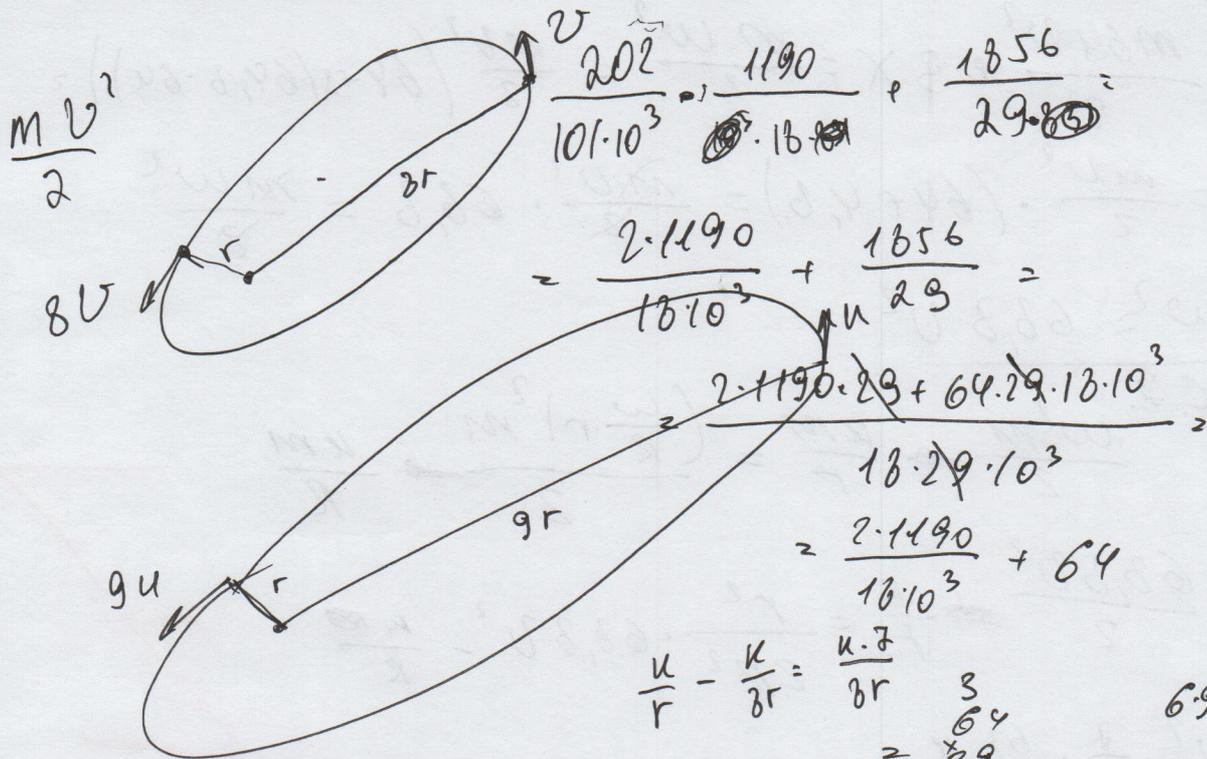
$$\frac{68,6 v^2}{2} \rightarrow \frac{\kappa}{r} = \frac{r^2}{2R^2} \cdot 68,6 v^2 - \frac{\kappa}{R}$$

$$v^2 = \frac{r}{b} \cdot \frac{63}{2} \frac{\kappa}{r}$$

$$\frac{68,6 \cdot \frac{r}{b} \cdot \frac{63}{2} \frac{\kappa}{r}}{2 \cdot b \cdot 2} \frac{\kappa}{r} - \frac{\kappa}{r} = \frac{r^2}{2R^2} \cdot 68,6 \cdot \frac{r}{b \cdot 2} \frac{\kappa}{r} - \frac{\kappa}{R}$$

$$\frac{68,6 \cdot \frac{r}{b} \cdot \frac{63}{2}}{2 \cdot b \cdot 2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = \frac{68,6 \cdot \frac{r}{b} \cdot \frac{63}{2}}{2 \cdot b \cdot 2} \frac{r}{R^2} - \frac{1}{R} \quad | \cdot r$$

$$\frac{68,6 \cdot \frac{r}{b} \cdot \frac{63}{2}}{2 \cdot b \cdot 2} - 1 = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot \frac{68,6 \cdot \frac{r}{b} \cdot \frac{63}{2}}{2 \cdot b \cdot 2} - \left(\frac{r}{R}\right)$$



$$\frac{64mv^2}{2} + X = \frac{mu^2}{2} \cdot 9r$$

$$\frac{64v^2}{2} + \frac{u}{r} = \frac{v^2}{2} + \frac{u}{9r}$$

$$\frac{u^2}{2} \cdot 81 + \frac{u}{r} = \frac{u^2}{2} + \frac{u}{9r}$$

$$\frac{63v^2}{2} = \frac{7u}{8r} \quad 80 \frac{u^2}{2} = \frac{8u}{9r}$$

$$\frac{63v^2}{80u^2} = \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 8} = \frac{v^2}{u^2} \cdot \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 10} = \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 8}$$

$$\frac{v^2}{u^2} = \frac{10}{8} \quad \frac{u^2}{v^2} = 0.8$$

Handwritten red scribbles.

48

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 37 \\ \hline 222 \end{array}$$

18+4=22

1190/18

$$\begin{array}{r} 4 \\ 18 \\ \times 6 \\ \hline 108 \\ +18 \\ \hline 126 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 29 \\ \hline 909 \\ 202 \\ \hline 2919 \\ -2522 \\ \hline 407 \end{array}$$

~~666-502~~

$$\begin{array}{r} 5 \\ 37 \\ \times 18 \\ \hline 296 \\ 37 \\ \hline 666 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 8 = 24 \\ 12-3 \\ 2572 \\ -1332 \\ \hline 1190 \\ 12-6 \\ 11-6=5 \\ 14-6=8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2522 \\ -666 \\ \hline 1856 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 666 \\ \times 2 \\ \hline 1332 \end{array}$$

12-3

$$\begin{array}{r} 666 \\ \times 502 \\ \hline 1332 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2522 \\ -1332 \\ \hline 1190 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 831 \\ \times 2 \\ \hline 1662 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 000 \\ 3330 \\ \hline 339332 \\ -2522 \\ \hline 337810 \end{array}$$

13-5=8

$$\begin{array}{r} 600 \\ -362 \\ \hline 238 \end{array}$$

~~18-29~~

$$\begin{array}{r} 7 \\ 29 \\ \times 18 \\ \hline 522 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 663620 \\ 2 \cdot 8 = 16 + 7 = 23 \end{array}$$

~~18-3~~

~~238/29~~

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times 9 \\ \hline 261 \end{array}$$

~~290-29~~

$$\begin{array}{r} 238 \\ \times 18 \\ \hline 53 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 29 \\ \times 7 \\ \hline 203 \end{array}$$

14+6=20

203+29 = 232

$$\begin{array}{r} 238 \\ \times 18 \\ \hline 58 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1856 \\ \times 29 \\ \hline 174 \\ 116 \\ 3 \\ 18 \\ \times 4 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 185 \\ 3 \\ 29 \\ \times 4 \\ \hline 116 \end{array}$$

29.5=

$$\begin{array}{r} 2 \\ 64 \\ \times 26 \\ \hline 384 \\ 128 \\ \hline 1664 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 18 \\ \times 3 \\ \hline 54 \end{array}$$

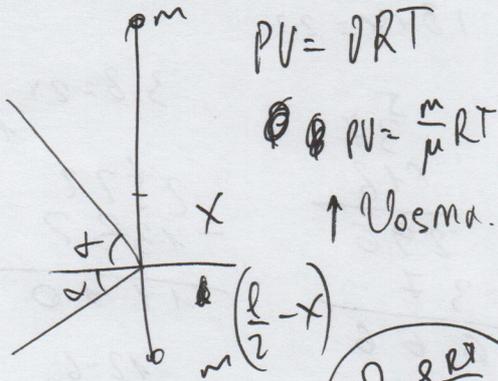
26.64=

3.8=24

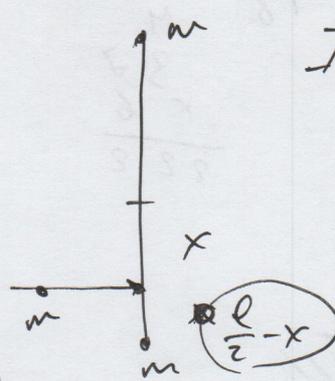
$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 29 \\ \hline 174 \end{array}$$

= 32.5=

12+5=17

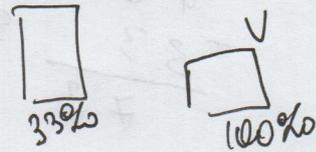


$PV = \nu RT$
 $PV = \frac{m}{\mu} RT$
 $\uparrow U_{осма.}$



$I = m r^2$
 $\frac{mV^2}{2} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot l^2}{2}$

$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{2m \cdot U^2}{2} + \frac{mV^2}{2} + \frac{2m(\frac{l}{2})^2 \cdot \omega^2}{2}$



$mV_0 = 2mU - mV \quad | \quad V_0^2 = 2U^2 + V^2 + \frac{l^2 \omega^2}{2}$

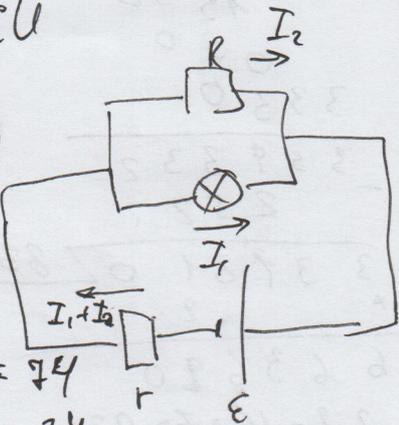
$29 \cdot 100 + 29 = 2900 + 29 = \frac{101}{29} = 2929$

$I^2 = \frac{1}{r} \cdot 3 \epsilon U$

$U = \frac{I^2 r^2}{3 \epsilon}$

$\frac{3}{18} \times 4 = 72$

$37 \cdot 2 = 74$
 $60 + 14 = 74$



$I_2 R = U(I_1)$

$(I_1 + I_2) \cdot r + I_2 \cdot R = \epsilon$

$(I_1 + \frac{U(I_1)}{R}) r + U(I_1) = \epsilon$

$37 \cdot 3 = 90 \text{ ed } 101$

$I_1 \cdot r + U(I_1) (1 + \frac{r}{R}) = I_1 \cdot r + U(I_1) - \frac{R+r}{R} = \epsilon$

$I_1 \cdot r + \frac{I_1^2 \cdot r^2}{3 \epsilon} \cdot \frac{R+r}{R} = \epsilon$

$\frac{2929}{2522} = \frac{7}{407}$

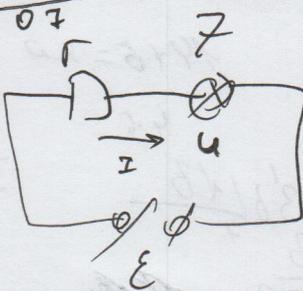
$U = \frac{U}{r}$

$\epsilon R + U(I) = \epsilon$

$IR + U = \epsilon$

$U = \epsilon - IR$

$\frac{12}{12} \frac{831}{74} \frac{137}{91}$



$\frac{407}{33} \frac{11}{37} = \frac{77}{78} = \frac{0}{0}$

$144 + 81 = 225$

$24 = 6 \cdot U$

$\frac{831}{6} \frac{13}{27} \frac{81}{21} + 12 \cdot 12$

$15 - 9 = 6 \quad \frac{277}{2} \frac{137}{25}$

$\frac{831}{72} \frac{11}{4} = \frac{111}{9}$