



59-91-76-69
(117.1)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант _____

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ТЛБТ
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Генковское Пимона Романовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
59-91-76-69	105	21	0	21	21	21	21	X	X

Оценка 99 баллов.

$$2^Q = Q^2 + 3 = 2$$

$$2^Q + 1 = Q^2$$

2:3

$$Q^2 - 2^Q + 3 = 2^{Q-1}$$

$$Q^2 + 3 = 2^{Q-1} + 2^Q - 3 \cdot 2^{Q-1}$$

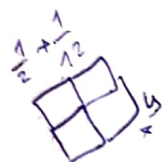
Черновик

$$2; 1; 2; 2^4; 2^9; 2^{16}$$

$$x \cdot 1 =$$

$$3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 2^{12}$$

$$x + (n-2)^2 = (n-3)^2 + (n-1)^2$$



$$x^2 + (x+2)^2 - (x+1)^2$$

$$x^2 + 3(x+2)^2 - 3(x+1)^2$$

$$(x+2)^2 - (x+1)^2$$

$$(x+2)^4 + (x+1)^4$$

$$(x+2)^2(x+1)^2$$

$$2x+3$$

$$601 \overline{) 13}$$

$$601 \overline{) 13}$$

$$601 \overline{) 13}$$

$$P \quad B \quad 61$$

$$x3 \quad x2 \quad x1$$

$$(x^2 + 4x + 4)^2 = x^4 + 16x^2 + 16 + 8x^3 + 32x + 8x^2$$

$$(x^2 + 2x + 1)^2 = x^4 + 4x^2 + 1 + 4x^3 + 2x^2 + 4x$$

$$2x^4 + 30x^2 + 17 + 12x^3 + 36x$$

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{34} + \frac{1}{56} + \dots$$

$$2$$

$$+ 2q + 1$$

Черновик

Тренировка

Задача 1.

~~Пустой~~ На курсе летит 1 пакет. $121 > 1, \Rightarrow$
 все пустые пакеты содержатся в других
 пакетах*. Добавление пакета в который летит
 другие пакеты, уменьшит значение пакетов
 не находящихся в других пакетах на 1
 - в нём содержится 5 пакетов, но он падает
 как пакет сам: $5 - 1 = 4$. Всего есть x
 пакетов с пакетами. Всего есть один
 пакет не находящийся в других пакетах,
 т.е. $101 - 4x = 1$.

$$4x = 100 \Rightarrow x = 25.$$

$$101 + 25 = 126. \text{ (всего пакетов)}$$

Ответ: всего 126 пакетов.

*. Будем добавлять к пустым пакетам
 заполненные пакеты.

Задача 3.

$$2^{p-1} : p \Rightarrow p^a - q^p + 3 : 2 \Rightarrow p^a - q^p \not\equiv 2.$$

Поскольку в $p^a - q^p$ не делится на 2, либо
 p^a , либо q^p - чётное (а второе нечётное -
 нечётное), т.е. либо p , либо $q = 2$, т.к. это
 ед. чётные простые числа, а $a^b : 2$ только если $a : 2$.

При $p = 2$:

$$2^a - q^2 + 3 = 2^1 \Rightarrow 2^a = q^2 - 1.$$

Докажем, что при $q \geq 4$, $2^a \geq q^2$.

База: это верно для $q = 4$: $2^4 = 4^2$.

Шаг индукции: Допустим, это верно для $q = k$. Тогда

для $k+1$:

$2^k + 2^k \vee k^2 + 2k + 1$. По п.к. $2^k \geq k^2$ по индукции
рассмотреть $2^k \vee 2k + 1$. $2^{k-1} > k$ при $k \geq 4$
 $\Rightarrow 2^k \geq 2k + 1, \Rightarrow 2^q \geq q^2$ при $q \geq 4. \Rightarrow$

$2^q > q^2 - 1$ при $q \geq 4$. т.к. $2^q = q^2 - 1$, q - либо 2
либо 3. $q=2$ не подходит, $\Rightarrow q=3 (2^3=8=3^2-1=9-1)$

при $q=2$:

$p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1}$. При $p \geq 4$, $p^{2-1} \geq 3$ и $2^p \geq p^2$

$\Rightarrow p < 4$, т.к. $p^2 + 3 = 2^{p-1} - 2^p \Rightarrow (p - \text{простое})$

p - либо 2 либо 3. $p=2$ не подходит,

а $p=3$ - подходит ($3^2 - 2^3 + 3 = 4 = 2^{3-2} = 2^1$).

Отметим: $p=2$ и $q=3$; $q=2$ и $p=3$.

Б. Задача 5.

$$b_4 = \frac{b_1 \cdot b_3^3}{b_2^3} = \frac{2 \cdot 2^3}{1} = 2^4$$

$$b_5 = \frac{b_2 \cdot b_4^3}{b_3^3} = \frac{1 \cdot 2^{4 \cdot 3}}{b_3^3} = 2^9$$

Докажем, что $b_n = 2^{(n-2)^2}$ для $n \geq 3$.

База: это верно для b_3, b_4 и b_5 .

Шаг индукции: допустим, это верно для

$n=k$, $n=k+1$, и $n=k+2$. Тогда для $n=k+3$:

$$b_{k+3} = \frac{b_k \cdot (b_{k+2})^3}{(b_{k+1})^3} = \frac{2^{(k-2)^2} \cdot 2^{k^2 \cdot 3}}{2^{(k-1)^2 \cdot 3}} = 2^{(k-2)^2 + k^2 \cdot 3 - 3 \cdot (k-1)^2}$$

$$2^{(k-2)^2 + 3(k-k+1)(k-k+1)} = 2^{k^2 - 4k + 4 + 6k - 3} = 2^{k^2 + 2k + 1} = 2^{(k+1)^2} = 2^{(k+3-2)^2}$$

$$\Rightarrow \text{Для } n=2023, b_{2023} = 2^{(2023-2)^2} = 2^{(2021)^2} = 2^{4084041}$$

Ответ: $b_{2023} = 2^{(2021)^2} = 2^{4042}$ Числовик

Задача 3.

Назовём левый нижний перекрёсток первым. Из всех остальных перекрёстков должна исходить (т.е. во из этого перекрёстка должна выходить дорога) как минимум одна дорога. Прямая одна дорога не может считаться исходящей из двух перекрёстков. Поскольку тогда, если ещё не будет исходящих из этих перекрёстков дорог, то из них не будет возможности добраться до других перекрёстков. Если же из перекрёстка не исходит ни одна дорога, то до него невозможно добраться.

* - исходящие дороги не ренжантируются
 x - кол-во проспектов, y - кол-во улиц, $\Rightarrow$
 xy - кол-во перекрёстков.

Т.е. если из всех перекрёстков на краях первого исходит дорога, то из первого перекрёстка нельзя добраться в любой другой. Т.е. минимально не ренжантируются xy-1 дорог. Если-Всего дорог $y(x-1) + x(y-1)$, $\Rightarrow$ максимум ренжантируются $y(x-1) + x(y-1) - xy + 1$ дорог. Пример: если улица № 23 полностью не ренжантируется, а также не ренжантируются все проспекты, то

не ремонтируется $x-1 + x \cdot (y-1) = xy-1$.

тогда ремонтируется ~~также~~ все
Остальные дороги ремонтируются,
то ремонтируется макс. возможное
кол-во дорог. $y(x-1) + x(y-1) - xy + 1 =$
 $2xy - x - y - xy + 1$. $x=10; y=23$.

$$460 - 230 - 10 - 23 + 1 = 231 - 33 = 198$$

Ответ: 198.

Задача 6.

Всего есть буквы: П×1; О×5; К×1; Р×3; И×1,
В×2; Б×1; Ь×1; Е×1; Ъ×2; Г×1.

Скажем, что если ~~Линия~~ будет зачеркивать
одну из след. букв: П; К; И; Б; Ъ; Е,
то ~~Линия~~ зачеркнет другую из этого
списка. Поскольку их четное кол-во,

на результат это не повлияет
(просто займет при ходе), поэтому
их можно не учитывать. ~~Второй ход~~
Второй ход ~~Линия~~ зачеркнет ~~Линия~~
тогда из букв осталось (П; К; И; Б; Ъ; Е
не считая, т.к. они не считаны).

О×6; Р×3; В×2; Ъ×2; Г×1.

Число
Далее если ~~Линия~~ зачеркнет Б, то ~~Линия~~
зачеркнет Р×2, и тогда если ~~Линия~~
зачеркнет Р×1, то ~~Линия~~ зачеркнет О×2,
а затем будет зеркально повторять ходы
Линии с другими буквами. Если же ~~Линия~~

~~зачеркнет x_2 любой буквы, которой где, то
Алиса все зачеркнет $P \times 1$ и будет зеркально
повторять ходы Боря. Если же Боря
зачеркнет x_1 буквы, которой где.~~

Числовик

Аналогично для B и $B \times 6$. Алиса будет 2
зеркально повторять ходы Боря. Если Боря
с этими двумя буквами (т.е. ~~Алиса~~ ^{Боря}
зачеркнула $B \times 1$, Боря зачеркнет $B \times 1$).
Остаются $O \times 6$; $P \times 3$; $G \times 1$. Тогда первым
ходом Алиса возьмет $O \times 4$, и останется
 $O \times 2$; $P \times 3$; $G \times 1$. Далее если Боря возьмет $G \times 1$,
Алиса возьмет $P \times 1$, и будет зеркально
повторять Боря с O и P ; если Боря
возьмет $P \times 1$, Алиса возьмет $G \times 1$, и 7
будет зеркально повторять Боря с O и P .
Если Боря возьмет $P \times 2$, Алиса возьмет
 $O \times 2$, и будет зеркально повторять Боря
с P и G ; если Боря возьмет $P \times 3$, Алиса
возьмет $O \times 1$, и будет зеркально повторять
Боря с O и G ; если Боря возьмет $O \times 1$,
то Алиса возьмет $P \times 3$ и будет зеркально
повторять Боря с O и G ; если Боря
возьмет $O \times 2$, то Алиса возьмет $P \times 2$
и будет зеркально повторять Боря с P и G .

Ответ: да, миса.

* - здесь и далее - возмёт = зачеркнёт
Задача?

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{399 \cdot 400} = \frac{1}{2} \text{ (зачеркнуто)}$$

601 - простое.

Григорьев