



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Вакуленко Назар Станиславович**

Класс: **10-11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Вакуленко Назар Станиславович

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	0 баллов	80 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

Числовик.

12

$\sqrt{2}$

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$$

Преобразуем правое выражение:

$$\begin{aligned} \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right) &= \arccos\left(\frac{\cos 50^\circ + \sqrt{3}\cos 40^\circ}{4\cos 40^\circ \cos 50^\circ}\right) = \\ &= \arccos\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\sin 40^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ\right) \cdot 2}{4\cos 50^\circ \sin 50^\circ}\right) = \arccos\left(\frac{2 \cdot \sin(40^\circ + 60^\circ)}{2 \cdot \sin 100^\circ}\right) = \\ &= \arccos 1 = 0, \text{ т.е.} \end{aligned}$$

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq 0$$

~~Решим нер-во методом интервалов, чтобы найти~~

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 0$$

$$\arccos(x-1) = 0$$

$$4x^2(2x+1) - 9(2x+1) = 0$$

$$(2x+1)(4x^2-9) = 0$$

$$(2x+1)(2x-3)(2x+3) = 0$$

Заметим, что $-1 \leq x-1 \leq 1$ т.к. аргумент аркоса
 $0 \leq x \leq 2$.

Числовое нер-во имеет вид:

$$(x - \frac{1}{2})(2x+1)(2x-3)(2x+3) \cdot \arccos(x-1) \leq 0$$

$\arccos(x-1) \neq 0$ при всех $0 \leq x \leq 2$, то
 $\arccos(x-1) = 0$, только при $x=1$

Числовик
11

Билет 11 класс
Вариант 11-1

7

Рим первые 2022 числа последовательности
 $6, 7, \dots, 2027$. Рассмотрим, сколько среди них
квадратов и кубов: $2^3 = 8, 12^3 = 1968, 13^3 = 2197$.

Таким образом 11 кубов (от 2^3 до 12^3)
квадратов 43 ($3^2 = 9, \dots, 45^2 = 2025, 46^2 = 2116$)

Заметим, что число ~~являющееся~~ 6-ой
оттенком какого-то числа входит в оба
массива (в кв. и кубы). Рим также числа;

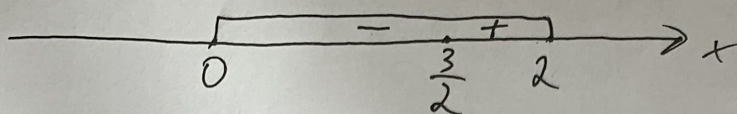
$2^6 = 64, 3^6 = 729, 4^6 = 4096$, т.е. 2 числа повторяются
удаляем $1 \Rightarrow$ из последовательности $6, 7, \dots, 2027$
удалено $11 + 43 - 2 = 52$ числа. Рим получается
52 числа: $2028, 2029, \dots, 2079$.

Т.е. $13^3 = 2197$, а $46^2 = 2116$, ~~44~~ и $4^6 = 4096$, то
из этих чисел ни одно не удалено
на 2022-ом месте стоит число 2079.

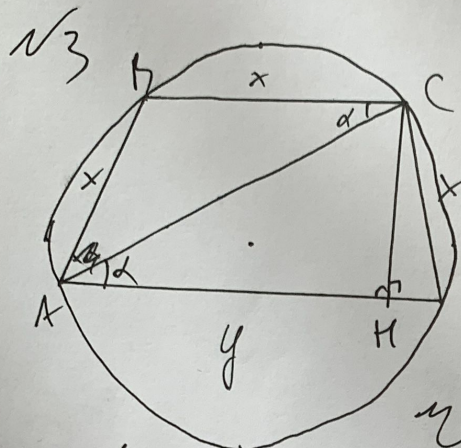
Ответ: 2079 - число, являющееся
2022-м числом этой последовательности.

Итак, имеем:

3



Ответ: $x \in [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}$.



Дано: $AB = BC = CD$

Решение:

1) Пусть $AB = BC = CD = x$

Заметим, что вписанный четырехугольник — равнобокий треугольник.

Ф.Р. (пусть $\angle DH = \angle$ $\Rightarrow \angle BSA = \angle$ (т.к. хорды AB и CD симметричны относительно диаметра AD и BC $\parallel$ AD $\Rightarrow$ ABCD — равнобокий треугольник) $\Rightarrow AC = BD$

Пусть $AC = BD = y$ (где y — целое

и — высота Пусть $AD = y$, и — высота: очевидно, что

$$HD = \frac{y-x}{2} \Rightarrow \text{из } \triangle HCD: CH^2 = x^2 - \left(\frac{y-x}{2}\right)^2$$

$$\text{Рим } \triangle ACH - \text{прямоуг.}: AH = \frac{y-x}{2} + x = \frac{y+x}{2},$$

$$AC^2 = CH^2 + AH^2 = x^2 - \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+x}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$AC^2 = x \cdot (x+y), \text{ так: } AC^2 = BD^2 = x(x+y).$$

Примем к системе:

$$\begin{cases} x \cdot (x+y) = k^2 \\ 3x+y = \text{какая-то величина (это периметр)} \\ x, y, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Итого
 $3x > y > x$, (пер-во многоугольника)
 Заметим, что $y \neq x$, т.к. диагональ квадрата
 с целыми сторонами не целая.

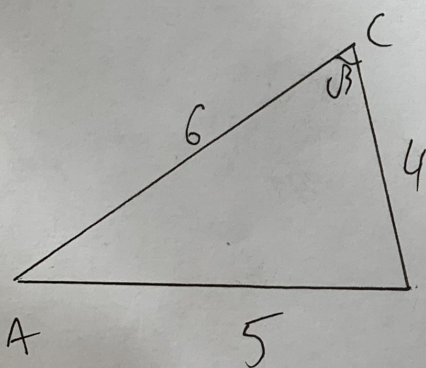
Рассмотрим ур-е в целых числах

$x(x+y) = k^2$ и решим перебором с учётом
 указанных ограничений ($3x > y > x$)

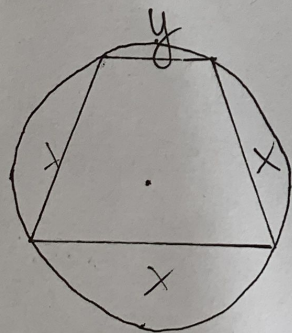
x	y	k
1	2	$\sqrt{2}$
2	3	← не целое
3	4	← не целое
4	5	6

Итак $x=4, y=5$

Ра $\triangle ACD$ и найдём радиус
 окружности. — он же $R =$
 $\triangle AED$ (общей хорд.)



Радиусной хорд. = Пусть $\angle ACD = \beta$, то
 по т. кос $\cos \beta = \frac{AC^2 + CD^2 - AD^2}{2 \cdot AC \cdot CD} =$
 $= \frac{36 + 16 - 25}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{52 - 25}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16}$, то
 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$, тогда
 по т. син $\frac{AD}{2 \sin \beta} = R$; $R = \frac{5 + 16}{2 \cdot \sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$



Заметим, что $\exists$ ещё такой
 случай, который мы не рассматрива-
 вали, из-за условия, что
 периметр наименьший.

От вет: $P=17$; $R = \frac{8\sqrt{7}}{7}$

№6

Числовые.

6

$$|x^3 + 2x^2 + x + 9| + |x^3 + 2x^2 + x - 9| < 4x^2 + 8x$$

При левой части, она ~~меньше~~ $\geq |x^3 + 2x^2 + x + 9| + |x^3 + 2x^2 + x - 9|$
 $\geq |x^3 + 2x^2 + x + 9 + x^3 + 2x^2 + x - 9|$. (по первой Δ -ка) $\Rightarrow$
 необходимо выполнение пер-ва:

$$|2x^3 + 2x| < 4x^2 + 8x$$

При 2 случая:

$$1) 2x^3 + 2x \geq 0:$$

$$2x^3 + 2x < 4x^2 + 8x$$

$$2x^3 - 4x^2 - 6x < 0$$

$$x(x^2 - 2x - 3) < 0$$

$$x(x-3)(x+1) < 0$$

$$\text{т.е. } x \in (0; 3)$$

$$2) x < 0$$

$$-2x^3 - 2x < 4x^2 + 8x$$

$$-2x^3 - 4x^2 - 10x < 0$$

$$x(x^2 + 2x + 5) \geq 0$$

не выполняется при

$$x < 0 \Rightarrow$$

Невозможно, т.к. $x \in (0; 3)$

Итого в пер-во:

Заметим, что

$$|x(x+1)^2 + 9| + |x(x-1)^2 - 9| < 4x(x+2)$$

$$|x(x+1)^2 + 9| + |x(x-1)^2 - 9| < 4x(x+2)$$

Заметим, что $x(x+1)^2 \in (0; 48)$, а

$$x(x-1)^2 \in (0; 12)$$

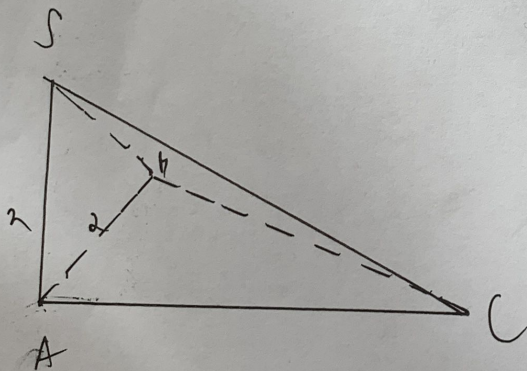
известно.
 При условии равенства 1-ого корня с "+", 7
 2-ого с "-". Иначе.

$$4x^2 + 2a < 4x^2 + 8x$$

$$x > \frac{a}{4} \Rightarrow x > 3. - \text{ не подходит. } \Rightarrow 0 < 12$$

2-ой случай: если a

№5



Решение:

1) т.к. (SAB) и $(SAC) \perp$
 плоскости основания, то
 $\angle SAB = \angle SAC = 90^\circ$ и

$SB = 2\sqrt{2}$ и
 SAB - равнобедренный

и прямоугольный.

2) Пусть $R = x$, т.е. $AC = x$

Числовая

№4

$$a_1 = \frac{4043}{2022}, \quad a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$$

Есть ли такое n , такое что $|a_n| \leq \frac{2022}{2021}$?

Решение:

Рим $a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$. Заметим, что

$$a_{n+1} = (a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n - 1) + 1, \text{ т.е. } a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)^3$$

Заметим, что, если $a_n = 1 + x$, то $a_{n+1} = 1 + x^3$, тогда

$$a_{n+2} = 1 + x^9, \quad a_{n+3} = 1 + x^{27}, \dots, a_{n+k} = 1 + x^{3^k}$$

$a_{n+k} = (1 + x^{3^k})$, заметим, что 3^k быстро

возрастает, следовательно $x < 1 \Rightarrow$ если $x < 1$, то

$x^{3^k} \rightarrow 0$ (стремится к 0) при $k \rightarrow \infty$

быстро. Поскольку $a_1 = \frac{4043}{2022} = 1 + \frac{2021}{2022}$, то

$$a_{n+k} = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^k}$$

тогда $< 1 + \frac{1}{2021}$, т.к. найдётся,

$$k_0 \text{ такое что } \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{k_0}} < \frac{1}{2021}$$

Ответ: Такое n $\exists$ (существует)
(Например, $k_0 = 100$ гарантированно подходит)