



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Мухаметшин Тагир Ильшатovich**

Класс: **9**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Мухаметшин Тагир Ильшатович

Класс: 9

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	100 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

I день
 трава 10
 люди X

№1 (Частовик)
 II день
 $y = \frac{35}{x}$
 7

(1)

Заметим, что, по условию люди работали половину второго дня, с такими же скоростью, как и в 1 день:

Значит, в первый день каждый вскопал $\frac{10}{x}$ грядок, а во второй, т.к. работали половину дня - каждый вскопал $\frac{10}{x} : 2 = \frac{5}{x}$ грядок; $\frac{5}{x} \cdot 7 = \frac{35}{x}$ грядок во второй день.

Теперь заметим, что они вскопали несколько целых грядок $\Rightarrow$ грядок натуральное число (всего)

$\Rightarrow \frac{35}{x} \in \mathbb{N}$, но и людей из здравого смысла - натуральное число, причем большее 7, т.к. некоторые забили (хотя бы 1)
 $x > 7$; $\frac{35}{x} \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{N}$ - натуральное

Дел-ли 35: (1, 5, 7, 35) $\Rightarrow$ получим, что X может быть равен только 35 $\Rightarrow$ грядок во второй день $\frac{35}{35} = 1 \Rightarrow$ всего вскопали $10 + 1 = 11$ грядок.

Проверим:

ч. 10 1
 л. 35 7

$\frac{10}{35}$ - каждый вскопал в I дни (весь день)

$\frac{2}{7}$; $\frac{1}{7}$ - каждый вскопал за половину II дня.

$\frac{2}{7} : \frac{1}{7} = 2 \Rightarrow$ всё ок-ся.

11 гр-к.
 35 людей

Ответ: 11 грядок

Частовик

1 из 7

Задача № 2

(2)

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c$$

$$\overline{abc} - \overline{acb} = 100a + 10b + c - 100c - 10a - b = 99a - 9b - 99c = 9(b-c)$$

$$9(b-c) : 72$$

$$72 = 9 \cdot 8 \Rightarrow b-c : 8$$

т.к. b и $c \rightarrow$ цифры, значит $b-c \rightarrow$ однозначное

$$\Rightarrow b-c = 0 \text{ или } b-c = \pm 8$$

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

8	0
0	8
9	1
1	9

$\rightarrow 4$ вар-а

10 вар-ов

$$\text{всего } 10+4=14$$

т.к. разность не зависит от a ,
то a - любое $\in \mathbb{N}$
от 1 до 9

т.к. на каждый вариант цифры a , то всего

$$\text{чисел } 9 \cdot (10+4) = 9 \cdot 14 = 126$$

числа имеют вид
 $\overline{abc}$ или $\overline{acb}$
 $a \neq 0$ или $a \neq 0$

$$a \cdot x \cdot x - a \cdot x \cdot x = 0 : 72$$

$$\overline{abc} - \overline{acb} = \pm 72$$

$$a80 - a08 = 72$$

$$a08 - a80 = -72$$

$$a91 - a19 = 72$$

$$a19 - a91 = -72$$

Ответ: 126 чисел $\rightarrow \overline{abc}$ (если считать, что имеют вид $\overline{abc} - \overline{acb}$)

* (если $a, b, c \rightarrow$ разными, то вариантов

$$a80 \rightarrow 8 \text{ вар-ов (} a \neq 0, 8)$$

$$a08 \rightarrow 8 \text{ вар-ов (} a \neq 0, 8)$$

$$a91 \rightarrow 7 \text{ вар-ов (} a \neq 9, 1, 0)$$

$$a19 \rightarrow 7 \text{ вар-ов (} a \neq 9, 1, 0)$$

30 вар-ов

из 7

Чистовик
N.3

сумма двух натуральных - натуральное

3

$$(x+y)(x+y+1)+y=2022$$

$$x, y \in \mathbb{N}$$

(тогда $x+y+1 \geq 46$)

Посмотрим на сумму $x+y$, заметим, что если $x+y \geq 45$, то исходное выражение $\geq 45 \cdot 46 + y = 2070 + y$, т.к. $y \in \mathbb{N}$, то

$> 2022 \Rightarrow \emptyset$; Также заметим, что если $x+y \leq 43$, то

$$(x+y)(x+y+1)+y \leq 43 \cdot 44 + y = 1892 + y, \text{ а т.к. } x \in \mathbb{N}, \text{ то}$$

$y \leq 42$ (т.к. $x+y \leq 43$ в этом сл-е), а значит исходное в-ие

$$\leq 1892 + 42 = 1934 < 2022 \Rightarrow \emptyset \quad \text{Значит } x+y < 45,$$

$$x+y > 43 \Rightarrow x+y=44, \text{ тогда:}$$

$$44 \cdot 45 + y = 2022$$

$$1980 + y = 2022$$

$$y = 42, x = 44 - 42 = 2$$

$$(42+2)(42+2+1)+42=2022 \quad \checkmark$$

Значит одно решение при $x, y \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=42 \end{cases}$$

Ответ: $x=2$; $y=42$.

Чистовик

3 см 7

№.4

Чистовик

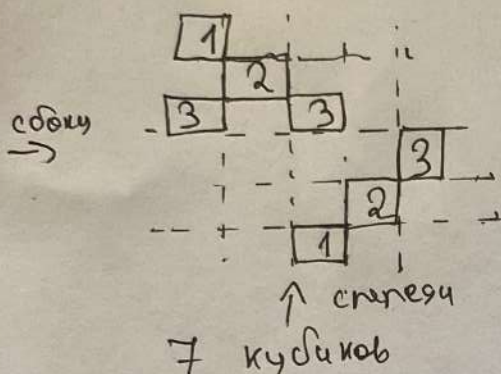
④

Ответ: 7

Оценка: Если 6 или ^(не 4!) меньше, то смотря собою понимаем, что столбиков равно 6 (хотя бы 1 столбик в ряду), но тогда столбцов () выстроили три по рисунку вида собою $\rightarrow$ $\rightarrow$ равно две ~~штуки~~ ^(штуки), что противоречит рисунку "вид спереди" $\Rightarrow$ (на вид спереди - 3 столба высоты три) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ кубиков "сверху" ≥ 7 .

Пример:

Цифры - это какой высоты столбик



вид собою 1 2 3 3 2 1 ✓

вид спереди 3 2 3 2 3 ✓

Пример работает, т.к. сверху видны 7 кубиков, собою видим высоту 1, 2, 3, 3, 2, 1 как в ул-ии, спереди видим 3 2 3 2 3 как в условии

⊗ - т.к. на рисунке вида собою $\rightarrow$ 6 столбцов, а если сверху видим 7 кубиков, то все кубики сверху от-тот эти 6 столбцов. (т.е. в каждом ряду - один столбец)

4 ^{ой} из 7

Чистовик

$$x^2 + ax + 2022$$

$$D = a^2 - 4 \cdot 2022$$

№5 Цистовик

Корни есть, когда $a^2 \geq 4 \cdot 2022$

$$D \geq 0$$

5

$$a^2 \geq 8088$$

$$a \geq 90$$

т.к. целые.

Выяснив, что $a \geq 90$ только при
есть корни, осталось посчитать
сумму при a от 90 до 99.

$$\begin{array}{r} 89 \\ \times 89 \\ \hline 801 \\ 712 \\ \hline 7921 \end{array}$$

от 0 до 89
? $\emptyset$
; < 8088 - $\emptyset$
 $90 \cdot 90 = 8100$ - $\checkmark$

т.к. $4 \cdot 2022 = 8088$ (не квадрат, т.к.
расположен между $89^2 = 7921$ и $90^2 = 8100$)
значит всегда $\emptyset$ корней.

По теореме Виета сумма корней
равна $-\frac{a}{1} = -a$, значит сумма корней всех равна
 $-90 - 91 - 92 - 93 - 94 - 95 - 96 - 97 - 98 - 99 = (-a_1 - a_2 \dots - a_{10})$

$$= -(90 + 91 + 92 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99) =$$

$$= -(90 \cdot 10 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = -(900 + 45) = -945.$$

Ответ: -945

Цистовик

5 из 7 листов

№ 8

Числовые

6

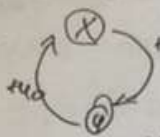
Ответ: 1, 2, 3 прыжка (1 или 2 или 3). (заранее 30-3)

Пример: ориент. графа



по часовой.
проинтерпретируем их и мысленно расположим по кругу, считая вершины из каждой группы проведем 40 порталов в следующие по порядку 40 планет (из 1 в 2, 3, ..., 40, 41 и т.д.).

т.к. $100 > 40 \cdot 2 = 80$, то из каждой планеты выйдут 40 порталов в другие, и войдут 40 из других, т.к. иначе



то $40 \neq 4$ всего 100

Г - Галамея 37
П - Планета

тогда если они (пусть номер Г $\rightarrow$ Х, если расстояние $y \rightarrow$ от А-ся до планеты или $x =$, или на 40, в обратную сторону ϕ меньше или $= 40$ в правую сторону (по часовой), то можно добраться за 1 прыжок, если от А-ся на ϕ (пусть; расстояние между (прямой) $\Rightarrow \phi > 40, 40 < 80$, то за 2 прыжка, если $\phi \leq 100$, то за 3 прыжка (т.к. $40 \cdot 3 > 120 \Rightarrow$ прыжки за 3 на эту планету).

Оценка: Теперь докажем, что не существует примера, когда не было бы пути (кол-во телепортаций) ≤ 3 от Г.

Пусть А - мн-во вершин, расстояние до которых из Г $\rightarrow$ 1 ход, ϕ ; В - два хода; тогда из вершин типа А - рёбра ведут или в А или в верш. типа В, т.к. тогда путь из Г $\rightarrow$ больше $\Rightarrow$ тип не В или не А.

Всего ориент. рёбер, исходя из А $\rightarrow \leq 40 \cdot 40$; рёбер из А в А $\rightarrow \leq \frac{39 \cdot 40}{2}$, значит в верш. типа В $\rightarrow$ ведут $\geq 40 \cdot 40 - \frac{39 \cdot 40}{2} = 1600 - 780 = 820$ рёбер

6 из 7

предположение

Продолжение оценок

тогда в вершину типа B ведёт $\geq \frac{820}{40} \geq 20$, т.е. ≥ 21

Посмотрим на те 40 вершин, куда ведут рёбра
из Пацора, у них есть пересечения со множеством

$\Gamma + A + B$ (все вершины типа A и B + Голая 37),

итого все вершины $\geq \Gamma + 40(A) + 21(B) + 40$ (которые
ведут в Пацору из того подмножества), т.е. $\geq 40 + 40 + 21 = 101$,

что $> 100 \Rightarrow \emptyset \Rightarrow$ всегда есть путь длины

≤ 3 от Γ до Пацоры.

Ответ: 1, 2, 3 ...

abc

Черновик

10

$$abc - acb$$

$$100a + 10b + c - 100a - 10c - b =$$

$$72 = 9 \cdot 8$$

$$9b - 9c = 9(b - c) \quad \therefore 72$$

$\div 8$

8, 0

u

0, 0	8, 0
1, 1	0, 8
2, 2	9, 1
3, 3	1, 9
4, 4	
5, 5	
6, 6	
7, 7	
8, 8	
9, 9	

$$9 \cdot 14 = 90 + 36 = 126$$

111

130

103

103

1030

$y \neq 1$
 $x \neq$

N. 3

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + 2y - 2022 = 0$$

$$x^2 + (2y+1)x + y^2 + 2y - 2022 = 0$$

$$(x+y)(x+y+1) + y = 2022$$

$$(x+y)^2 + x + 2y = 2022$$

1 ч 1+400 5 ч 1-4
7 ч 2,5

Черный (11)
-945

$$\begin{array}{r} 3^{\circ} \\ 44 \\ \times 45 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ 45 \\ \times 46 \\ \hline 270 \\ 180 \\ \hline 2070 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 40 \\ \hline 1840 + 230 = \end{array}$$

4.2022 = 132
80.88

$$\begin{array}{r} 1 \\ 44 \\ \times 43 \\ \hline 132 \\ 176 \\ \hline 1892 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 43 \\ \times 44 \\ \hline 172 \\ 172 \\ \hline 1892 \end{array}$$

1934 $x^2 + 9x + 2022$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 45 \\ \times 44 \\ \hline 180 \\ 180 \\ \hline 1930 \end{array}$$

0.99

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times 44 \\ \hline 1760 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 + 132 \\ 256 \\ \hline 2692 \\ 2692 \\ \hline 5380 \end{array}$$

$$-a \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4 \cdot 2022}}{2}$$

$x^2 + 9x + 2022$

$x^2 + 2022$

$x^2 + x + 2022$

$x^2 + 2x + 2022$

$$\frac{-a + \sqrt{\dots}}{2} + \frac{-a - \sqrt{\dots}}{2}$$

$\frac{7681}{2}$

$(-a)$

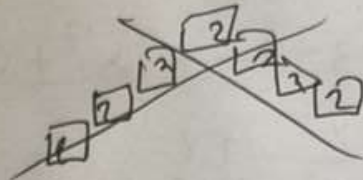
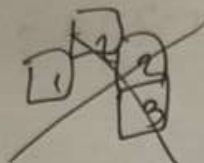
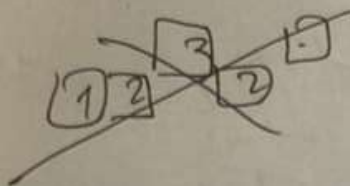
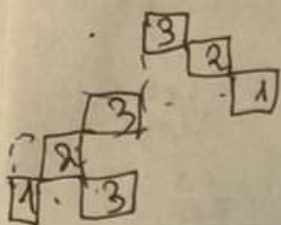
90	-90
91	-91
92	-92
93	-93
94	-94
95	-95
96	-96
97	-97
98	-98
99	-99

$190 + 190 + 190 + 190 + 90 + 95$

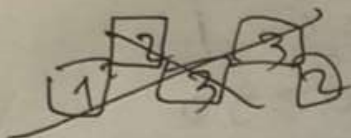
$$\begin{array}{r} 89 \\ 90 \\ \hline 80 \end{array} - \begin{array}{r} 30 \\ 10 \\ \hline 20 \end{array} = 1, 2, 3$$

Умножение (12)

$$\begin{array}{r} 89 \\ 18 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} 221 \\ 18 \end{array}$$

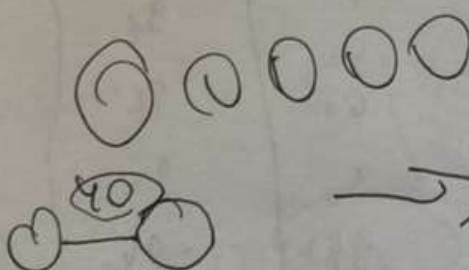


Слева

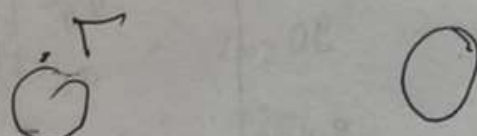


100 нм

Стрелка



оригинал. шаг



$$x^2 + yx + xy + y^2 + y$$

$$3 \cdot 4y^2 + 4y + 1 - 4y^2 - 8y + 4 \cdot 2022 =$$

$$= 1 - 4y + 4 \cdot 2022$$

$$(x+y)(x+y+1) + y = 2022$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + 2y = 2022$$

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 + 2x + 4y - 4044 = 0$$

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 + 2x + 4y - 4044 = 0$$

$$y + 1000$$

$$(x+y)(x+y+1)$$

$$x+y \leq 44$$

$$x+y=44 \text{ now problem used}$$

43

$$x+y=44$$

Знамен

$$40 \cdot 4$$



$$44 \cdot 45 + y = 2022$$

$$1980 + y = 2022$$

$$y = 42$$

$$x = 32$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 42 \\ \hline 84 \\ 168 \\ \hline 1764 \end{array}$$

2, 3, 4, 5, 6

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times 44 \\ \hline 176 \\ 176 \\ \hline 1936 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 45 \\ \hline 110 \\ 880 \\ \hline 990 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1225 \\ \times 160 \\ \hline 2025 \end{array}$$

135

$$\begin{array}{r} 3190 \\ \times 4 \\ \hline 12760 \\ + 185 \\ \hline 945 \end{array}$$

$$945$$

Чернавиц
N.1

8

Умань,

1
10 часов
X

4 часов
7

$$10 + \frac{7}{20}X = 10,$$

$\frac{10}{X} \rightarrow$ кангуи канал

$\frac{X}{10}$ - кангуи канал за 1 день

$\left(\frac{X}{20}\right)$ - кангуи канал за 2 дня

$$\frac{X}{20} \cdot 7 + \frac{10}{X} \cdot X =$$

$$\frac{X}{20} \cdot 7 + 10 = 10 + y$$

$$\frac{7}{y} = \frac{20}{X}$$

$$7X = 20y$$

$$y = \frac{7}{20}X$$

$$\frac{7X}{20} + 10 = 10 + \frac{7X}{20}$$

10 часов
X часов

4 часов
7 часов

Чернышук

35
X

10 часов 35

10
X

10 часов

1 часа

35 часов

7 часов

35 часов

11 часов.

5.
2

10 часов
7 часов

По 5 часов
7 часов.

$X \in \mathbb{N}$

A → B

I день
10 часов
Х часов

II день
 $\frac{35}{x}$ часов
7 часов.

Алеша ~~47~~
14
нормальное $\frac{10}{x}$ - все равно

$(7+x)$ часов

10 +

в первый день X часов сделали 10
во второй день 7 часов

$\frac{7}{x}$ - от первого часа

$\left(\frac{7}{2x} \cdot 10 \right)$

всего, $\frac{70}{2x} = \frac{35}{x}$

$$\frac{7}{x} = \frac{35}{x}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{x} = \frac{35}{x}$$

$$\frac{7}{x} = \frac{35}{x}$$

1. день X часов

$$7x = 70$$

$$(3.5+x) \cdot \frac{10}{x} = 10$$

$$\frac{7}{x} = \frac{35}{x}$$

$$\frac{7}{x} = \frac{35}{x}$$

$$\frac{7x}{35} = \frac{x}{5}$$

X часов 10 часов
за день

за пол дня

X часов 5 часов

7 часов $\rightarrow \frac{35}{x}$ часов

$$\frac{7}{x} \cdot 5$$

$$X+7 = 10$$

I день

10 часов

x часов

II день

y часов

7 часов

Черный (15)

7.5.7.5

$$\frac{10}{x}$$

7

$$\frac{10}{x} - \text{каждый день}$$

$$\frac{5}{x}$$

в первый день

$$\frac{10}{x} - \text{каждый день}$$

$$\left(\frac{5}{x}\right) \rightarrow \text{за первый}$$

$$\frac{x}{10} \text{ часов}$$

$$\frac{35}{x} = y$$

$$\frac{5}{x} \cdot 7 = \frac{35}{x} \rightarrow \text{всего часов в первом}$$

$$\frac{10}{x}$$

$$yx = 35$$

$$\frac{y}{7}$$

$$35^2 = x^3$$

Всего

$$y = \frac{35}{x}$$

$$\frac{35 \cdot 35}{x} = x^2$$

$$10 + \frac{35}{x} = \text{всего часов}$$

$$x +$$

$$\frac{7}{x} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{10}{x}$$

→ в первый день

всего часов

во второй день

$$\frac{7}{x}$$

во второй день

если 6, то

$$x = \frac{7}{x} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{2x}$$

→ в 2 день
сначала во 2 день

x - часов 10 в первый день

$$\frac{10}{x} +$$

$$10 + \frac{7}{2x}$$

$$\frac{\frac{7}{2x}}{y} = \frac{x}{10}$$

$$\frac{7y}{2x} = \frac{x}{10}$$

$$35y = x^2$$

$$70y = 2x^2$$