



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Артемьев Александр Вячеславович**

Класс: **10-11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Артемьев Александр Вячеславович

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	0 баллов	80 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

Чистовик. Лист 4

Докажем. Поищем, что $\left(1 + \frac{1}{2021}\right)^{3(n-1)} \geq$

$$1 + \binom{3(n-1)}{1} \cdot \frac{1}{2021} + \binom{3(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{2021^2} + \dots + \binom{3(n-1)}{3(n-1)} \cdot \frac{1}{2021^{3(n-1)}} + \dots + \left(\frac{1}{2021}\right)^{3(n-1)} \geq 1 + \frac{3n-1}{2021} \stackrel{(!)}{\geq} 2021$$

Потому при $n: 1 + \frac{3n-1}{2021} \geq 2021 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2021}\right)^{3(n-1)} \geq 2021$

Достаточно взять $n: 1 + \frac{3n-1}{2021} \geq 2021 \Leftrightarrow$

$$3n-1 \geq 2021 \cdot 2020 \Leftrightarrow n \geq \left\lceil \frac{1 + 2021 \cdot 2020}{3} \right\rceil$$

при таком $n: |a_n| \leq \frac{2022}{2021}$

н 5) $(SAB) \cap (SAC)$ - прямое
с другой стороны вектор
нормали к (ABC)

в точке A в (SAB)
и (SAC) в силу их перпендику.

$(ABE) \Rightarrow SA$ - прямое

пересекающие $\parallel$ вектор нормали

т.е. $SA \perp (ABE)$ Пусть сфера

пересекает SC в M AE в N

SB в $\triangle ASB$ по т. Пифагора: $SB^2 = 2AB^2 = 8 \Rightarrow$

$SB = 2\sqrt{2}$ и в $\triangle ABC: AC = 2\sqrt{2}$ Тогда искомым

$V = V(SABN) + V_{сферы}(SMNB); V(SABN) =$

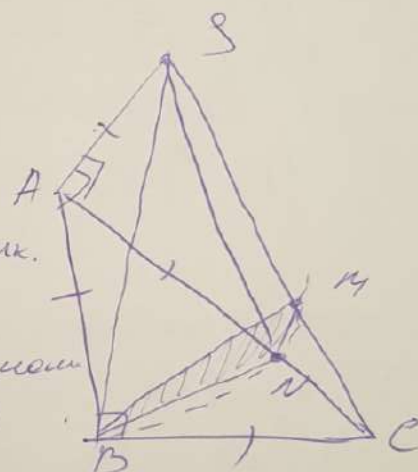
$\frac{SA \cdot S(ABN)}{3}$ Найдём $S(ABN)$ т.к. $SN = SM = AC =$

$= SB = 2\sqrt{2} \Rightarrow$ в $\triangle SAN: AN^2 = SN^2 - SA^2 = 8 - 4 = 2^2$

$\Rightarrow AN = 2 \Rightarrow S(ABN) = \frac{AB \cdot AN \cdot \sin 45^\circ}{2} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow V(SABN) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ Теперь найдём V части

сферы т.е. $V_{сф}(SMNB)$



Чистовик. Лист 3

Если $a=4$ $b=5$ $4\cos 2\alpha - 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow 4\cos^2 \alpha = \frac{9}{4} \Rightarrow$

α -острый т.к $2\alpha = \angle APC < 180$
 $\cos \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ Тогда по т. синусов

для $\triangle ABD$: $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin \alpha} = \frac{4}{2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{8}{\sqrt{7}}$

Почему вообще такой теты радиусов $\exists$: Возьмем окр. с $R = \frac{8}{\sqrt{7}}$ отнесем хорду длиной 4 от нее в 2 стороны еще 2 хорды длиной 4 тогда

они будут хордами длиной 5 B'
 т.е. хорда должна быть длиной 5 B'
 по т. синусов $\frac{A'D'}{\sin \beta} = \frac{B'C'}{\sin \alpha} = 2R$

$\sin \beta = \sin 3\alpha \Rightarrow A'D' = 2R \cdot \sin 3\alpha = 5$ т.к.

в нашей конструкции $\sin \alpha = \frac{(2R)^{-1} - \left(\frac{16}{4\sqrt{7}}\right)^{-1}}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\right)^{-1}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$
 тогда $R = \frac{8}{\sqrt{7}}$ $A'D' \cdot \sin 3\alpha = (4\cos^2 \alpha - 1) \sin \alpha$

Ответ: $\frac{8}{\sqrt{7}}$

$\sin 3\alpha = \left(\frac{9}{4} - 1\right) \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{2\sqrt{7} \cdot 5}{16}$
 $2R \cdot \frac{2\sqrt{7} \cdot 5}{16} = 5$

4) Рассмотрим последовательность $v_n = a_n - 1$

Тогда если $a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n \Rightarrow a_{n+1} - 1 =$

$= a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n - 1 \Leftrightarrow v_{n+1} = (a_n - 1)^3 = v_n^3$ $v_1 = a_1 - 1 =$

$= \frac{2021}{2022} \Rightarrow v_n = v_1$ Тогда $\exists$ и a_n : $|a_n| \leq$

$\frac{2022}{2021} \Leftrightarrow \exists$ и n : $|v_{n+1}| \leq 1 + \frac{1}{2021} \Leftrightarrow$

$\frac{2022}{2021} \Leftrightarrow \exists$ и n : $|v_{n+1}| \leq 1 + \frac{1}{2021} \Leftrightarrow$

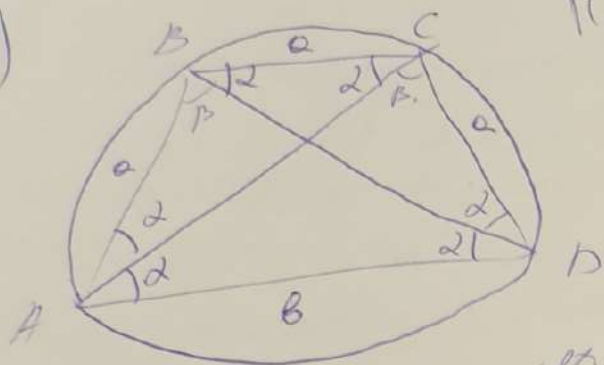
Ответ: го ведь $v_1 < 1$, и $v_1^{3(n-1)} \leq \frac{1}{2021}$

$|v_1^{3(n-1)}| \leq \frac{1}{2021} \Leftrightarrow \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3(n-1)} \leq \frac{1}{2021} \Leftrightarrow 2021 \leq \left(\frac{2022}{2021}\right)^{3(n-1)} \Leftrightarrow$

$2021 \leq \left(1 + \frac{1}{2021}\right)^{3(n-1)}$ Рассмотрим функцию $f(n) = \left(1 + \frac{1}{2021}\right)^{3(n-1)}$

Тестовик. Лист 2

3)



Пусть $AB=BC=CD=a \in \mathbb{N}$
 $AD=b$

$$\angle CAD = \alpha \Rightarrow \angle BAC = \angle CBD =$$

$$= \angle BCD = \angle BDA = \angle BDC = \alpha$$

т.к. опираются на хорды a

$$\angle ABD = \angle ACD = \beta$$

опираются на хорды b

$$\text{по т. синусов:}$$

$$\angle ABC + \angle ADC = 3\alpha + \beta = 180 \Rightarrow \beta = 180 - 3\alpha$$

$$\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{b}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(180 - 3\alpha)} = \frac{a}{\sin 3\alpha}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos 2\alpha}{\sin \alpha} = \cos 2\alpha + 2\cos \alpha = 3\cos \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 4\cos^2 \alpha - 1 = \frac{b}{a}$$

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 2\alpha, \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 =$$

$$= \left(\frac{b}{a} + 1\right) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \left(\frac{b+a}{2a}\right) =$$

$$= a^2 + b^2 - b^2 - ab = a(a-b)$$

$$\cos^2 \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{b}{a} \leq 4 - 1 = 3 \Rightarrow b \leq 3a$$

$$\text{если } a=1, 2, 3 \Rightarrow \text{возможны } (1, 2); (1, 2, 3, 4, 5); (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$$

$$a(a+b) \text{ для } (a, b) = (1, 1) \text{ и } (1, 2) \Rightarrow x^2 = 2 \text{ или } 3 - \text{не квадраты}$$

$$\text{для } a=2 \Rightarrow x^2 = 2 \cdot 3 \text{ или } 2 \cdot 4 \text{ или } 2 \cdot 5 \text{ или } 2 \cdot 6 \text{ или } 2 \cdot 7 - \text{это не}$$

$$\text{квадраты, где } a=3 \Rightarrow x^2 = 3(3+b) \Rightarrow b=3 \text{ или } 4 \text{ или } 5 \text{ или } 6 \text{ или } 7 - \text{это не}$$

$$\text{квадраты, где } a=4 \Rightarrow b=1, 2, 3, 4 \text{ не подходит}$$

$$x^2 = 4 \cdot 5 \text{ или } 4 \cdot 6 \text{ или } 4 \cdot 7 \text{ или } 4 \cdot 8 - \text{не квадраты, } a=5$$

$$\text{подходит } \Rightarrow x^2 = 4(4+5) = 36 \text{ тогда периметр } = 4 \cdot 3 + 5 = 17$$

$$\text{А если } a \geq b \Rightarrow P \geq 3a \geq 18 \text{ если } a=5$$

$$\Rightarrow P \geq 15+b \text{ } b=1 \text{ и } b=2 \text{ не подходит, } 5(6) \neq x^2$$

$$b \geq 3 \Rightarrow P \geq 18 \text{ тогда искомым ABCD со сторонами 4 и 5}$$

Вариант 11-1 Чистовик. Лист 1

1) Рассмотрим число 2079 до него число от 6 до 2078 т.е $2078-5=2073$ число, еще мы вытеркнули число $3^2, 4^2, 5^2 \dots 45^2$, ведь $45^2=2025$, а $46^2=2116 > 2079$ т.е мы еще вытеркнули $45-2=43$ число это квадраты. И еще мы вытеркнули число $x^3: 2^3, 3^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 10^3, 11^3, 12^3$ (4^3 и 9^3 — это квадраты мы их уже вытеркнули) $12^3=1728 < 2079$, а $13^3=2197 > 2079$ т.е еще x^3 мы вытеркнули. Итого через 2079 число: $2073-43-9=2021$; Тогда через 2079 число: $2073-53+1=2021$ число $\Rightarrow 2079$ не 2021-е число

Ответ: 2079.

$$2) (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50}\right)$$

$$\frac{1}{4\cos 40} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50} = \frac{\frac{1}{2}\cos 50 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40}{2\cos 40 \cos 50} = \frac{\sin 30 \sin 40 + \cos 30 \cos 40}{2\cos 40 \sin 40}$$

$$= \frac{\cos(40-30)}{2\sin 80} = \frac{\cos 10}{\sin 80} = 1 \Rightarrow \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50}\right) = \arccos(1) = 0$$

Тогда кер-во $\Leftrightarrow (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq 0$. Или $x=2 \Rightarrow \arccos(x-1)=0$ либо $\arccos(x-1) \leq 0$. Или $x=2 \Rightarrow \arccos(x-1)=0$ либо $\arccos(x-1) \leq 0$.

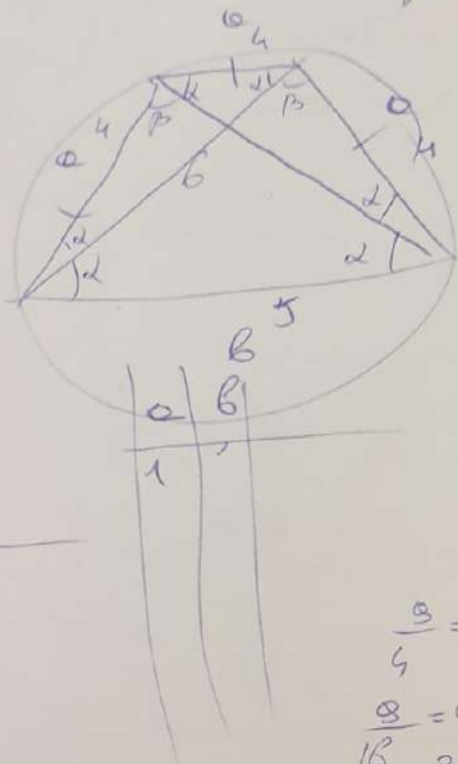
$\alpha: \cos \alpha = x-1$ и $\alpha \in (0; \pi]$ т.е $\alpha > 0$ и не знак не вынес. и раз $\arccos(x-1)$ определен $\Rightarrow x-1 \in [-1; 1] \Rightarrow x \in [0; 2]$. Тогда кер-во равносильно

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 \leq 0 \Leftrightarrow 4x^2(2x+1) - 9(2x+1) \leq 0$$

$$(2x-3)(2x+3)(2x+1) \leq 0 \quad x \in [0; 2] \Rightarrow \begin{matrix} 2x+3 > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$2x-3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$. Значит при $x \in [0; \frac{3}{2}]$ и $\{2\}$ кер-во верно.

Чепкован



$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \in \mathbb{Z}$$

$$2ab \cos \alpha \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin 3\alpha} \quad \frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos 2\alpha}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{\sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha \sin \alpha + \cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{b}{a} = 4 \cos^2 \alpha - 1 \in (0, 3)$$

$$a = 3$$

$$b \leq 30$$

$$\frac{a}{b} = 4 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\sqrt{2}$$

$$b = 1 \text{ min}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \quad 2 \quad \frac{5}{2} \quad \frac{6}{2} \quad \frac{7}{2}$$

$$a = 2$$

$$\frac{b+3}{3}$$

$$b < 9$$

$$\frac{a+2}{2}$$

$$b < 7$$

$$\frac{b}{a} = 4 \cos^2 \alpha - 1 =$$

$$b = 5$$

$$a = 4$$

$$b < 30$$

$$\cos^2 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$3(3+3) \quad 4(4+5)$$

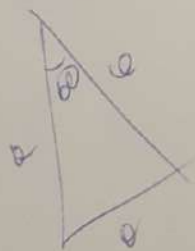
$$\frac{b-1}{2}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{4 \cdot 4}{\sqrt{71}}$$

$$\cos 3\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{71}}{16} = \frac{\sqrt{71}}{4}$$



$$\sin 3\alpha = \frac{3}{4} - 1$$

Черновик.

Черновик

$$Q_1 = \frac{4043}{2022}$$

$$Q_{n+1} = Q_n^3 - 3Q_n^2 + 3Q_n$$

$$b_1 = \frac{2021}{2022}$$

$$Q_{n+1} - 1 = \dots - 1 = (Q_n - 1)^3$$

$$b_n = Q_n - 1$$

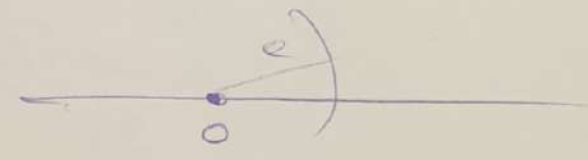
$$b_{n+1} = b_n^3$$

$$b_1 = 1 + b_n = \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^k} + 1 = Q_n$$

$$Q^n \leq \frac{1}{2021}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2021} \geq \left(\frac{2021}{2022}\right)^k + 1 = Q_n - \frac{2022}{2021} Q \leq \left(\frac{1}{2021}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Q^n

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon^k = 0$$


$$2022^k \geq 2021^{k+1} \quad \cdot \quad \frac{2021^{2021}}{2021} \geq \frac{2022^{2022}}{2021^{2021}}$$

$$2021 \leq \frac{2022}{1}$$

$$\varepsilon^k < Q$$

$$Q^n = (Q - 1 + 1)^n$$

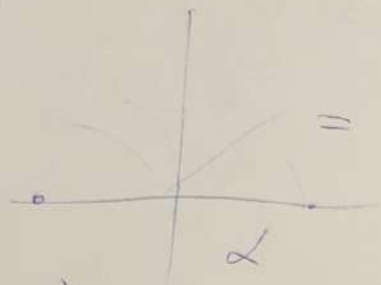
$$\left(\frac{2022}{2021}\right)^k \geq 2021 \quad Q^n =$$

$$\left(1 + \frac{1}{2021}\right)^k = 1 + \frac{C_k^1}{2021} + Q = 1 + \frac{k}{2021} \geq 2021$$

$$k \geq 2021^2 - 1$$

Черновик

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \geq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50}\right)$$



$$\frac{\sin 40 \sin 30 \cos 30}{\cos 50 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 40} = \frac{2 \cos 40 \cos 50}{\sin 40} = -\cos(10)$$

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos(40-30) \quad x \in [-1; 1]$$

$$0 \dots \pi \quad \frac{\cos 80}{\sin 80} = 1 \quad x \in [0; 2] \quad x=2$$

$$\frac{a}{b} = \frac{4 \cos^2 \alpha - 1}{64} \quad 8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 \leq 0$$

$$x-1 = 1+2\pi$$

$$x = 2+2\pi$$

$$\arccos(x) = \alpha$$

$$\cos \alpha = x$$

$$x = \pm \frac{3}{2} \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 3\alpha$$

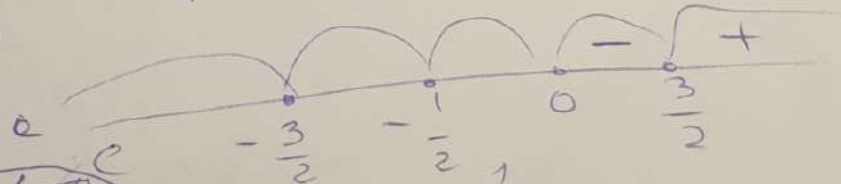
$$\sin 2\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos 2\alpha = x^2(2x+1) - 9(2x+1)$$

$$2\cos^2 \alpha + \cos 2\alpha (4x^2 - 9)(2x+1) \leq 0$$

$$3\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha (2x-3)(2x+3)(2x+1) \leq 0 \quad [0; \frac{3}{2}]$$

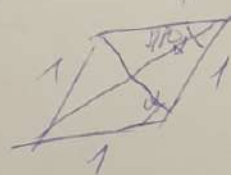
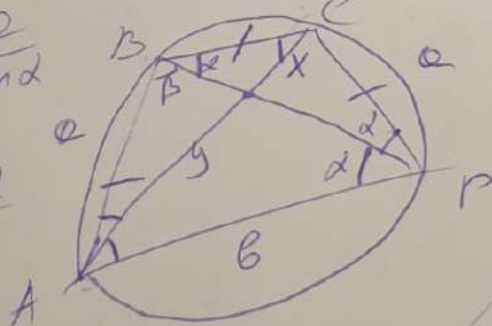
$$4\cos^2 \alpha - 1$$

$$3\alpha + \beta = 180$$



$$\frac{b}{a} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$$



$$1^2 = 2 - 2\cos \alpha$$

$$y^2 = 2 + 2\cos \alpha \quad \cos \alpha \geq \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 90$$

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \sqrt{\frac{a}{b} + 1}$$

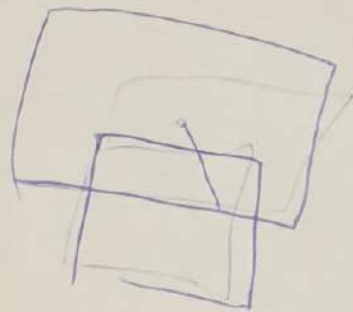
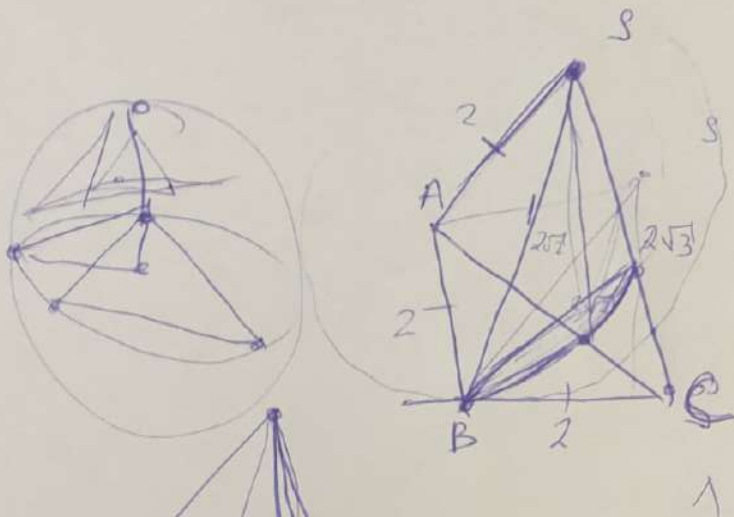
$$\frac{1+k}{k} \quad \frac{2+b}{b} \quad \frac{b+1}{b} \quad \frac{a}{b} + 1 = 4\cos^2 \alpha$$

$$3 = \frac{a}{b} = 4\cos^2 \alpha - 1$$

$$\frac{a}{b} = 6$$

$$b=1 \quad a=3$$

Церковик.



4
8

$$\frac{4\pi R^3}{3} - \frac{\pi R^3}{6}$$

