



сдача В⁵¹

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант С-4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников «Тюдоры Воровьевы зды!»
наименование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Тютенко Татьяна Свекловны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
80-76-78-23	85	20	20	20	20	0	5		

80-76-78-23
(124.2)

Кисловик

Задача 1

$$1 + \sqrt{2} \cos x (\sin x - 2 \cos x) + \sqrt{2} \sin x (2 \sin x + \cos x) =$$

$$= 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right)$$

$$2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \quad (\text{по формуле}) \quad 2 \sin^2(\alpha - \beta) =$$

$$= 1 - \cos(2\alpha - 2\beta)$$

$$\sqrt{2} \cos x (\sin x - 2 \cos x) + \sqrt{2} \sin x (2 \sin x + \cos x) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

$$\sqrt{2} \cos x \sin x - 2\sqrt{2} \cos^2 x + 2\sqrt{2} \sin^2 x + \sqrt{2} \sin x \cos x =$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

$$2\sqrt{2} \cos x \sin x - 2\sqrt{2} (\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

$$2\sqrt{2} \sin 2x - 2\sqrt{2} \cos 2x = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x\right)$$

$$\cos 2x \left(-2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sin 2x \left(\frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$-\frac{3\sqrt{2}}{2} \cos 2x = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \sin 2x$$

$$\operatorname{tg} 2x = +1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Чистовик

Задача 2
 Дано: v - скорость В. 2 часа - остановка
 $2v$ - скорость А 1-11:00
 2-12:00

Решение: Найти: время, в которое они прибыли в В.
 велосипедист не мог сделать остановки, т.к его скорость меньше, чем у автомобилиста.

I автомобилист выехал позже, тогда

$$vt = 2v(t-3)$$

$$t = 6$$

$12:00 + 6 = 18:00$

II автомобилист выехал раньше, тогда

$$vt = 2v(t-1)$$

$$t = 2$$

$11:00 + 2 = 13:00$

Ответ: 18:00 или 13:00



Задача 2
 v - скорость велосипедиста
 $2v$ - скорость автомобилиста.

Решение: Найти: в каком часу они прибыли в пункт В?
 велосипедист не мог сделать остановки, так как его скорость меньше, чем у автомобилиста.

остановка 2 часа
 1 выехал в 11:00
 2 выехал в 12:00

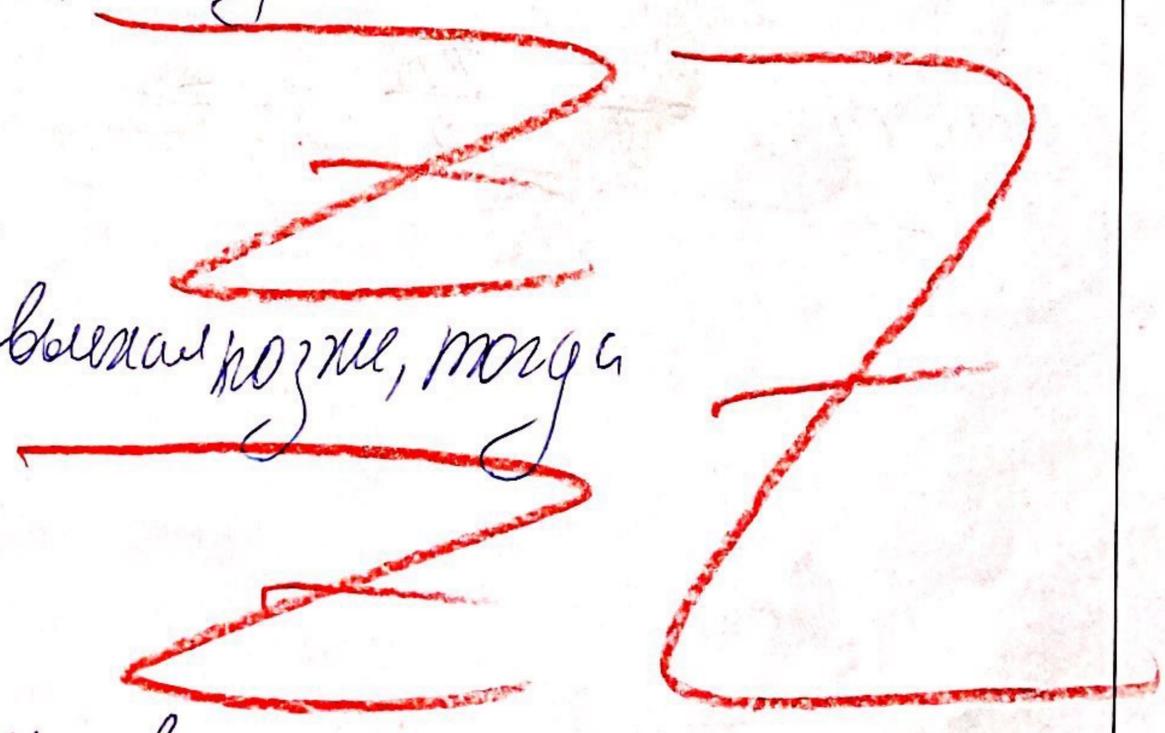
I автомобилист выехал позже, тогда

$$vt = 2v(t-1)$$

$$t = 2$$

$12:00 + 2 = 14:00$

II автомобилист выехал раньше, тогда



Установил

$$vt = 2V(t - 2)$$

$$t = 2$$

$$11:00 + 8 = 17:00$$

Ответ: 14:00 или 17:00

Задача 3

Дано:

$$x^3 + 6x^2 + 7x + 1 = 0$$

$$x^3 + x^2(x_1 + x_2 + x_3) + x(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) + x_1x_2x_3$$

~~Используем теорему Виетта для кубических уравнений~~

~~Найти: при каких a, b, c корнями уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ являются числа $x_1 + x_2, x_2 + x_3$ и $x_3 + x_1$?~~

Решение:

$$x^3 + x^2(x_1 + x_2 + x_3) + x(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) + x_1x_2x_3$$

Используем теорему Виетта для кубических уравнений.

$$x_1 + x_2 + x_3 = -6$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 7$$

$$x_1x_2x_3 = -1$$

$$t_1 = x_1 + x_2$$

$$t_2 = x_2 + x_3$$

$$t_3 = x_1 + x_3$$

Чистовик

$$1) t_1 + t_2 + t_3 = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2(x_1 + x_2 + x_3) = 2 \cdot (-6) = -12$$

$$a = -12$$

$$2) t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3 = 3(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3) + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3 \cdot 7 + 36 - 14 = 43$$

$$b = 43$$

$$3) t_1 t_2 t_3 = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_1 + x_3)$$

$$c = -41$$

Ответ: при $a = -12$, $b = 43$, $c = -41$ корнями уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ являются числа $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$, $x_3 + x_1$.

Задача 4

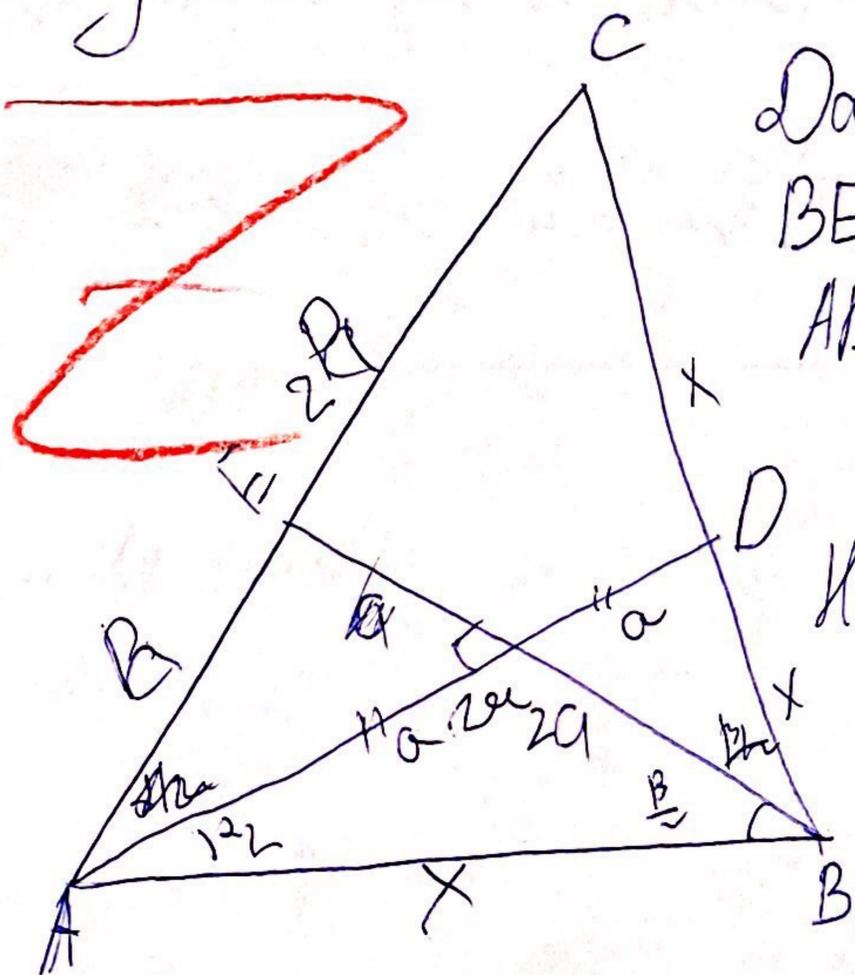
Дано:

BE - биссектриса

AD - медиана

$$AB = 2\sqrt{26}$$

Найти: $S_{\triangle ABC}$?



Штабелюк 1

Решение:

$$l = \frac{2 \cdot 200x}{2x + x} \cdot \cos \frac{\beta}{2}$$

$$\frac{36}{2} = x \cdot \cos \frac{\beta}{2} \uparrow 2$$

$$a = x \cdot \sin \frac{\beta}{2} \uparrow 2 \quad \oplus a = 6\sqrt{3}$$

$$S = \frac{200x}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} =$$

$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 26} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$S = 968$$

$$\text{Ответ: } S_{ABC} = 968$$

Задача 5

Дано: точки A, B, C

$$f(A; B) = 15\pi$$

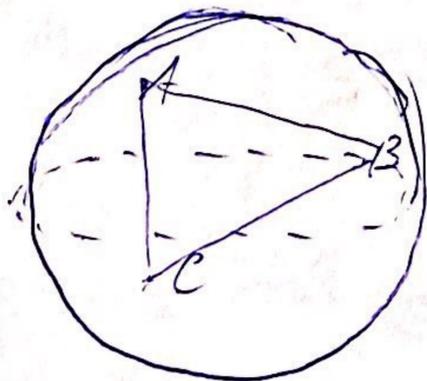
$$f(A; C) = 9\pi$$

$$f(B; C) = 12\pi$$

Найти: минимальный возможный при таких условиях периметр треугольника ABC.

Решение:

$$P_{\Delta} = a + b + c$$



Черновик

$$1) 1 + \sqrt{2} \cos x (\sin x - 2 \cos x) + \sqrt{2} \sin x (2 \sin x + \cos x) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right)$$

$$1 - 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right) \quad 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = 1 -$$

$$1 + \sqrt{2} \cos x \sin x - 2\sqrt{2} \cos^2 x + 2\sqrt{2} \sin^2 x + \sqrt{2} \sin x \cos x = 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right)$$

$$2\sqrt{2} \cos x \sin x - 2\sqrt{2} (\cos^2 x - \sin^2 x) = -2 \cos^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right)$$

$$-\sqrt{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \cos \frac{\pi}{8} \cos x + \sin \frac{\pi}{8} \sin x$$

$$2\sqrt{2} \cos x \sin x - 2\sqrt{2} \cos 2x = \cos \frac{\pi}{8} \cos x + \sin \frac{\pi}{8} \sin x$$

$$\text{tg } 2x = m$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x$$

$$2\sqrt{2} (\cos x \sin x - \cos 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x)$$

$$\left(2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$2 \sin x \cos x$$

$$1) 1 + \sqrt{2} \cos x (\sin x - 2 \cos x) + \sqrt{2} \sin x (2 \sin x + \cos x) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right)$$

$$\sqrt{2} \cos x \sin x - 2\sqrt{2} \cos^2 x + 2\sqrt{2} \sin^2 x + \sqrt{2} \sin x \cos x = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

$$2\sqrt{2} \cos x \sin x - 2\sqrt{2} (\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

$$2\sqrt{2} \sin 2x - 2\sqrt{2} \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x$$

$$-2\sqrt{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x = -2\sqrt{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x$$

$$\cos 2x \left(-2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sin 2x \left(2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{-3\sqrt{2}}{2} \cos 2x = \frac{5\sqrt{2}}{2} \sin 2x$$

$$\text{tg } 2x = -\frac{3}{5}$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n \quad x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{-4\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-4\sqrt{2} + \sqrt{2} = -3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Черковск

2)	b	v
	u	2v

$$\frac{b-v}{a-2v}$$

$$(t-3)(t-1)$$

11:00
12:00

A
гража оcm.

B

$$vt = 2v(t-3) \text{ похмле}$$

$$vt = 2v(t-3)$$

$$t = 2t - 6$$

$$t = 6$$

$$t = 2t - 6$$

$$12 + 6 = 18:00 \rightarrow t = 6$$

$$II \quad vt = 2v(t-1) \text{ равные}$$

$$t = 2t - 2$$

$$t = 2$$

$$13:00$$

$$13:00 \text{ или } 18:00$$

$$3. \quad x^3 + 6x^2 + 7x + 1 = 0$$

$$x^3 + x^2(x_1 + x_2 + x_3) + x(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) + x_1x_2x_3$$

по Виета для куб. урав-ий.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -6 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 7 \\ x_1x_2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } -12, 43, -41$$

$$t_1 = x_1 + x_2$$

124841

$$t_1 + t_2 + t_3 = x_1 + x_2 + x_2 + x_3 + x_1 + x_3$$

$$t_2 = x_1 + x_3$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 =$$

$$= 2(x_1 + x_2 + x_3) = 2 \cdot -6 = -12$$

$$t_3 = x_1 + x_3$$

$$t_1t_2 + t_2t_3 + t_1t_3 =$$

$$x^3 + 6x^2 + 7x + 1 = 0$$

$$t_1 + x_3 = -6$$

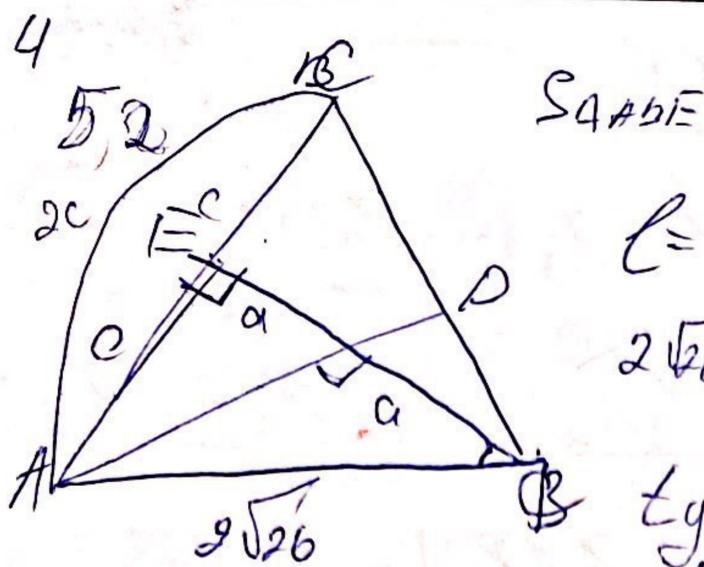
$$= (x_1 + x_2)(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)(x_1 + x_3) + (x_1 + x_2)(x_1 + x_3) =$$

$$t_1 = -6 - x_3$$

$$a = -12$$

$$\begin{aligned} &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_2 + x_2x_3 + \\ &+ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 2x_3 + \\ &+ 2x_1 + x_1x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 = \\ &3x_1x_2 + 3x_1x_3 + 3x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2x_3 \end{aligned}$$

Церковник



$$l = \frac{2ac}{a+c} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 52}{20+52}$$

$$l = \frac{20}{2} = c \cdot \cos \frac{\beta}{2} \Rightarrow \frac{20}{c} = \cos \frac{\beta}{2}$$

$$a = c \cdot \sin \frac{\beta}{2} \Rightarrow \frac{20}{c} = \frac{2}{25\sqrt{26}}$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{2}{11}$$

$$S = ac \cos \frac{\beta}{2}$$

3. $3x_1x_2 + 3x_1x_3 + 3x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$

$$3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 2(x_1 + x_2 + x_3) = 2\sqrt{26}$$

$$= 3 \cdot 7 + 2 \cdot (-6) = 21 + 12 = 43$$

~~43~~ $\frac{43}{21}$ $\frac{21}{-14}$ $\frac{21}{933}$ $\frac{21}{43}$ $-12; 9;$

c) $t_1 t_2 t_3 = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_1 + x_3) = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3)(x_1 + x_3)$

$$= x_1x_2 + 2x_1^2 + 2x_2 + x_2x_3 + x_1x_2 - 4x_1x_2 + x_2^2$$

$$= x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + 2x_1x_3$$

$-12; 43; -41$

3) $t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3 = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)(x_1 + x_3) + (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)$

$$= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_2 + x_2x_3$$

$$= 3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 =$$

$$= 3 \cdot 7 + 36 - 14 = 43$$

$3 \cdot 7 + 36 - 14 = 43$ $(x_1 + x_2 + x_3)^2$

$$+ 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$$

$$3 \cdot 7 + 36 - 14 = 43$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

21 36 57 57 43 104

c) $t_1 t_2 t_3 = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_3)$

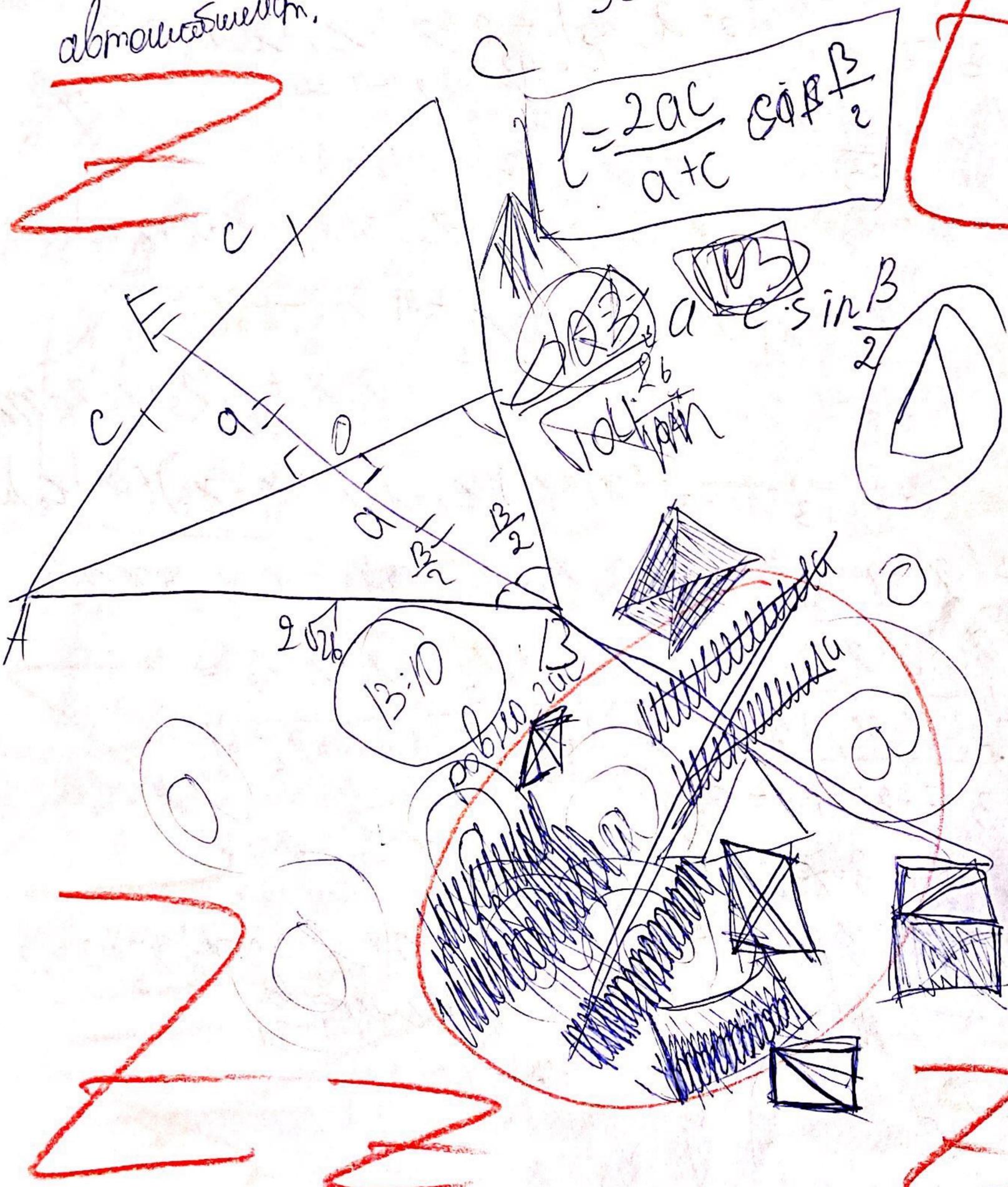
$(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2 + \lambda_2 \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_3)$

$\lambda_1^2 \lambda_2 + \lambda_1^2 \lambda_3 + \lambda_2^2 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3^2$

$\lambda_1^2 (\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2^2 (\lambda_1 + \lambda_3) + \lambda_3^2 (\lambda_1 + \lambda_2) - 2$

$\lambda_1^2 t_2 + \lambda_2^2 t_3 + \lambda_3^2 t_1 - 2 = -41$
-39

автономист.



дешифр

b) $1 = p_1 < p_2 < \dots < p_k = N$

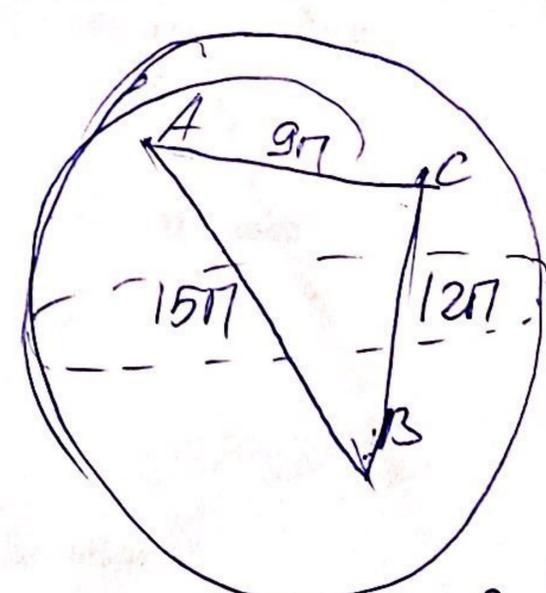
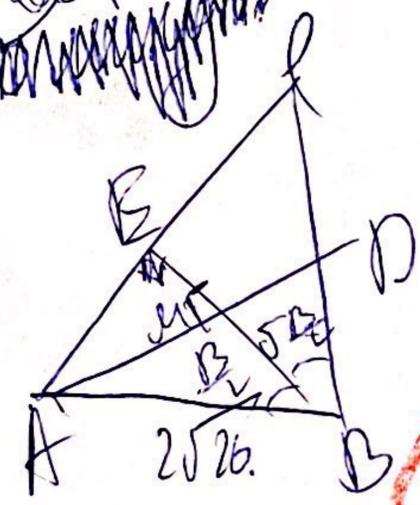
Чертовик

$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1696} \cdot p_{1697} \geq N^e$

Найти все возможные значения $\sigma(N^3) = (1+3d_1)(1+3d_2)\dots$
еще известно, что $p_2 \cdot p_4 \cdot p_{1696} \cdot p_{1697} \geq N^e \Rightarrow p_4 \cdot p_{1696} \cdot p_{1697} \geq N$



5700 раз не сходятся
~~раз не сходятся~~



мин. PABE?