



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Патеев Ильнур Илдарович**

Класс: **7-8**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Патеев Ильнур Илдарович

Класс: 7-8

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	15 баллов	10 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	95 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

Чистовик

Задача 1

Пусть n - общее кол-во жителей,
1 случай $n \geq 8$.

Рассмотрим 2-ой утверждений.

Рассмотрим n жителей которые собрали наибольшее кол-во кокосов, тогда они сказали правду, и значит эти n человек лжецы. А для остальных найдутся n человек, которые собрали больше кокосов. Значит остальные сказали правду $\rightarrow$ значит остальные точно рыцари.

$$\text{кол-во лжецов} = n$$

$$\text{кол-во рыцарей} \geq 1$$

Рассмотрим 1-ое условие.

Рассмотрим 6 жителей, которые собрали наибольшее кол-во бананов, тогда они сказали правду, значит они ~~лжецы~~ рыцари, остальные же собрали, значит они лжецы.

$$\text{кол-во рыцарей} = 6$$

$$\text{кол-во лжецов} \geq 2$$

Получим единственный случай:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{кол-во рыцарей} = 6 \\ \text{кол-во лжецов} = 7 \end{array} \right\} \text{ где рыцари собрали наибольшее число бананов, а лжецы собрали наиб. число кокосов}$$

2 случай $n \leq 7$.

из 2-ого утверждения следует, что все жители лжецы, т.к. всего жителей $n \leq 7$. Значит все

Рассмотрим лжеца, который собрал больше всех бананов, но из 1-ого утв. следует, что он сказал правду, что противоречит условию. Значит лжецов = 0 и рыцарей = 0

Но будем считать, что на острове кто-то живет, тогда единств. ответ:

$$\text{Рыцарей} = 6, \text{ лжецов} = 7$$

Частовик
Задание 2

Пусть n - кол-во рабочих (она -
 v - скорость каждого рабочего (~~тогда~~ постоянна)
 t - время одного рабочего дня, тогда $\frac{t}{2}$ - половина
 k - кол-во рядов, которые вскопаны во 2-ой день

Тогда

$$n \cdot v \cdot t = 10 \text{ гр}$$

$$7 \cdot v \cdot \frac{1}{2}t = k \text{ гр}$$

Разделим 1-е уравн. на 2-ое уравн.

$$\frac{n}{7} \cdot 2 = \frac{10}{k}$$

$$\frac{n}{7} = \frac{5}{k}$$

$nk = 35$ где n, k - целые, положительные

(k целое, т.к. k - общее кол-во гр. - 10 гр, где общее кол-во
целое)

1) ~~$n=1, k=35$~~ - тогда

Заметим, что $n > 7$ (n - заболевшие = 7, где,
как я поняла, заболевшие > 0).
Но $35 : n$, тогда $n = 35$ - тогда $k = 7 = \frac{35}{n} = \frac{35}{35}$
(35 делится на 1, 5, 7, 35)

Тогда общее кол-во рядов $10 + k = 10 + 7 = 17$

Ответ: 17

Чисто вик
Задача 3

$$\overline{abc} - \overline{acb} = 100a + 10b + c - (100a + 10c + b) = 9b - 9c$$

$$9(b-c) : 72, \quad b-c \leq 9, \text{ т.к. } a, b, c \leq 9 - \text{цифры.}$$

$$\begin{cases} b=c \\ b-c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ b=8+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ \begin{cases} c=1 \\ b=9 \\ c=0 \\ b=8 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ c=0 \\ b=1 \\ c=1 \\ b=2 \\ c=2 \\ b=9 \\ c=9 \\ c=0 \\ b=8 \\ c=1 \\ b=9 \end{cases} \Rightarrow 12 \text{ вариантов}$$

Заметим, что это достигается при любом значении a , где $1 \leq a \leq 9 \rightarrow$ то есть 9 значений

$$\text{Тогда таких трехзначных чисел} = 9 \cdot 12 = 108$$

Ответ: 108

$$(x+y)(x+y+1) + 2y = 100$$

$$x^2 + yx + y^2 + y + x + xy + 2y = 100$$

$$x^2 + 2yx + y^2 + x + 3y = 100$$

$$(x+y)^2 + x + 3y = 100$$

Заметим, что $(x+y)^2 < 100 \rightarrow x+y < 10$, т.к. $x+y > 0$. (x, y - натур.)

То есть $x+y \leq 9$

Предположим, что $x+y \leq 8$, тогда

$$(x+y)^2 \leq 64 \Rightarrow 3y + x \geq 100 - 64 = 36$$

~~максимальное значение $3y + x = 3 \cdot 8 = 24$~~

Но $3y + x \leq 3 \cdot 7 + 1 = 22$ (т.к. x и y - натур.)

Противоречие

Тогда $x+y \geq 9$.

Но тогда $9 \geq x+y \geq 9 \Rightarrow x+y = 9$

$$9^2 + (x+y) + 2y = 100$$

$$81 + 9 + 2y = 100$$

$$2y = 10 \quad x = 9 - y = 9 - 5 = 4$$

$$\begin{cases} y = 5 \\ x = 4 \end{cases}$$

Проверка:

$$81^2 + 3 \cdot 5 + 4 = 100 \text{ - верно}$$

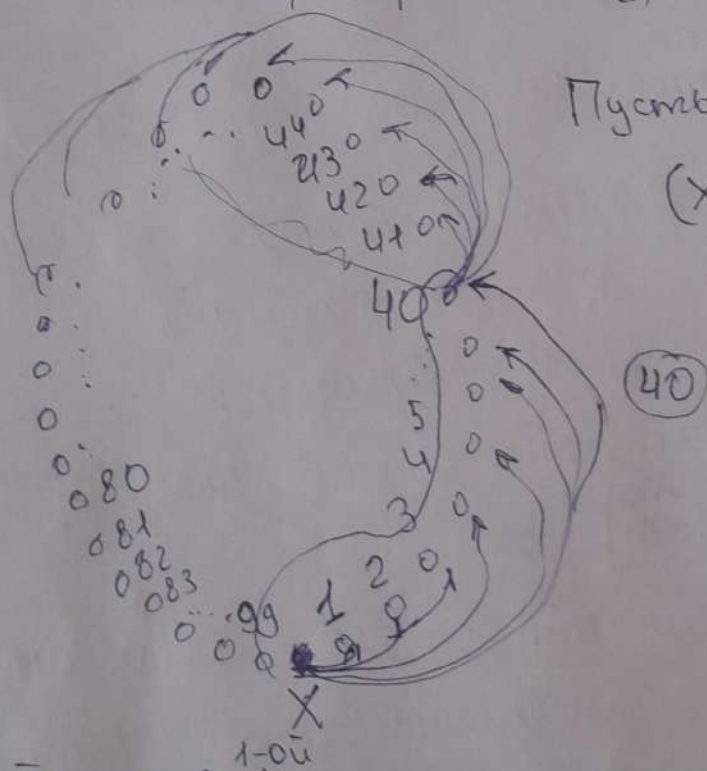
Получим, что это единственная пара

Ответ: $x = 4$; $y = 5$

Цастовик Задача 6

Для начала приведем пример для 1, 2, 3 прыжка, а далее, докажем, что от любой до любой планеты можно добраться не более чем за 3 прыжка.

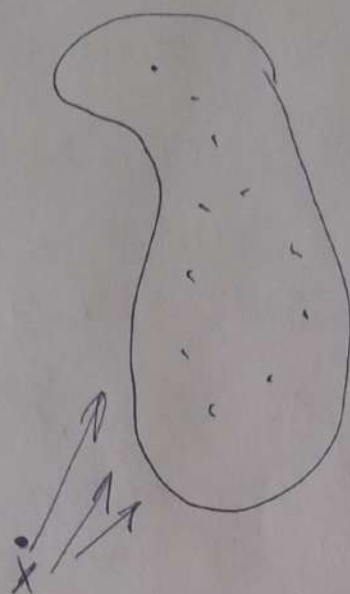
(Для примеров)
Рассставим планеты по кругу, так, что (от планеты) из каждой планеты ~~были~~ были порталы (туда).
В следующие 40 планет (по час. стр. по рисунку).



Пусть мы в планете X
(X - 100-ая планета по рисунку)

- 1) До соседней справа планеты мин. кол-во прыжков равно 1 (100-ая $\rightarrow$ 1-ая)
- 2) До 41-ой планет min кол-во прыжков = 2
(100-ая $\rightarrow$ 40-ая ; 40-ая $\rightarrow$ 41-ая)
- 3) До 99-ой планеты min кол-во прыжков = 3
(100-ая $\rightarrow$ 40-ая ; 40-ая $\rightarrow$ 70-ую ; 70-ая $\rightarrow$ 99-ую)

Оценка



пусть планет =
= вершины
а порталы =
ребра (ориентиро-
ванные)

Разобьем вершины (планеты) (кроме x) на 2 группы:

1 группа - те вершины в которые за x ход можно попасть ~~вз~~ из x . (40 вершин)

2 группа - остальные вершины (59 вершин)

~~Далее найдем min кол-во ребр от планет во 2 (от планет) 4 группы~~

Далее найдем min кол-во ребр от планет 1-ой группы в планеты 2-ой группы.

Для этого посчитаем max кол-во ребр от планет 1-ой группы в планеты 1-ой группы

Две планеты соединены только одним ребром (стрел).
Значит max знач., будет когда вершины 1-ой группы образуют полный граф.

Тогда посчитаем кол-во ребер: $\frac{40(40-1)}{2} = 790$

Заметим, что всего ~~из~~^{из планет} 1-группы выходит 40.40 - ребр^е, которые либо идут в планет 1-ой группы, либо в планет 2-ой группы.

~~40.40~~ Получим, что min кол-во ребр в планет 2-ой группы равно $40.40 - 39.20 = 20.41 = 40.20 + 20$

~~Значит из ребр~~ Заметим, что это значит, что из вершин

Заметим, что 40.20 + 20 ребр заходят как минимум в ~~40.40~~² вершину 2-ой группы.

То есть за не более, чем ^{за} 2 хода, мы можем добраться в 40 планет 1-ой группы и ²41 планету 2-ой группы. То есть ~~всего в 1 планету~~.

То есть всего в 61 планету. То есть не можем добраться за 2 хода не более, чем в 38 планет.

Предположим, что найдется планета в которую мы можем добраться не менее чем за ~~3~~⁴ хода - В эту планету можно добраться из 40 планет. Но заметим, что в хотя бы одну из этих 40 планет мы можем добраться за 2 хода (т.к. ~~не~~ за 2 хода нельзя добраться не более, чем в 38 планет)

Значит и в эту планету (которую мы предположили), можно добраться за 3 хода

Противовречие

Частовик

стр 7 из 12

Ч.Т.Д.

Черновик

$$x^2 + y^2 + 2xy + 3y + x = 100$$

$$x^2 + y^2 + xy + xy + y + y + y + x$$

$$(x+y)^2 + 3y + x$$

$$x+y \leq 10$$

$$x+y \leq 8$$

$$x+y \leq 5$$

$$64 + 3y + 24$$

$$x+y = 9$$

$$81 + 3y + x = 100$$

$$3y + x = 19$$

$$x+y = 9$$

$$2y = 14$$

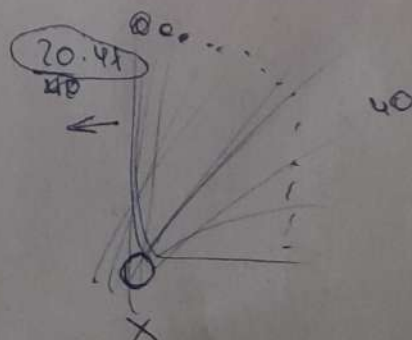
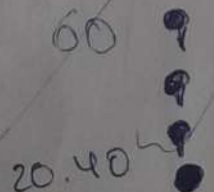
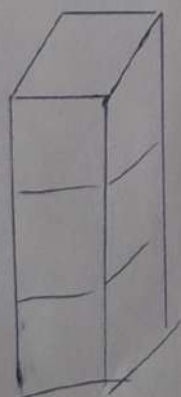
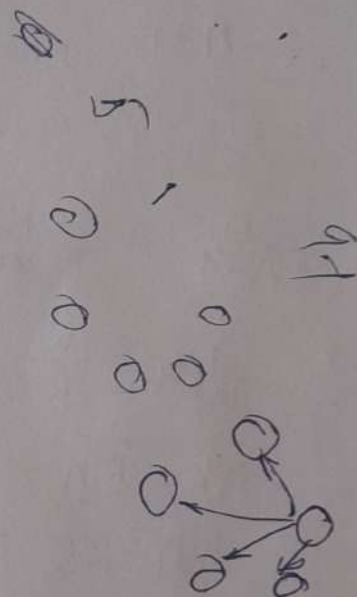
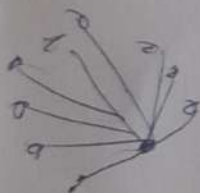
$$y = 7$$

$$x = 2$$

$$2y = 10$$

$$y = 5$$

$$x = 4$$

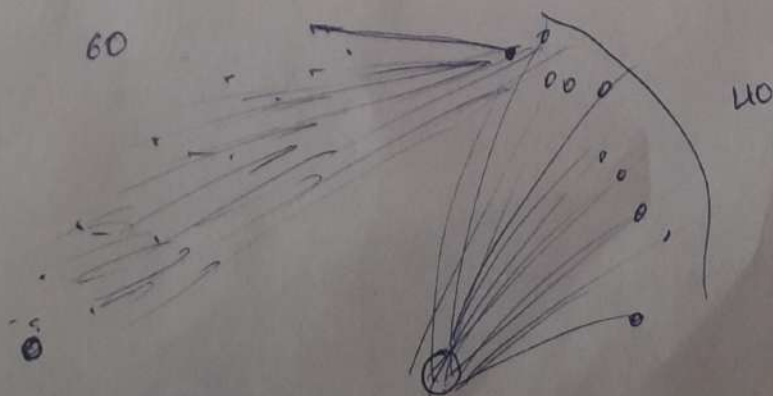
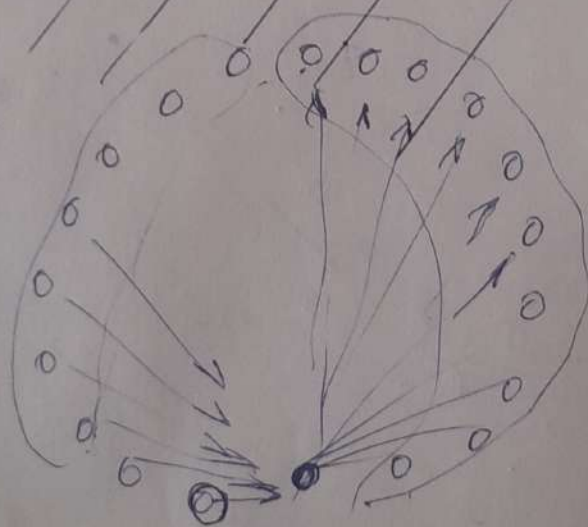
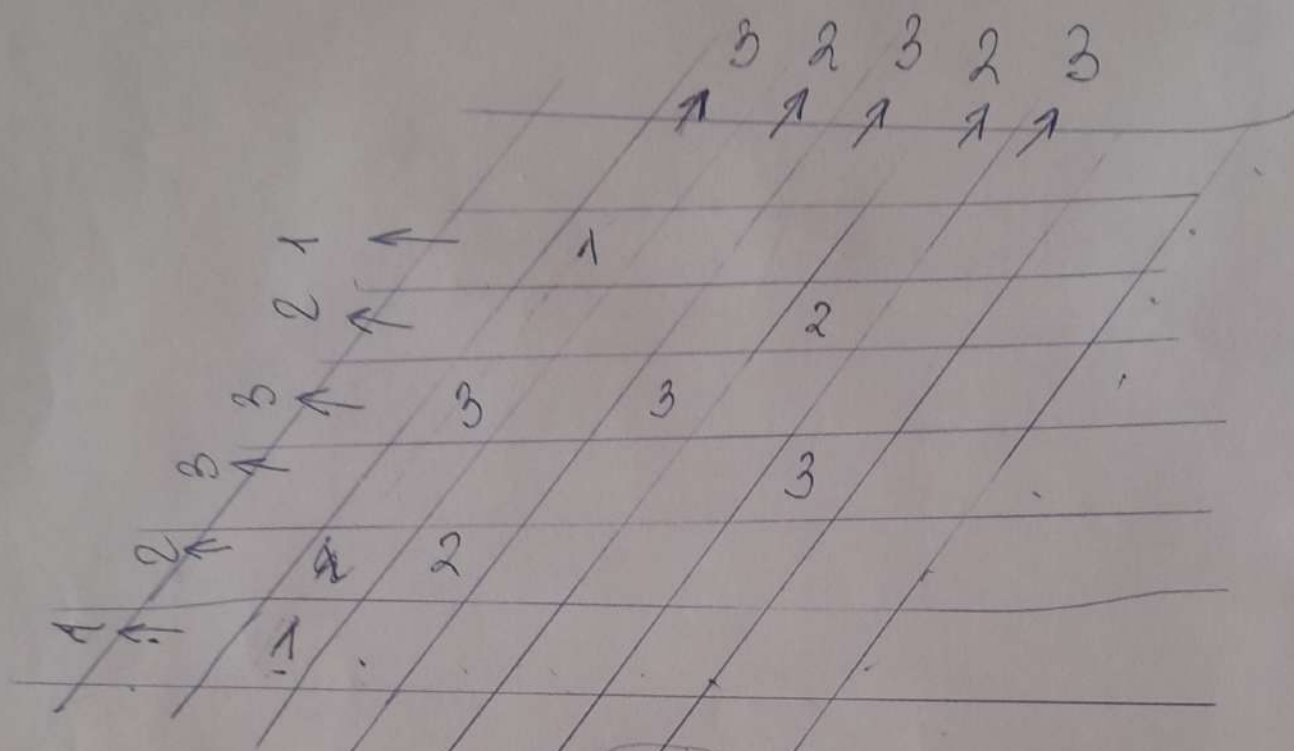


$$\frac{00.59 + 30.59}{2}$$

сmp 9 из 12

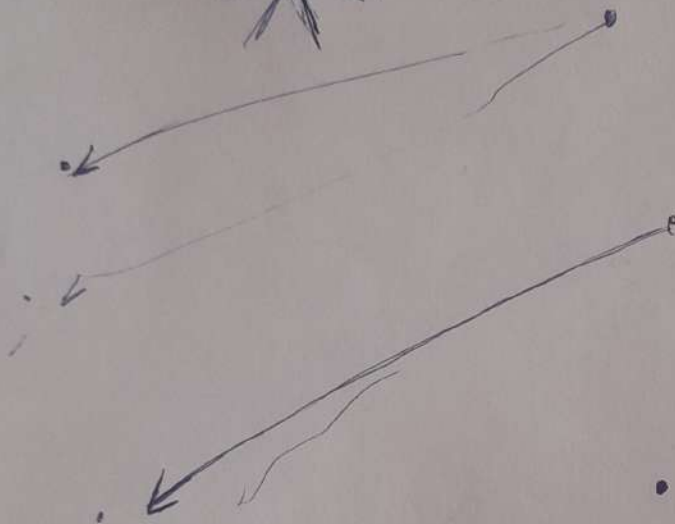
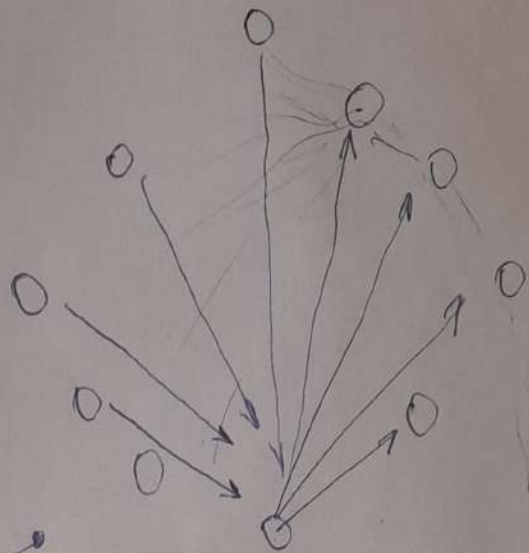
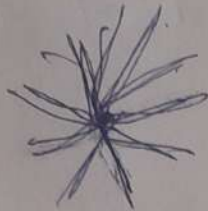
Черновик

0



Смп 11 из 12

Черновик



40 n
1

30
15

$$(60-n) \cdot 40 + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\frac{40 \cdot 40}{1600}$$

60

(n)

$$(60-n) \cdot 40 + \frac{n(n-1)}{2} \geq 40n$$

$$2400 - 40n + \frac{n^2 - n}{2} \geq 40n$$

$$n^2 - n - 160n + 2400 \geq 0$$

$$n^2 - 161n + 2400 \geq 0$$

400

$$n^2 + 2400 \geq 161n$$

$$n^2 + 150160 \geq 160n + 1$$



$$\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\frac{40 \cdot 39}{2} = 20 \cdot 39$$

$$20 \cdot 39$$

$$40 \cdot 40 - 20 \cdot 39$$

$$40 \cdot 40 - 20 \cdot 40$$

Emp 12 uz 12

Чистовик

Задача 5.

По виду сбоку видно что ~~баш~~ кол-во башен не менее 6.

(кол-во башен - и есть кол-во кубиков)
(которые видно сверху)

Предположим, что кол-во башен 6.

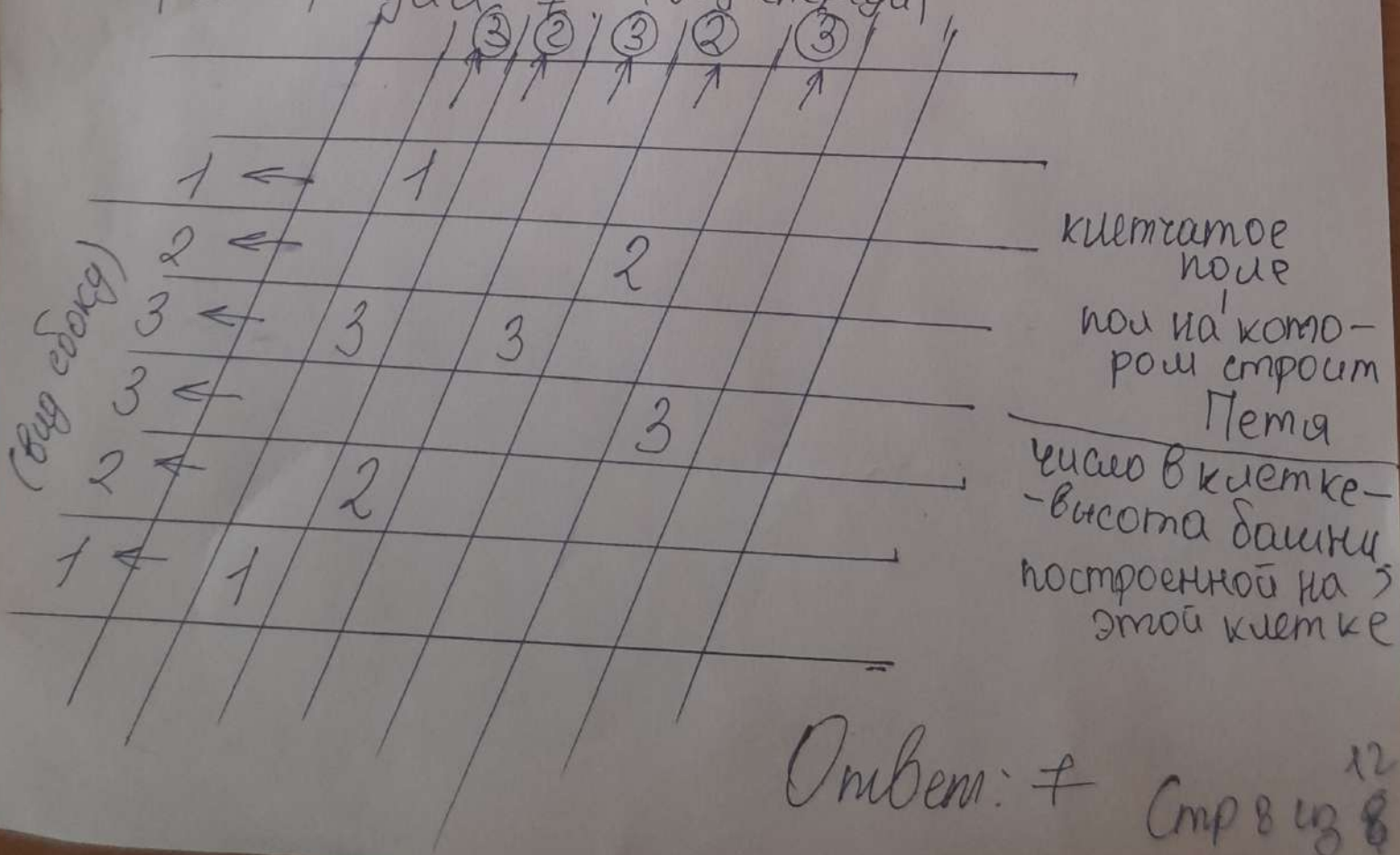
Тогда по виду ~~с~~ сбоку видно, что это башни ~~вы~~ с высотами: 3; 3; 2; 2; 1; 1.

Но по виду спереди видно, что кол-во башен высотой 3, не менее 3.

Противоречие.

~~Значит~~ Значит кол-во башен ≥ 7 .

Пример для 7 (вид спереди)



Ответ: $\neq$