



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Димитриева Мария Владимировна**

Класс: **7-8**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Димитриева Мария Владимировна

Класс: 7-8

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	10 баллов	95 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

Задача 11

1) Нет в ленте, кт собрал бананов больше, чем я"

Чтобы это была правда для рыцарей и лжи для ежиков, необходимо, чтобы наездник рыцарь содрал бананов больше, чем наездник ежик.

А чтобы это была правда для рыцарей, нужно, чтобы их было не более 6.

Но чтобы это была лопь для шпатель, нужно, чтобы он был не менее 6

Значит ~~и~~ рыцарей равно 6. (При условии, что кол-во собранных данков у всех разное.)
Тогда:

и тогда

$\underbrace{(P \ P \ P \ P \ P \ P)}_{\text{нес 6}}$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{если 6}}$

2) „Хотят бы у 7 жителей больше носов, чем у меня“

Чтобы это была правда для рыцарей и лань для ижецов, необходимо, чтобы каждый ижец содрал волосков больше, чем каждый рыцарь.

А чтобы это была польза для ~~людей~~ ^{людей}, нужно, чтобы их было не более 7.

Но чтобы это была правда для рыцарей, нужно именов данно не менее 7. Значит именов равно 7. (При условии, что кол-во собранных копий у всех разное.

Тыга.

рыцарі... $\underbrace{(\wedge)(\wedge)(\wedge)(\wedge)(\wedge)(\wedge)(\wedge)}_{\text{мат } 7}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{хоту ём 7.}}$

3) Знают рыцарей 6, а ижиков 7.

(P) (P) (P) (P) (P) (P) ($\wedge$) ($\wedge$) ($\wedge$) ($\wedge$) ($\wedge$) ($\wedge$) ($\wedge$)

Tonga все чисел $6+7=13$

Omber: 13 numari

Задача 2 Пусть x — кол-во бригад, работающих во II день.
 Пусть y — ~~наши~~ кол-во работников, заболевших COVID-19. Тогда: Чистовик 2

	A, бригад	t, дни	Общая, $\frac{cp}{\text{бриг. день}}$	Кол-во работников	Произ-ность 1 работника
I день	10	1	10	$7+y$	$\frac{10}{7+y}$
II день	x	0,5	$\frac{x}{0,5} = 2x$	7	$\frac{2x}{7}$

Тк во второй день работники работали с той же производительностью, что и в первый день, то составим и решим уравнение.

$$\frac{10}{7+y} = \frac{2x}{7}$$

$$2x(7+y) = 70$$

$$x(7+y) = 35$$

$$35 = 1 \cdot 35 = 35 \cdot 1 = 5 \cdot 7 = 7 \cdot 5$$

Ⓐ Если $x=1$, то $1(7+y)=35 \Rightarrow 7+y=35 \Rightarrow y=28$

Ⓑ Если $x=35$, то $35(7+y)=35 \Rightarrow 7+y=1 \Rightarrow y=-6$ — не у-т условию, т.к. кол-во работников — натуральное число

Ⓒ Если $x=5$, то $5(7+y)=35 \Rightarrow 7+y=7 \Rightarrow y=0$ — не у-т условию, т.к. условию несколько работников заболевших, кол-во работников — натуральное число

Ⓓ Если $x=7$, то $7(7+y)=35 \Rightarrow 7+y=5 \Rightarrow y=-2$ — не у-т условию, т.к. кол-во работников — натуральное число

Значит $\begin{cases} x=1 \\ y=28 \end{cases}$. Тогда во второй день работники выполнили 1 бригаду.

Значит на участке $10+1=11$ бригад.

Ответ: 11 бригад.

Задача 13

$$abc - acb : 72$$

$$72 = 8 \cdot 9$$

$$100a + 10b + c - (100a + 10c + b) = \underline{100a} + \underline{10b} + c - \underline{100a} - \underline{10c} - \underline{b} =$$

$$= 9b - 9c = 9(b - c) : 8$$

Значит, чтобы разность была кратна 72, нужно, чтобы $(b - c) : 8$.

Тк $b - c$ — цифры (однозначные числа), то:

$$|b - c| = 8 \Rightarrow$$

- Ⓘ $b - c = 8 \Rightarrow b = 8 + c$
- Ⓜ $b - c = -8 \Rightarrow b = c - 8$
- Ⓢ $b - c = 0 \Rightarrow b = c$

14 вариантов

- Ⓘ 1) Если $c = 0 \Rightarrow b = 8 \quad \begin{cases} b = 8 \\ c = 0 \end{cases}$
- 2) Если $c = 1 \Rightarrow b = 9 \quad \begin{cases} b = 9 \\ c = 1 \end{cases}$ } 2 варианта
- Ⓜ 1) Если $c = 8 \Rightarrow b = 0 \quad \begin{cases} b = 0 \\ c = 8 \end{cases}$
- 2) Если $c = 9 \Rightarrow b = 1 \quad \begin{cases} b = 1 \\ c = 9 \end{cases}$ } 2 варианта
- Ⓢ Если $b = c$, то
 - 1) $\begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} b = 3 \\ c = 3 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} b = 4 \\ c = 4 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} b = 5 \\ c = 5 \end{cases}$
 - 7) $\begin{cases} b = 6 \\ c = 6 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} b = 7 \\ c = 7 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} b = 8 \\ c = 8 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} b = 9 \\ c = 9 \end{cases}$

10 вариантов

Тк a — первая цифра числа, то $a \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ — 9 вариантов
Каждому варианту числа a соответствует какой-то вариант пары чисел b и c .

Значит всего вариантов ~~14~~ $14 \cdot 9 = 126$. Значит таких чисел 126.

Ответ: 126.

Задача 4

Числовик № 4

$$(x+y)(x+y+1) + 2y = 100$$

$$x^2 + xy + x + xy + y^2 + y + 2y = 100$$

$$x^2 + y^2 + 2xy + x + 3y = 100$$

$$(x+y)^2 + x + 3y = 100$$

$$(x+y)^2 < 100$$

Возможные варианты $(x+y)$:

$$1^2 = 1 \quad \text{---} \quad x+3y = 100 - 1 = 99$$

$$2^2 = 4 \quad \text{---} \quad x+3y = 100 - 4 = 96$$

$$3^2 = 9 \quad \text{---} \quad x+3y = 100 - 9 = 91$$

$$4^2 = 16 \quad \text{---} \quad x+3y = 100 - 16 = 84$$

$$5^2 = 25 \quad \text{---} \quad x+3y = 100 - 25 = 75$$

$$6^2 = 36 \quad \text{---} \quad x+3y = 100 - 36 = 64$$

$$7^2 = 49 \quad \text{---} \quad x+3y = 100 - 49 = 51$$

$$8^2 = 64 \quad \text{---} \quad x+3y = 100 - 64 = 36$$

$$9^2 = 81 \quad \text{---} \quad x+3y = 100 - 81 = 19$$

Максимальное $x+y=9 \Rightarrow$ максимальное $x+3y$ при максимальном $y=9 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x+3y = 0+3 \cdot 9 = 27$

Тк при всех вариантах, кроме $9^2=81$, $x+3y > 27$, то $x+y=9$.

Тогда $(x+y)^2=81 \Rightarrow x+3y=19$.

Тогда составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+3y=19 \\ x+y=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=10 \\ x+y=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=5 \\ x=9-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$$

Ответ: $(4; 5)$

Задача n 5



(1, 2, 3) — шаг

Сверху будут видны только кубы, на которых другие не стоят.

Чтобы было видно как можно меньше кубов, нужно, чтобы

как можно больше кубов на виду спереди и виду сверху совпало.

В каждой "строке" и "столбце" вида сверху будет виден хотя бы 1 кубик. Тогда найдем, что сверху будет видно 7 кубов.

Ответ: 7 кубов.

Числовые n 5

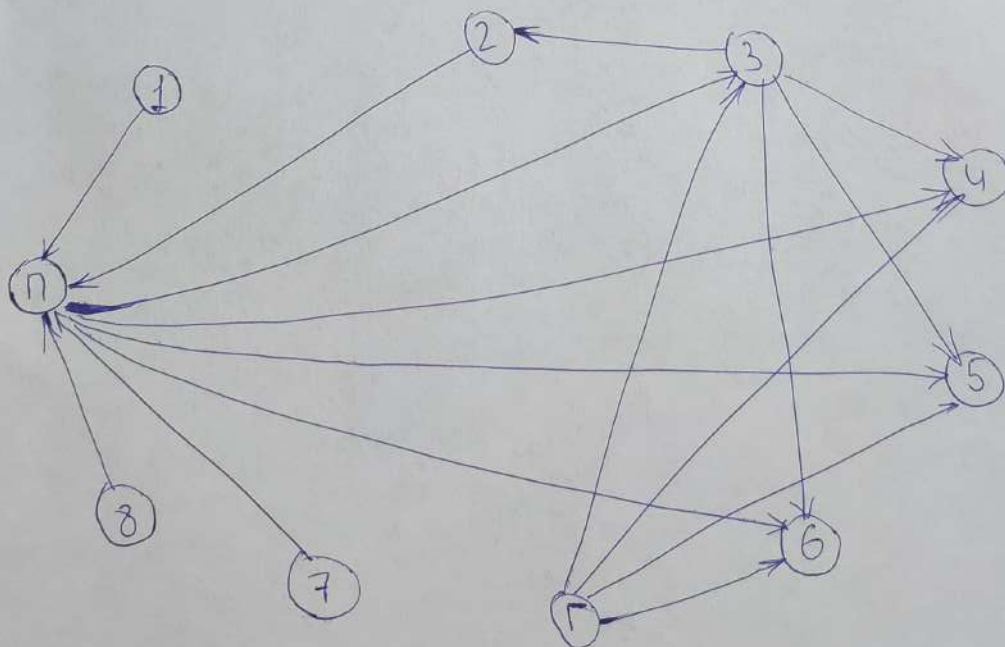
Задача 16

Числовый 16

- ① Если есть портал от Галамеев-37 на Пандору, то требуется 1 прыжок.
- ② Если такого портала нет, но есть планета, на которую есть портал с Галамеев и портал на Пандору. Тогда требуется 2 прыжка.
- ③ Худший случай.

Рассмотрим систему, где в 10 раз меньше количество планет и в 10 раз меньше количество порталов. Пусть на Пандору идут порталы с каких-то планет 1, 2, 7, 8, а от Пандоры — к планетам 3, 4, 5, 6. В худшем случае от Галамеев-37 пойдут порталы к планетам 3, 4, 5, 6. Тогда рассмотрим модуль из них, например планету 3. В худшем случае от нее пойдут порталы к планетам 4, 5, 6. Но ты должен быть ещё один (четвёртый) портал, но он не может идти ни к Пандоре, ни к Галамеев-37, то он пойдёт на какую-то из планет 1, 2, 7, 8. А с этих планет порталы идут к Пандоре. Тогда весь путь будет $\Gamma \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow \Pi$. Это 3 прыжка.

Больше прыжков не получится по доказательству.



Ответ: 1, 2, 3 прыжка.

Бағалар 11 жолдар

Чертотуу $n=7$

	A	L	$\mathcal{V}_{\text{res.}}$	Kor-b.	$\mathcal{V}_{\text{res.}}$
I жана	10	1	10	$x+7$	$(x+7)\mathcal{V}$
II жана	y	0,5	$\mathcal{V}$	7	7 $\mathcal{V}$
Бары	$y+10$	1,5			

$$\begin{cases} (x+7)\mathcal{V} = 10 \\ \text{7} \cdot 3,5 \mathcal{V} = y \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 14 \\ \hline 126 \end{array}$$

13) $abc - acb : 72 \quad 72 = 9 \cdot 8$

$$100a + 10b + c - (100a + 10c + b) = 100a + 10b + c - 100a - 10c - b = 9b - 9c = 9(b-c) : 9 \Rightarrow (b-c) : 8$$

① Егер $c=0$ $b=8$ $b-c=8$ $b=8+c$
 ② Егер $c=8$ $b=0$ $b-c=-8$ $b=c-8$
 ③ Егер $c=0$ $b=0$ $b-c=0$ $b=c$

$(b-c) : 8 \Rightarrow$ I) $b-c=8 \Rightarrow b=8+c$
 II) $b-c=-8 \Rightarrow b=c-8$
 III) $b-c=0 \Rightarrow b=c$

$a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ — 9 варианты

I) 1) Егер $c=0 \Rightarrow b=8$ $\begin{cases} b=8 \\ c=0 \end{cases}$
 2) Егер $c=1 \Rightarrow b=9$ $\begin{cases} b=9 \\ c=1 \end{cases}$ } 2 варианта

II) 1) Егер $c=8 \Rightarrow b=0$ $\begin{cases} b=0 \\ c=8 \end{cases}$
 2) Егер $c=9 \Rightarrow b=1$ $\begin{cases} b=1 \\ c=9 \end{cases}$ } 2 варианта

III) $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ } 10 вариантов

$$14 \cdot 9 = 126$$

Значит существует 126 разных чисел.

Ответ: 126.

$b=0$
 $c=8$
 900
 $100:8$
 $b=$

14 вариантов

14) $(x+y) \cdot (x+y+1) + 2y = 100$

Черновик 18

$$x^2 + xy + x + xy + y^2 + y + 2y = 100$$

$$x^2 + y^2 + 2xy + x + 3y = 100$$

$$(x+y)^2 + x + 3y = 100$$

$1^2 = 1$
$2^2 = 4$
$3^2 = 9$
$4^2 = 16$
$5^2 = 25$
$6^2 = 36$
$7^2 = 49$
$8^2 = 64$
$9^2 = 81$

~~100~~

Максимальное $x+y=9 \Rightarrow$ максимальное $x+3y=3 \cdot 8=27$

$\Rightarrow x+y$ может быть равно только 9 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (x+y)^2 = 81 \Rightarrow x+3y = 100 - 81 = 19 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3y=19 \\ x+y=9 \end{cases} \Rightarrow y=10 \Rightarrow y=5 \Rightarrow x=9-5=4$$

$$\text{Значит } \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases} \text{ Ответ: } (4; 5)$$

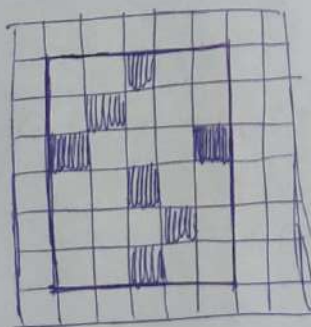
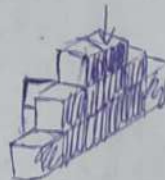
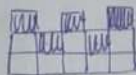
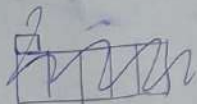
2) Если $x+y=1 \Rightarrow (x+y)^2=1 \Rightarrow x+3y=100-1=99$, но $x+y$ не натуральное $\Rightarrow$ невозможно

3) Если $x+y=2 \Rightarrow (x+y)^2=4 \Rightarrow x+3y=100-4=96$, максимальное $x+3y=0+3 \cdot 2=6 \Rightarrow$ невозможно

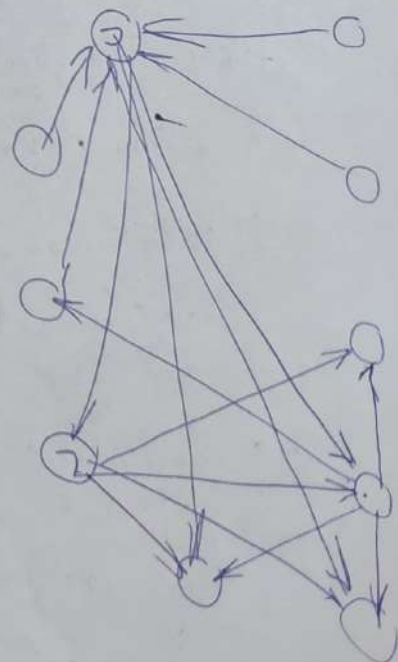
4) Максимальное $x+3y$ при $x+y=9 \Rightarrow x+3y=9 \Rightarrow x=9, y=0$

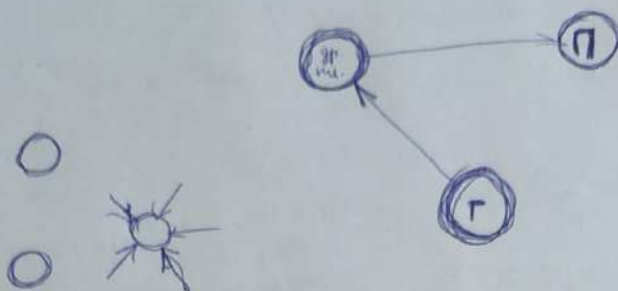
$x+3y=36 \Rightarrow x+y=8 \Rightarrow$ максимальное $x+3y=24$ не подходит

5)



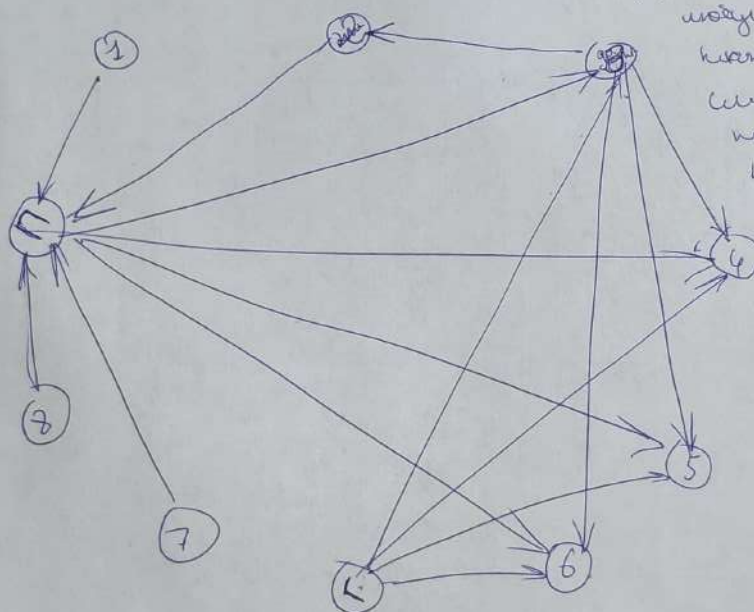
7 выходов





кб

- I Если есть портал от Галаксии - 37 до Пандоры: 1 прыжок
 II Если только порталов нет, но есть планета, на которой есть портал с Галаксией и портал на Пандору - 2 прыжка
 III Рассмотрим систему где в 10 раз меньше планет и в 10 раз меньше порталов. Пусть на Пандору идет портал с каких-то планет 1, 2, 7, 8, а от Пандоры - к планетам 3, 4, 5, 6. ~~Но если в худшем случае от Галаксии порталов нет и планет 3, 4, 5, 6. Тогда рассмотрим~~



можно увидеть, например, систему 3. В худшем случае от нее порталов порталов к планетам 6, 4, 5. Но те должны быть еще 2 портал, но они не могут идти ни в П, ни в Г, то он пойдет на какую-то из планет 1, 2, 7, 8.

А с этих планет порталы идут к П. Тогда весь путь будет: $Г \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow П$. Это 3 прыжка.

ответ: 1, 2, 3 прыжка.

Больше прыжков быть не может по доказательству.

1) Нет 6! ^{Тогда} ^{1. нечет.} $\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{5} \textcircled{6}$ ^{чет 6} Всего выигрышей 6!!!

Exerc 4 $P_1 \times P_2$ ~~est~~ P_1 ~~est~~ P_2 $(X_1 + X_2)$

2) Хоче бы у 7 мильеи Бавне понособ, чин
у алко.


 Амурсов 7

Черновик к 10

3) Знамен Рыцарей 6, палубов 7.

6: $x+5$ $x+4$ $x+3$ $x+2$ $x+1$ x $x-1$ $x-2$ $x-3$ $x-4$ $x-5$ $x-6$ $x-7$
 $(P) (P) (P) (P) (P) (P) (\wedge) (\wedge) (\wedge) (\wedge) (\wedge) (\wedge)$

 $k:$

Тога бео мислен $6+7=13$.

Ответ: 13 жителей.

(A2)

	A	t	$2 \times \left(\frac{2p}{\text{ген}} \right)$	ка-во	проц-нок
I ген	10	1	10	$\frac{1}{7+y}$	$\frac{10}{7+y}$
II ген	x	0,5	$\frac{x}{0,5} = 2x \frac{2p}{\text{ген}}$	7	$\frac{2x}{7}$

	A	+		
I	10	1	10	
II	x	0,5	2x	

$$\frac{10}{7+y} = \frac{2x}{7}$$

$$2x(7+y) = 70$$

$$14x + 2y = 70$$

$$7x + y = 35$$

③ Given ~~that~~ $y = 7 - x$
 $\Rightarrow x = 4$

② Exam $y = 14 \Rightarrow x = 3$

(iii) Given $y = 0.21 = 1 \times 2$

④ Kasus $y = 28 \Rightarrow 34 -$

$$\frac{10}{x+y} = \frac{2x}{7}$$

$$2x(7+y) = 70$$

$$14x + 2xy = 70$$

$$7x + xy = 35$$

$$x(7+y) = 35$$

$$35 = 1 \cdot 35 = 35 \cdot 1 = 5 \cdot 7 = 7 \cdot 5$$

$$\textcircled{I} \text{ Если } x=1 \Rightarrow 7+y=35 \Rightarrow y=28$$

$$\textcircled{II} \text{ Если } x=35 \Rightarrow 35(7+y)=35 \Rightarrow 7+y=1 \Rightarrow y=-6 \text{ не } y \in \mathbb{N}$$

$$\textcircled{III} \text{ Если } x=5 \Rightarrow 5(7+y)=35 \Rightarrow 7+y=7 \Rightarrow y=0 \text{ не } y \in \mathbb{N}$$

$$\textcircled{IV} \text{ Если } x=7 \Rightarrow 7(7+y)=35 \Rightarrow 7+y=5 \Rightarrow y=-2 \text{ не } y \in \mathbb{N}$$

~~V Если~~

Значит $x=1, y=28$. Значит во второй день работнику выплатили 1 прыжок. Значит в течение $10+1=11$ прыжков.

Ответ: 11.

$\times \frac{35}{7}$

Черновик n 11

$$\overset{(x+y)}{(x+y)}(x+y+1)+2y=100$$

последовательные числа

Замена $x+y=k$

$$k \cdot (k+1) + 2y = 100$$

$$k \cdot (k+1) \leq 100 \Rightarrow k = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$k+1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$2y \leq x+y$$

$$y \leq x$$

① Если $k=0 \Rightarrow x+y=0$

$$\int_2^{50}$$

Черновик n 12