



0 887 190 22000 1

88-71-90-22

(123.2)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант С-1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы
наименование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Воробьёвой Софии Олеговны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

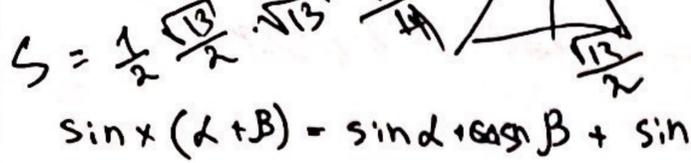
| Шифр | Сумма | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------------|-------|----|----|----|----|---|---|---|---|
| 88-71-90-22 | 85 | 20 | 20 | 20 | 20 | 0 | 5 | | |

Черновик:

1 - \sqrt{2} \sin x (\cos x + 2 \sin x) + \sqrt{2} \cos x (2 \cos x - \sin x) - 2 \cos^2 (x - \frac{\pi}{8})

\cos x + 2 \sin x \cdot \cos x

\cos x (1 + 2 \sin x)



1 - 2 \sin^2 x - \sin x

-\sin x (1 + 2 \sin x) + 1

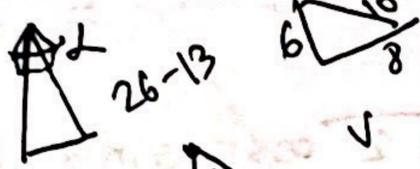
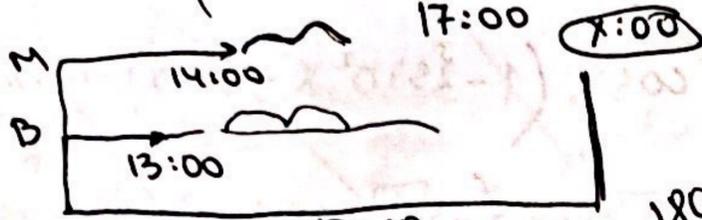
x^3 - 7x^2 + x^2 + 7x - 1 = 0

\sqrt{13 - \frac{13}{2}} = \sqrt{\frac{13}{2}}

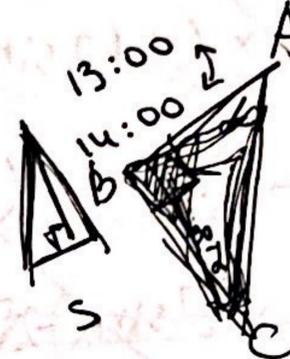
x' = x^2 + 7x + 7

\frac{D}{4} = 36 - 7 = 29

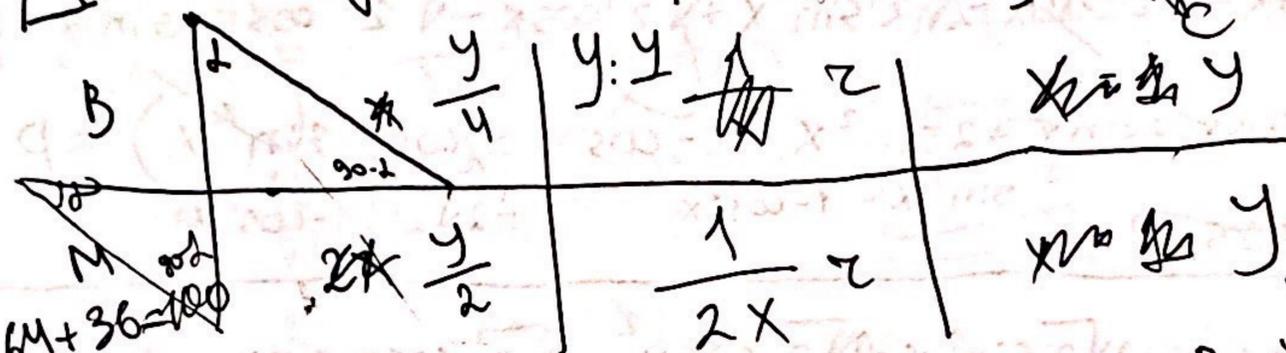
1 - \sqrt{2} (\sin(\cos x) \cdot \cos(2 \sin x) + \sin(2 \sin x) \cdot \cos(\cos x))



180(90 - \alpha)



\frac{y}{x} = \frac{y}{2x} + 3



Путь S = 1

\frac{1}{x} = \frac{1}{2x} + 2

\frac{1}{x} = \frac{1}{2x} + 2

\frac{9}{3+4x+5} = \frac{1+4x}{2x}

2x = x + 4x^2, 4x^2 - x = 0, x(4x-1) = 0, x = \frac{1}{4} км/ч

\frac{y}{x} = \frac{y+4x}{2x}

x = \frac{y}{4}

\frac{1+2x}{x} = \frac{1}{2x}

x = 2x + 4x^2

4x^2 + x = 0, x(4x+1) = 0

yx = 2xy + 6x^2, 6x^2 + 2xy = 0, 2xy = xy + 4x^2, 4x^2 - xy = 0

x(6x-y) = 0, x = \frac{y}{6}

1 \frac{x}{3} + 1, 1 \frac{x}{2}

$$1 - \sqrt{2} \sin x (\cos x + 2 \sin x) + \sqrt{2} \cos x (2 \cos x - \sin x) = 2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{8}\right)$$

~~$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$~~

формула Р = 1 + cos(2x - π/4)
 тогда если λ = π/4

~~$$1 - \sqrt{2} \sin x (\cos x + 2 \sin x) + 2 \cos x$$~~

~~$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$~~

~~$$1 - \sqrt{2} \sin x (\cos x + 2 \cos x \sin x) + \sqrt{2} \cos x (2 \cos x - \sin x) = 2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{8}\right)$$~~

~~$$1 - \sqrt{2} \sin x (\cos x (1 + 2 \sin x)) + \sqrt{2} \cos x (1 - 2 \sin^2 x - \sin x) = 2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{8}\right)$$~~

~~$$1 - \sqrt{2} \sin x \cos x - \sqrt{2} \sin x (1 + 2 \sin x) + \sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \cos x \cdot 2 \sin^2 x - \sqrt{2} \cos x \sin x = P$$~~

~~$$1 - 2\sqrt{2} \sin x \cos x - \sqrt{2} \sin x - 2\sqrt{2} \sin^2 x + \sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \cos x \cdot 2 \sin^2 x = P$$~~

~~$$1 - \sqrt{2} (2 \sin x \cos x + \sin x + 2 \sin^2 x - \cos x + 2 \cos x \sin^2 x) = P$$~~

~~$$\sqrt{2} \sin x (\cos x)$$~~

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$-2\sqrt{2} (1 - \cos^2 x)$$

~~$$1 - \sqrt{2} \sin x \cos x - 2\sqrt{2} \sin^2 x + \sqrt{2} \cos x^2 - \sqrt{2} \cos x \sin x = 2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{8}\right)$$~~

~~$$1 - 2\sqrt{2} \sin x \cos x - 2\sqrt{2} (1 - \cos^2 x) + 2\sqrt{2} \cos^2 x = 2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{8}\right)$$~~

~~$$1 - 2\sqrt{2} \sin x \cos x - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cos^2 x + 2\sqrt{2} \cos^2 x = 2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{8}\right)$$~~

~~$$1 - 2\sqrt{2} \sin x \cos x - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \cos^2 x = 2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{8}\right)$$~~

~~$$1 - 2\sqrt{2} \sin x \cos x - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \cos^2 x = 2 \left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$$~~

~~$$- \sqrt{2} \sin 2x + 2\sqrt{2} \cos 2x = \cos 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$~~

~~$$1 - 2\sqrt{2} \sin x \cos x - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \cos^2 x = \sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x$$~~

~~$$\frac{3\sqrt{2}}{2} \cos 2x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin 2x \Rightarrow \tan 2x = 1$$~~

~~$$1 - 2\sqrt{2} \sin x \cos x - 2\sqrt{2} \sin^2 x + 2\sqrt{2} \cos^2 x - \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$~~

~~$$1 - 2\sqrt{2} \sin x \cos x - 2\sqrt{2} \sin^2 x + 2\sqrt{2} \cos^2 x - \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$~~

8/10/2011

продолжение на
 последний стр.

| | | | |
|---|-----------|------------------|-----|
| В | x км/ч | $\frac{y}{x}$ ч | S |
| М | $2x$ км/ч | $\frac{y}{2x}$ ч | y |

$\begin{cases} y > 0 \text{ ч.р.н.} \\ x > 0 \end{cases}$
- следует из условия

Пусть x — скорость велосипедиста, тогда $2x$ — $\sqrt{\text{мг.}}$
Примем S за y . Они проехали одинаковое расстояние.

Тогда $t = \frac{y}{x}$ и $t = \frac{y}{2x}$ соответственно

Вставим ~~четыре~~ ~~два~~ уравнения и рассмотрим все случаи: и проехал

а) Если велосипедист сделал остановку: ~~и проехал~~ в 14:00

~~$\frac{y}{x} = \frac{y}{2x} + 3$~~ $\Rightarrow y = 6$ ~~$x(4x - y) = 0$~~

~~$\frac{y}{x} = \frac{y + 6x}{2x}$~~ $\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{y}{4} \end{cases}$

~~$2xy = xy + 6x^2$~~

~~$xy = xy + 4x^2$~~ $\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{y}{6} \end{cases}$

б) Если мотоциклист сделал остановку: и проехал в 13:00

~~$\frac{y}{2x} = \frac{y}{x} + 1$~~ $\Rightarrow y = 3$

$\begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{y}{6} \end{cases}$

~~$xy = 2xy + 4x^2$~~

~~$xy = 0$~~

~~$4x^2 = 0$~~

~~$x = 0$~~ ~~$x = -\frac{y}{6}$~~

— не подходит по условию \Rightarrow
вело велосипедист ~~и~~ совершил остановку.

2. тогда составили новую таблицу:

| | | | |
|--------------|--|---------------------------------------|-----------------|
| В | $\frac{y}{4}$ км/ч | $\frac{y}{4}$ ч | 5 км |
| М | $2 \cdot \frac{y}{4}$ км/ч | $\frac{y}{2}$ ч | у км |

2. б) велосипедист сделал остановку, но поехал в 15:00

$$\frac{y}{x} + 1 = \frac{y}{2x} + 2$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y}{2x} + 1$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y + 2x}{2x}$$

$$2xy = xy + 2x^2$$

$$2x^2 - xy = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{y}{2} \end{cases}$$

2) в мотоциклист сделал остановку, но поехал в м:00

$$\frac{y}{x} + 2 = \frac{y}{2x} + 1$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y}{2x} - 1$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y - 2x}{2x}$$

$$2x^2 + xy = 0$$

$$x(2x + y) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{y}{2} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

$$2xy = xy - 2x^2$$

- не подходит по условию

Значит по условию подходит (а) и (б)

при а,

| | | | |
|---|---------------|---|---|
| В | $\frac{y}{6}$ | 6 | 5 |
| М | $\frac{y}{3}$ | 3 | у |

при б:

| | | | |
|---|---------------|---|---|
| В | $\frac{y}{2}$ | 2 | у |
| М | у | 1 | у |

Ответ: 16:00 ; 19:00

~~Ответ: 15:00~~

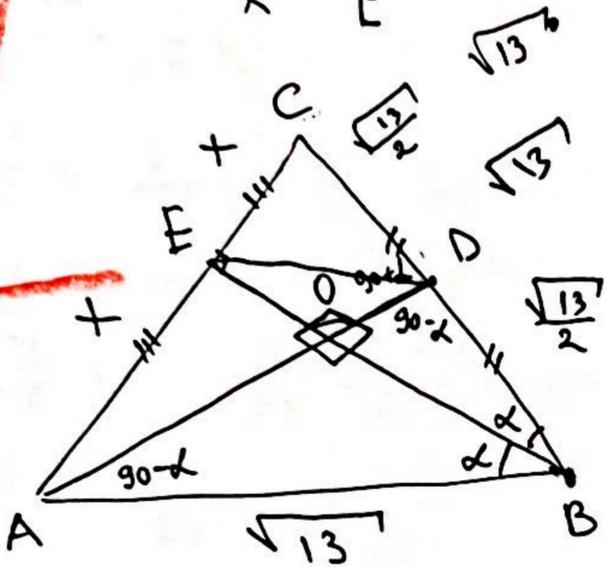
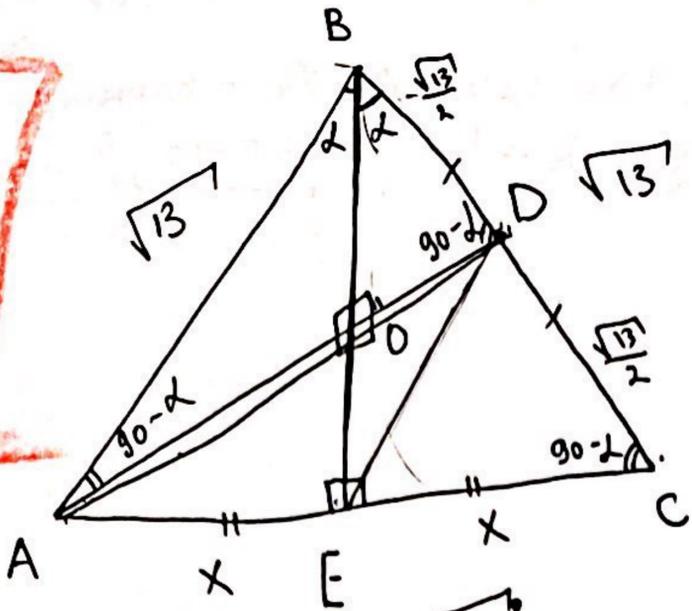
3. $x^3 - 6x^2 + 7x - 1 = 0$ корни x_1, x_2, x_3 - корни уравнения. абс-? мет.

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

$x_1 + x_2, x_2 + x_3$; и $x_1 + x_3$ - корни.
(реш. на германском - $a = -12; b = 43; c = -41$)

[Faded handwritten notes and diagrams, including geometric constructions and algebraic derivations, are visible through the paper.]

4. лист.



Дано: ABC - треугольник

BE - биссектриса

AD - медиана

BE || AD

AB = sqrt(13)

S_{ABC} = ?

$\triangle AOB \sim \triangle ODB$ - по 2 углам
($\angle ABE = \angle EBC$ - по условию;
 $\angle OAB = \angle ODB = 90 - \alpha$)

$\Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{OD}{OA}$

AD - медиана $\Rightarrow AO:OD = 2:1$
- по свойству медианы

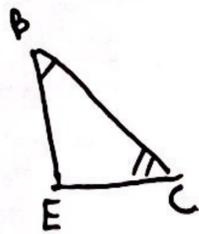
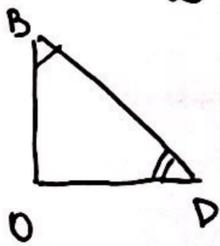
$\Rightarrow k = \frac{1}{2}$ $BD = \frac{\sqrt{13}}{2}$ $CB = \sqrt{13} \Rightarrow AB = CB$

$\triangle ABC$ - равнобедренный

\Rightarrow BE - биссектриса, медиана, высота.

2) $\triangle BOD \sim \triangle BEC$ - по 2 проп. сторонам и углу
($\angle BDO = \angle BCE = 90 - \alpha$; $\frac{BO}{OE} = \frac{2}{1}$ - по св. медианы; $\frac{BD}{BC} = \frac{2}{1}$)

$k = \frac{1}{2}$



$\frac{OD}{EC} = \frac{1}{2} = \frac{BO}{BE} = \frac{BD}{BC}$

$AE = EC = x$

$BE = \sqrt{13 - x^2}$

- по Пифагору

$\frac{BO}{\sqrt{13 - x^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow BO = \frac{\sqrt{13 - x^2}}{2}$

~~2) По Пифагору:~~ 3) $\triangle CED \sim \triangle ABC$ $k = \cos \angle C$

(по 2 углам)

$\frac{ED}{AB} = \frac{EC}{BC} = \frac{CD}{AC} = \frac{x}{\sqrt{13}} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{2x}$

$\frac{x}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{4x}$

$4x^2 = 13$

$x^2 = \frac{13}{4}$

$x = \frac{\sqrt{13}}{2}$

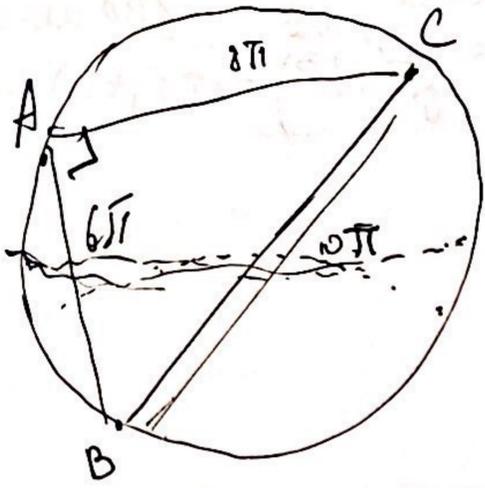
$AC = \sqrt{13}$

$\triangle ABC$ - равност.

$S = \frac{13}{4}$

Ответ: $\frac{13}{4}$

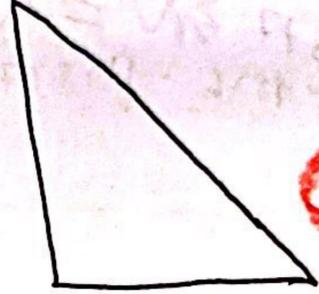
5.



лист.

Дано: сфера.

Найти: $\min \angle ABC$ - ?



6. $N \in \mathbb{N}$

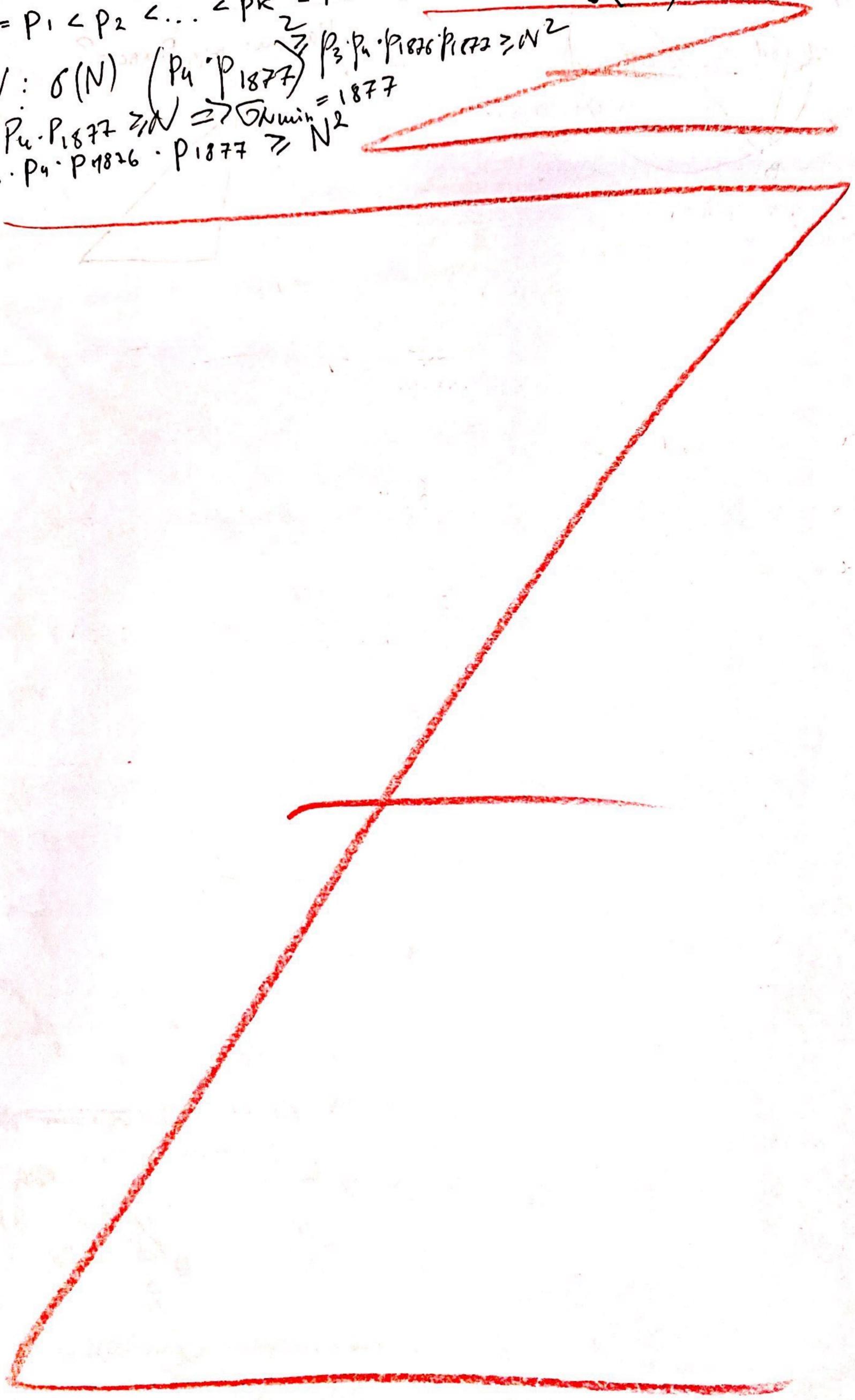
$1 = p_1 < p_2 < \dots < p_k = N = x_1^{d_1} \cdot \dots \cdot x_n^{d_n} \Rightarrow \sigma(N) = (1+d_1)(1+d_2)\dots(1+d_n)$

Найдите: все значения $\sigma(N) = (3d_1+1) \cdot \dots \cdot (3d_n+1)$

$N: \sigma(N) \geq N \Rightarrow p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1877} \cdot p_{1877} \geq N^2$

$p_4 \cdot p_{1877} \geq N \Rightarrow \sigma_{N \min} = 1877$

$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1826} \cdot p_{1877} \geq N^2$



| | | | |
|----|------|----------------|-----|
| 2. | v | t | s |
| B | x | $\frac{y}{x}$ | y |
| M | $2x$ | $\frac{y}{2x}$ | y |

Пусть x - $\sqrt{\text{впос.}}$, тогда $2x$ - $\sqrt{\text{мот.}}$
 y - расстояние от А до В

Могут быть четыре варианта:

- а) В в 13:00 и сделал остановку
- б) В в 14:00 и ~~сделал~~ не сделал остановку
- в) М в 13:00 и сделал остановку
- г) М в 14:00 и ~~сделал~~ не сделал остановку

'В' - велосипедист
'М' - мотоциклист

Если велосипедист в 13:00
 $\frac{y}{x} = \frac{y}{2x}$

Но $\frac{y}{x} > \frac{y}{2x}$ в любом случае ($x > 0$
 $y > 0$ - по условию)

\Rightarrow чтобы они приехали ~~одновременно~~ нужно, чтобы одновременно

Решаем уравнения:

а) $\frac{y}{x} + 1 = \frac{y}{2x} + 1$

$\begin{cases} x=0 \\ x = \frac{y}{6} \end{cases}$

б) $\frac{y}{x} + 1 = \frac{y}{2x} + 2$

$\begin{cases} x=0 \\ x = -\frac{y}{6} \end{cases}$ - не подходит, т.к.
 $x > 0$
 $y > 0$

в) $\frac{y}{x} = \frac{y}{2x} - 3$

$\frac{y}{x} = \frac{y-6x}{2x}$

$\begin{cases} x=0 \\ x = -\frac{y}{6} \end{cases}$ - не подходит
 $x > 0$
 $y > 0$

г) $\frac{y}{x} - 3 = \frac{y}{2x}$

$\frac{y-3x}{x} = \frac{y}{2x}$

$2xy - 6x^2 = xy$

$\begin{cases} x=0 \\ x = \frac{y}{6} \end{cases}$

Составим новую таблицу:

| | | |
|---------------|-----|-----|
| v | t | s |
| $\frac{y}{6}$ | 6 | y |
| $\frac{y}{3}$ | 3 | y |

подходит пункт г), где мотоциклист поехал в 14:00

$14:00 + 3t = 17:00$

$13:00 + (6-2)t = 17:00$

Ответ: 17:00

Черковик: $x_1 + x_2 + x_3 = 6$
 $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 7$
 $x_1 x_2 x_3 = 1$

$-a = (x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + (x_3 + x_1) = -12 = a$

~~a) $\frac{y-2}{x} = \frac{y}{2x} + 1$~~

если в 13:00 - B.

~~b) $b = x_1^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$~~

~~c) $\frac{y}{x} + 1 = \frac{y}{2x} + 2$~~

b) $b = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 36 + 7 = 43$

c) $\frac{y}{x} - 2 = \frac{y}{2x} + 1$

$x_1 + x_2 + x_3 = 6 \Rightarrow C = -(6-x_3)(6-x_2)(6-x_1) = \cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta$

~~a) $\frac{y}{x} - 3 = \frac{y}{2x}$~~

$2xy - 6x^2 = xy$

$C = -f(6) = -(6^3 - 6 \cdot 6^2 + 7 \cdot 6 - 1) = -41$

$6x^2 - xy = 0$

d) $\frac{y}{x} = \frac{y}{2x} + 1$

$\frac{y}{x} = \frac{y+2x}{2x}$

$2xy = xy + 2x^2$

$2x^2 - xy = 0$

$\begin{cases} x=0 \\ y \end{cases}$

$\frac{y+3}{x} = \frac{y}{2x}$

$\frac{y+3x}{x} = \frac{y}{2x}$

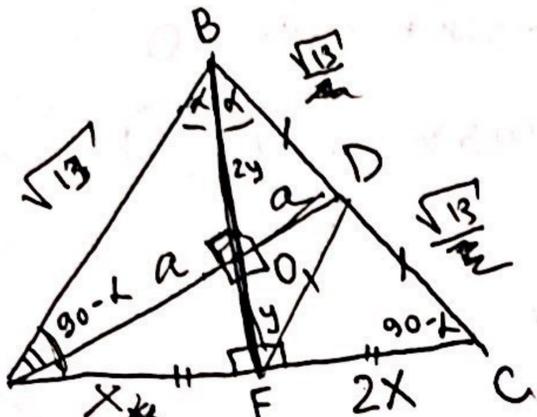
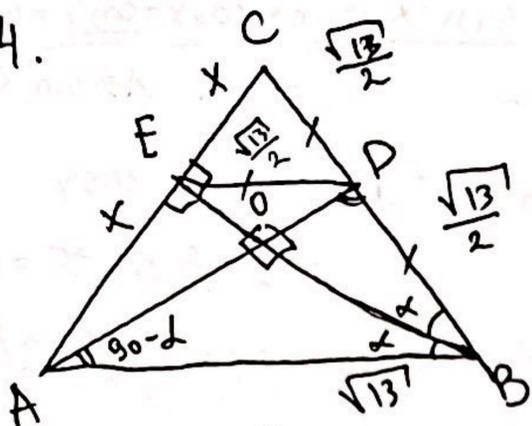
$2xy + 6x^2 = xy$
 $6x^2 + xy = 0$

$x \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4}$

$\left(\sin \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$

4.

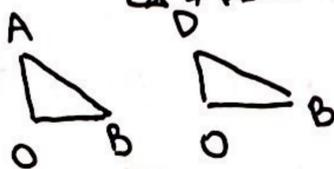


AD - медиана
BE - биссектриса
AD = BE = 2a ^{см.}
AB = sqrt(13)
S - ?

1. $\angle ABE = \angle EBC = \alpha$
 $\angle DAB = 90 - \alpha$ в $\triangle ABO$
 $\angle BOD = 90 - \alpha$ в $\triangle ODB$

$\triangle AOB \sim \triangle ODB$ - по 2 углам.

$$\frac{DO}{AO} = \frac{DB}{AB} = \frac{1}{2}$$



BO - медиана, $BO = \frac{1}{2} AB = \frac{\sqrt{13}}{2}$
 \Rightarrow (по св. медианы)

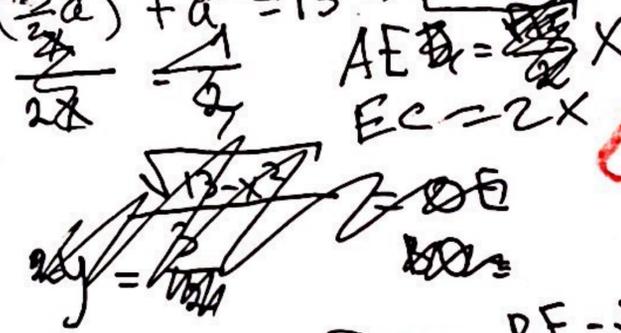
$$1) BE = \frac{2\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{13} \cos \alpha}{3\sqrt{13}} \quad (1)$$

Значит $K = \frac{1}{2}$ и $DB = \frac{\sqrt{13}}{2} = CD$ (AB - медиана)

$\Rightarrow 2AB = BC = \sqrt{13} \Rightarrow \triangle ABC$ - равнобедренный, тогда
BE - биссектр., мед., высота.
 $a = \sqrt{13} \sin \alpha \quad (2)$

2) $\triangle ABO \sim \triangle ODB$ по 2 проп. сторонам и углу
 $(1) \uparrow (2) \uparrow \Rightarrow (\frac{3a}{2})^2 + a^2 = 13 \Rightarrow a = 2$

$$\frac{CE}{CA} = \frac{CD}{CB} = \frac{ED}{AB}$$



$$3) BE = \sqrt{13 - x^2}$$

~~180 - 90 + alpha = 90 + alpha = \angle AEB~~
 $\sin 2\alpha = \frac{12}{13}$
 $BE = \sqrt{13 - \frac{13}{4}} =$

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{ED}{AB} = \frac{1}{2} \quad CA = \sqrt{13}$$

$$x = \frac{\sqrt{13}}{2} \quad (1) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}; \quad (2) \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot EB \cdot \frac{12}{13}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{13} \cdot 2 \sqrt{13} \cdot \frac{12}{13} = 12$$

$$= 12$$

Ответ 12

Answers

$$1. \quad 1 - 2\sqrt{2} \sin x \cdot \cos x - 2\sqrt{2} \sin^2 x + 2\sqrt{2} \cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$$

~~$2\sqrt{2} \sin x \cdot \cos x (1 - 2 + 1)$~~

$$1 - 2\sqrt{2} \sin x \cdot \cos x - 2\sqrt{2} \sin^2 x + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \sin^2 x - \sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - 1 + \sin^2 x = 0$$

$$1 - 2\sqrt{2} \sin x \cdot \cos x - 2\sqrt{2} \sin^2 x + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - 1 = 0 / : 2$$

$$-\sqrt{2} \sin x \cdot \cos x - \sqrt{2} \sin^2 x + \sqrt{2} - \sqrt{2} \sin^2 x - \sin x \cdot \cos x = 0$$

$$-\sqrt{2} \sin x \cdot \cos x - 2\sqrt{2} \sin^2 x + \sqrt{2} - \sin x \cdot \cos x = 0 \quad | \cdot (-1)$$

~~$\sin x \cdot \cos x (2\sqrt{2} + 1)$~~

$$\sqrt{2} \sin x \cdot \cos x + 2\sqrt{2} \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sqrt{2} = 0$$

$$(\sqrt{2} + 1) \sin x \cdot \cos x + 2\sqrt{2} \sin^2 x - \sqrt{2} = 0$$

~~$(\sqrt{2} + 1) \sin x \cdot \cos x + 2\sqrt{2} \sin^2 x - \sqrt{2} = 0$~~

~~$\sqrt{2} \sin x \cdot \cos x + 2\sqrt{2} \sin^2 x - \sqrt{2} = 0$~~

