



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Петров Артём Андреевич**

Класс: **10-11**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Петров Артём Андреевич

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	15 баллов	20 баллов	15 баллов	0 баллов	90 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

(N1) (1) $12^3 = 1728$, $13^3 = 2194$, $45^2 = 2025$, $46^2 = 2116$

Значит на отрезке 2026 до 2115 нет ни квадратов, ни кубов.

(2) Найдём место числа 2115 в новой последовательности:

Было: $6, 4, \dots, 2115$
 $(n_1, n_2) \quad (11^0 | 2115 - (6-1)) = 2110$

Стало: $6, 4, \dots, 2115$

квадраты от 3^2 до 45^2 ушли } кубы от 2^3 до 12^3 ушли
 $(45-2=43 \text{ числа})$ $(12-1=11 \text{ числа})$
 Но! 2^6 и 3^6 посчитали две раза ($4^6 > 2115$).

Значит правильно $43 + 11 - 2 = 52$ числа, то есть новое место
 числа $2115 \approx 2110 - 52 = 2058$

(3) Тогда на 2022 месте стоит число $2115 - (2058 - 2022) =$
 $= 2115 - 36 = 2079$
Ответ: 2079

(N2) $(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$

(1)
$$\begin{array}{r} 8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 \quad | \quad 2x+1 \\ - 8x^3 + 4x^2 \\ \hline -18x - 9 \\ -18x - 9 \\ \hline 0 \end{array}$$
 то есть $8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = (2x+1)(2x-3)(2x+3)$

(2)
$$\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\cos 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ}{2\cos 40^\circ \cdot \cos 50^\circ} = \frac{\cos 60^\circ \cdot \sin 40^\circ + \sin 60^\circ \cdot \cos 40^\circ}{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ}$$

$$= \frac{\sin(60^\circ + 40^\circ)}{\sin(2 \cdot 40^\circ)} = \frac{\sin 100^\circ}{\sin 80^\circ} = 1$$

I лист чистовик

$\arccos(1) = 0$, получаем: $(2x+1)(2x-3)(2x+3) \cdot \arccos(x-1) \leq 0$

(3) $\arccos(x-1) \geq 0$ на области определения

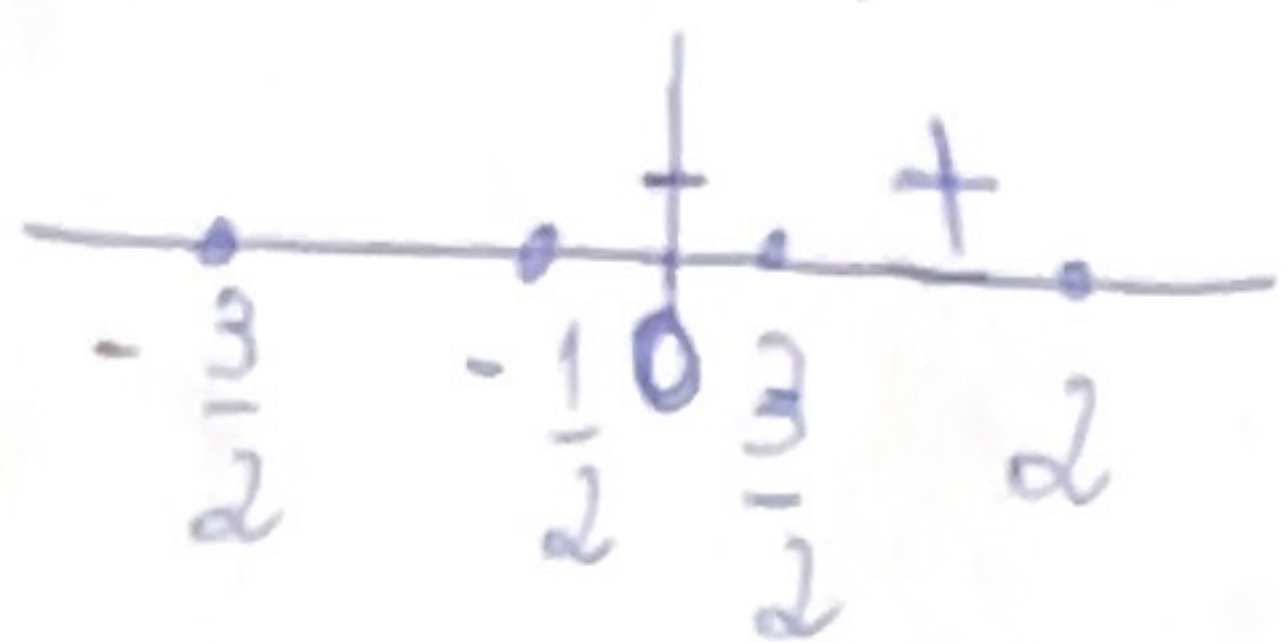
и равно 0 при $x=2$

$$x-1 \in [-1; 1]$$

как аргумент
 $\arccos$

$$\Rightarrow x \in [0; 2]$$

(4)



$$\text{Ответ } [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}$$

№4

Пусть $K = 2022$, тогда $a_1 = \frac{2K-1}{K}$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n \Rightarrow a_{n+1} = (a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n - 1) + 1 =$$

$$= (a_n - 1)^3 + 1 \Rightarrow a_{n+2} = ((a_n - 1)^3 + 1 - 1)^3 + 1 = (a_n - 1)^{3^2} + 1$$

$$\Rightarrow a_{n+m} = (a_{n-1})^{3^m} + 1. \text{ Тогда } a_m = (a_1 - 1)^{3^{m-1}} + 1 =$$

$$= \left(\frac{K-1}{K} \right)^{3^{m-1}} + 1. \text{ Это считаем } \leq \frac{2022}{2021} = \frac{K}{K-1}, \text{ при}$$

$$\left(\frac{K-1}{K} \right)^{3^{m-1}} \leq \frac{1}{K-1}.$$

$$\frac{K-1}{K} < 1$$

и возведе это в степень 3 мы
можем получить сколь угодно
малое положительное число,
то есть $\frac{1}{K-1}$ тоже мале.

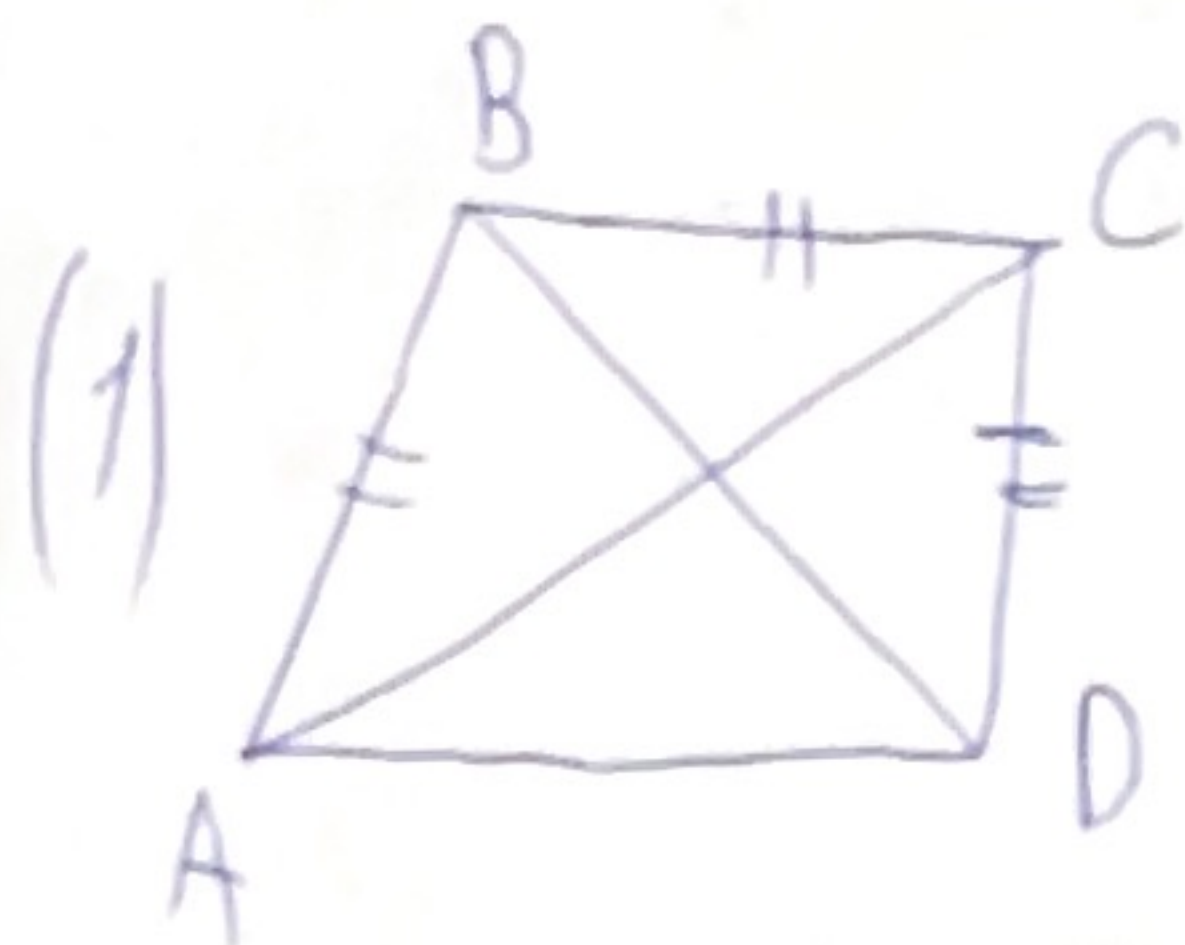
Ответ: да

II лист чистовик

(N3)



ABCD - вписанный



Пусть $AB = BC = CD = x$, $AC = z$, $BD = t$,

$AD = y$

$$P_{ABCD} = 3x + y, \quad x, y, z, t \in \mathbb{Z}$$

(2) § Покажем, что x не может быть равен 1:

Неравенство Птолемея: $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$, причем
неравенство достигается тогда и тогда, когда
ABCD - вписанный, тогда $z \cdot t = x^2 \cdot xy$.

Если $x = 1$, то $y = z \cdot t - 1 \Rightarrow z \cdot t > 1$

$\Rightarrow$ либо z , либо $t > 1$ (пусть $z > 1$, тогда $z \geq 2$,
но тогда еще $\triangle ABC$ не выполняется
неравенство треугольника $\begin{cases} AB = BC = 1, \\ AC = 2 \end{cases}$)

$\Rightarrow x \geq 2$

(3) Из неравенства треугольника еще $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CAD, \triangle DAB$
следует, что $z, t < \min(2x, x+y) = x + \min(x, y)$

(4) Пусть $x = 2$.

Если $y = 1$, то $z \cdot t = 2^2 + 2 \cdot 1 = 6$, но $z, t < 2 + 1 = 3$, то
есть $z, t \leq 2 \Rightarrow z \cdot t \leq 4$

Если $y = 2$, то $z \cdot t = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8$, но $z, t < 2 + 2 = 4$,
то есть $z, t \leq 3$, но тогда $z \cdot t = 8$ (никак не получить)

то есть $y \geq 3$, то $z \cdot t = 2^2 + 2y \geq 10$, но $z, t < 2 + 2 = 4$,
то есть $z, t \leq 3 \Rightarrow z \cdot t \leq 9$. значит $x \geq 3$

III нет чистовика

Создадим таблицу с значениями z, t, x, y

~~это~~ $x + \min(x, y) - 1$ — верхняя граница на z и t

x	y	$x + \min(x, y) - 1$	$z, t : (x^2 + y)$
3	1	3	12 нет решения
3	2	4	15 нет решения
3	≥ 3	5	18, 21, 24, ... нет решения
4	1	4	20 нет решения
4	2	5	24 нет решения
4	3	6	28 нет решения
4	≥ 4	4	32, <u>36</u> , 40, 44, 48, ...

~~нет~~

← первое $z = t = 6$.

решение $y = 5$

Пример: равнобедренные треугольники

$$x^2 = 4^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x^2 + \left(4 + \frac{1}{2}\right)^2 = 4^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{2}\right)^2 = 36 = 6^2$$

$$P_{ABCD} = 3 \cdot 4 + 5 = 17.$$

радиус описанной окружности треугольника ABC

радиус описанной окр-ти

$$R = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4 \cdot R_{ABD}}$$

$$R_{ABD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{15}{2}} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

$$\Rightarrow R = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{15\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

Ответ: $R = \frac{8\sqrt{7}}{7}$

IV лист чистовика

№5



$SA = AB = 2$
 $(SAB \perp ABC \perp RAC \Rightarrow SA \perp ABC)$

CA - высота
(или центр)

Докажите пирамиду до куба как R - центр куба, A - центр ниж. осн, B - середина ребра, C - вершина.

Заметим, что если соединить R со всеми вершинами нижней грани, то мы получим 8 пирамид равных $SABC$, образующих ~~большую~~ пирамиду, которая в свою очередь равняется $\frac{1}{6}$ части куба, т.к на каждой грани можно построить такую же пирамиду с вершиной S с каждой из которых заключено 8 пирамидок $RABC$.

П.к сфера с центром симметрична относительно S, то ~~AB~~ ~~объем~~ пересеч. шара с центром $SABC = \frac{1}{6}$ ~~объем~~ пересеч. шара с кубом. $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 8 = AB^2 + SA^2 = SB^2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{2}$, ~~объем~~ ~~объем~~ пересеч. шара с центром в т. R

V Чистовик

радиусом RB и кубом ~~радиус~~ ^{сечения} сферы шара - 6 сечений (сечений шара)

~~В~~ Высота каждого из таких сечений

$$H = SB - SA = 2\sqrt{2} - 2, \text{ а объем } V = \frac{\pi H}{6} \cdot (3a^2 + h^2)$$

где a - радиус основания сечения, тогда $V = \frac{\pi}{6} \cdot (2\sqrt{2} - 2) \cdot$

$$(3 \cdot 2^2 + (2\sqrt{2} - 2)^2) = \frac{\pi}{6} \cdot 8 \cdot (2\sqrt{2} + 1)$$

$\frac{4}{3}\pi \cdot SB^3$ тогда V пересеч. шара и куба

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot 16\sqrt{2} - 8\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8\pi \cdot \left(\frac{5\sqrt{2}}{3} - 1\right)$$

Чтобы получить V части $SABC$ надо это поделить

это на $6 \cdot 8$, но в начале поймем будет ли это больше

часть: для этого сравним объем пересеч. шара

и куба ^{поэтому}

$$8\pi \cdot \frac{5\sqrt{2}}{3} - 1 \stackrel{?}{>} 32$$

$$\pi \cdot 5\sqrt{2} \stackrel{?}{>} 3$$

$$\pi \cdot \frac{12}{5\sqrt{2}} - 3 < 3 < \pi, \text{ т.к. } 4 \text{ меньше } 5\sqrt{2} - 3$$

$$3 < \pi$$

так как $4 < 5\sqrt{2} - 3$

значит это больше
часть

Ответ: $\frac{\pi}{6} \cdot \left(\frac{5\sqrt{2}}{3} - 1\right)$

VI
Умножил



6, 7, 8, 9, 10 ygal.

$$8 = 2^3, \dots, 4^2 = 16$$



$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$$

$$a_1 = \frac{4043}{2022}, a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 6a_n$$



$$|a_n| \leq \frac{2022}{2021}$$



$$AB = BC = CD$$



$$\arccos(x-1) \cdot |8x^3 + 4x^2 - 18x - 9| - \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right) \leq 0$$

$$\frac{35}{10} = \frac{7}{2}$$

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x$$

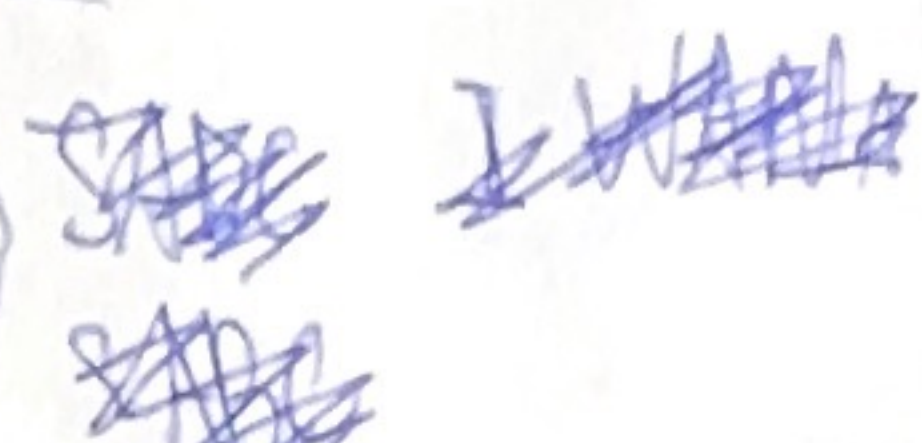
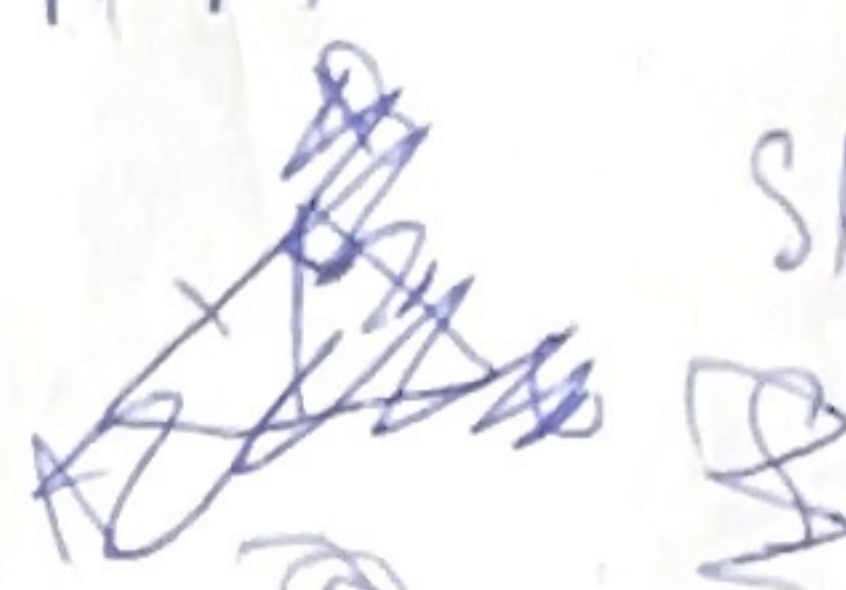
предположим, что $x > 0$

$$x-1 = x+1+2$$

$$x + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 = x + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2$$



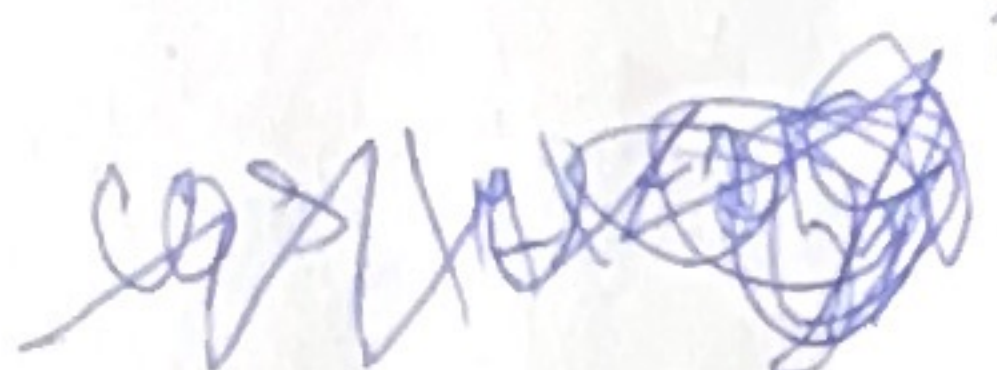
$$SA = AB = 2$$



$$4x^2(2x-1) - 9(2x-1)$$

$$(2x-1)(4x^2-9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$$

$$(2x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ}\right)$$

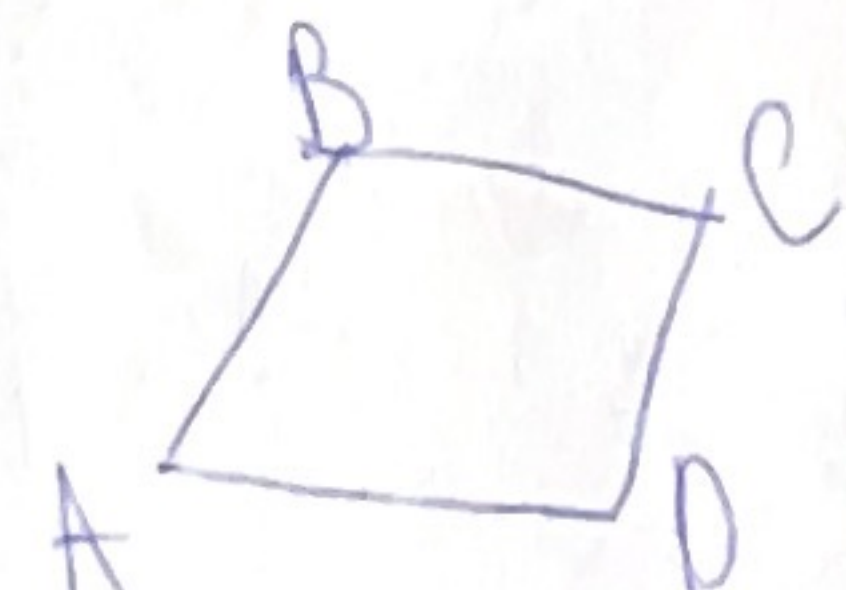
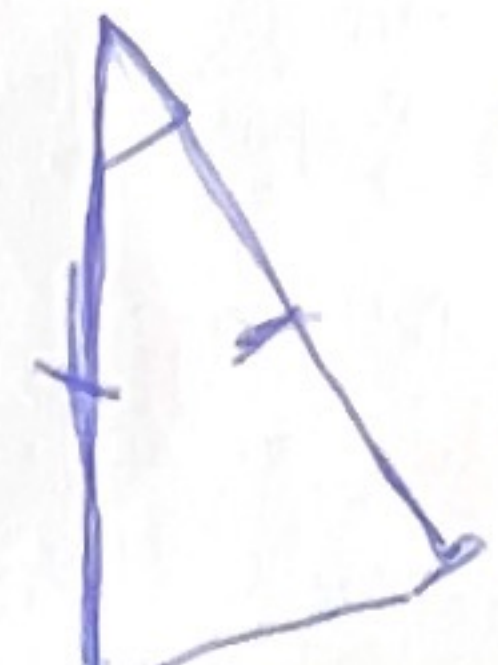


$$x^3 + 2x^2 + x + a$$



arccos

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x$$



$$AB = BC = CD = AD$$

SABC



4