МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**
Профиль олимпиады: **Математика**
ФИО участника олимпиады: **Козлова Олеся Николаевна**
Класс: **7-8**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Козлова Олеся Николаевна

Класс: 7-8

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Тех. балл***
15 баллов	15 баллов	5 баллов	15 баллов	15 баллов	5 баллов	80 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

Чистовик № 1.

№ 3 Пусть $\overline{abc}$ – трёхзначное число, записанное цифрами $a, b, c \Rightarrow \overline{abc} - \overline{acb}$ можно преобразовать как:

$$\overline{abc} - \overline{acb} = 100a + 10b + c - (100a + 10c + b) =$$
$$= 100a - 100a + 10b - b + c - 10c = 9b - 9c$$
$$\boxed{\overline{abc} - \overline{acb} = 9b - 9c}$$

Необходимо доказать, что:

$(9b - 9c) \vdots 72$

$9(b-c) \vdots 72 \quad | : 9$

$b - c \vdots 8 \Rightarrow$ можем найти все возможные значения b и c. Т.к. b и c – неотрицательные однозначные числа $\Rightarrow$ они могут быть равны: $\boxed{b=9,\ c=1 \text{ или } b=8,\ c=0.}$

Число c может быть равно 0, т.к. ни в одном из чисел $\overline{abc}$ и $\overline{acb}$ оно не стоит на первом месте.

Заметим, что в обоих числах $\overline{abc}$ и $\overline{acb}$ a стоит в разряде сотен и поэтому её значение не влияет на значение разности $\Rightarrow a$ – любая цифра отличная от $0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ есть 9 вариантов значения a.

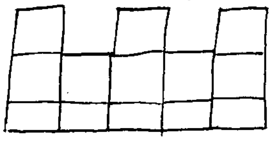
Если в условии имеется ввиду, что цифры a b и c могут совпадать, то на каждое значение a приходится 2 возможных варианта значений b и c $\Rightarrow$ всего $(9 \cdot 2)$ $\boxed{18 \text{ вариантов}}$ таких чисел (Например, $191 - 119 = 72$ или $380 - 308 = 72$).
(т.е. 36 чисел)

Если имеется ввиду, что все цифры a b и c различны, то при $b=9$ и $c=1$, a имеет 7 различных значений, а при $b=8, c=0$, a имеет 8 различных значений $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\boxed{15 \text{ вариантов.}}$ (разница между числами $\overline{abc}$ и $\overline{acb}$ не может быть больше 72, т.к. в разряде сотен стоит одна и таже цифра).
(т.е. 30 чисел)

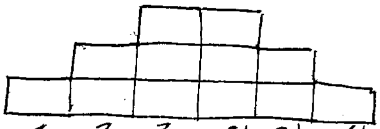
Ответ: при a может быть равно b или c возможно 18 вариантов, если a не может быть равно b или c возможно 15 вариантов.

Чистовик № 2.

№ 5.



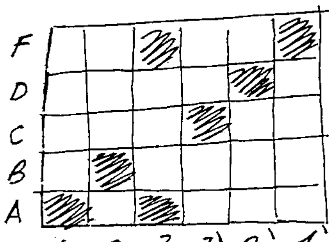
вид спереди



вид сбоку

Необходимо найти минимальное кол-во кубиков, при котором не ~~..~~ нарушается вид спереди и вид сбоку.

Обозначим каждый ряд на рисунке, показывающем вид спереди, буквой от A до F, а на рисунке вида сбоку обозначим каждый ряд цифрой, которая будет ~~...~~ показывать кол-во кубиков. Вид сверху представим в виде ~~2~~ прямоугольника размером 5 × 6, где закрашенные клетки обозначают места, где есть кубики.



Сначала закрашиваем одну клетку каждой строчки таким образом, чтобы вид ~~...~~ спереди не нарушился (например, A_3, B_2, $C_{3'}$, $D_{2'}$, F_3) при этом используем максимальное кол-во столбцов и учитываем кол-во кубиков от 1 до 3, затем в любой строке (или в любых разных строчках) закрашиваем столбцы 1 и 1', (например, A_1 и F_1))

Мы получим минимальное возможное кол-во кубиков на виде сверху, т.к. при уменьшении их числа мы нарушим вид сверху или спереди ⇒ мин. 7 кубиков.

Ответ: 7.

Чистовик №3.

№2. Дано:

I день – полный рабочий день; 10 грядок.

II день – 7 работников; половина рабочего дня.

Найти:

n грядок – ?

Пусть x – производительность одного человека за день.

y – кол-во заболевших.

Тогда $\boxed{x = \frac{10}{7+y}} \Rightarrow 7x + yx = 10$

При этом за второй день вскопали:

$\boxed{\frac{7x}{2}}$ грядок

$\Rightarrow \boxed{n = 10 + \frac{7x}{2}}$

Рассмотрим:

$7x + yx = 10$ Возьмём частный случай, при $x = 1$

$7 + y = 10 \Rightarrow y = 3$, тогда кол-во заболевших равно 3.

В таком случае:

$n = 10 + \frac{7}{2} = 13,5$; ~~очевидно, что должны вскопать несколько грядок~~ ~~$\Rightarrow$ их целое число, при~~

~~увеличении значения~~ $\cancel{x}$ ~~мы получаем, что заболело отрицательное число работников или их меньше 1~~

~~(например:~~ $\cancel{7 \cdot 2 + 2y = 10 \Rightarrow y = -2}$~~), такого быть не может~~ $\cancel{\Rightarrow x < 1}$

~~Рассмотрим частный случай, при~~ $\cancel{x = \frac{1}{2} \Rightarrow}$

$\cancel{\Rightarrow \frac{7}{2} + \frac{y}{2} = 10 \Rightarrow 7 + y = 20 \Rightarrow y = 13}$

При увеличении x мы получаем отрицательное значение y (например: $7 \cdot 2 + 2y = 10 \Rightarrow y = -2$), такого быть не может.

Чистовик №4.

Очевидно, что вскопали несколько грядок $\Rightarrow$ их целое число. Рассмотрим выражение:

$$\boxed{n = 10 + \frac{7x}{2}}\ ;$$

Мы можем получить целое число n, только при $\frac{7x}{2}$ – целое число, при этом x может быть равен только 2 или $\frac{1}{3,5}$, рассмотрим оба случая:

$$\boxed{7x + yx = 10}$$

при $x = 2$:

$14 + 2y = 10 \Rightarrow y = -2$, такого быть не может, т.к. число заболевших не может быть < 0.

при $x = \frac{10}{35}$

$$\frac{70}{35} + \frac{10}{35} \cdot y = 10$$

$$\frac{10}{35} y = 8$$

$\boxed{y = 28} \Rightarrow x = \frac{1}{3,5}$, а $y = 28 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего грядок: $n = 10 + \frac{\frac{7}{3,5}}{2} = 11$ грядок.

Ответ: 11 грядок.

Чистовик № 5

№ 4.

$$(x+y)(x+y+1)+2y=100$$

$(x+y)(x+y+1)$ – произведение чётного и нечётного числа $\Rightarrow$ ~~тогда~~ произведение точно делится на 2.

$$\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+y=50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+2xy+y^2+x+y}{2}+y=50 \Rightarrow \frac{(x+y)^2+(x+y)}{2}+y=50$$

Пусть $x+y=t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+y=50 \mid \cdot 2$$

$$\left[\begin{array}{l} \boxed{t^2+t+2y-100=0} \quad (y=t-x) \\ t^2+t+2t-2x-100=0 \\ \boxed{t^2+3t-(2x+100)=0} \end{array}\right.$$

$$(D=9+4(2x+100)=9+8x+400=409+8x)$$

$\cancel{t^2+t+2y-100=t^2+3t-2x-100}$

$\cancel{x=3y}$

$$\frac{(x+y)^2+(x+y)}{2}+y=50$$

$$(x+y)^2+(x+y)+2y=100$$

~~при $x=9$, $y=0$~~ ~~$(9+0)^2+9+0=81+9=90$~~

При $x+y \geq 10$ получаем слишком большое число

Рассмотрим $x+y=9$, такое возможно, при $x=4$; $y=5$

$\boxed{81+9+10=100}$

$x+y=8$
$x=-6$; $y=14$

Чистовик №6

$64+8+28=100$

при $x+y=7$

$x=-15$

$y=22$

$49+7+44=100$, но складывать x и y - натуральные числа $\Rightarrow$ только 1 возможный вариант, при

$x=4$; $y=5$.

Ответ: $x=4$; $y=5$.

Листовик № ~~3~~7

№ 6.

Может оказаться ~~так~~, что с Блатеи-37 на Пандору сразу есть портал, тогда будет нужен только 1 перелёт. Если же нет, то при перелёте на одну из следующих планет, на ней может быть 40 ~~порт~~ порталов, из которых все могут оказаться теми, которые уже встречались (портал на Блатеи-37 или её остальные 39 порталов).
Но мы рассматриваем минимальное кол-во перелётов ⇒ пусть на этой планете 40 новых порталов, ~~среди~~ ~~которых все новые ⇒ нам встретились уже~~
⇒ на всём пути мы уже видели 81 планету ⇒
⇒ осталось 19 планет и при следующем перелёте, ~~~~ должна точно оказаться портал на Пандору, если он не встретился раньше, но может быть гораздо больше перелётов если порталы повторяются.

Ответ: 1; 2; 3.

№ 1.

Каждый сказал, что меньше 6 жителей собрали больше бананов, и больше 6 жителей собрали ~~~~ больше кокосов. ⇒ ~~~~ есть минимум 7 человек, которые собрали кокосов больше чем остальные ⇒ эти семеро - лжецы. ⇒ для этих 7 жителей найдётся 6 или больше жителей собравших больше бананов, чем они сами., при этом если таких хотя бы 7, то один из них лжец, т.к. есть 6 человек, который собрали больше него.
~~~~ Такое возможно, например если на острове 6 рыцарей и 7 лжецов, при изменении кол-ва рыцарей один из лжецов ~~~~ скажет правду, а такого быть не может.

Ответ: да, можно: 6 рыцарей и 7 лжецов
~~~~

Черновик 8

1) рыц.-и лж.
бол. и пол.
1. нет 6 > я бол.
2. у 7 > я пол

$9+1\cdot5$ $81+9+$ $81+9+20$ $5+2$ $49+7=$ $64+8=72$ 28 14 $14-6$

$1\times 6\,48$ $100=80+20$

Если каждый сказал что нет 6 жителей которые сорвали больше него

$\cdot 10+1$ 10

2)

I день - 10 гр.

II день - 7 человек

0,5 дня

Пусть 1 чел. вскапывает x грядок за день

$\frac{10}{7+y}=x$

$\boxed{\frac{x}{2}\cdot 7+10}$ — всего грядок $3{,}5x+10$ $49+7=56$ 44 22

$\frac{7\cdot 10}{2\cdot 35}$

$35x$

$7x+xy=10$, где y - заболевшие 22 $\frac{10}{x}$

$3{,}5x+7x+xy=10{,}5x+yx$

25×0 $25-20+25$

$\frac{10}{7+y}=x$ $\frac{10}{7+y}=$ $\frac{20}{7+y}\cdot 7+10=$ $\frac{10}{xy}=\frac{n-10}{7x}$

$140|35$ x - всего

$\frac{10}{7+y}=\frac{x-10}{7}$

x - в день

y - заболело

$\frac{1}{3{,}5}=\frac{10}{35}=\frac{10}{7+2}$

$\frac{7x}{2}=2$ $\frac{35}{\times 4}{140}$ $10+\frac{3{,}5}{2}$

$7x=4$

$x=\frac{4}{7}$

$xy+7y=10$ $\frac{7x}{2}=$ 1,5 10,5

$\frac{7x}{2}+7y+xy$ при $y=3$

$\times 3{,}5$ 10

1,5

3) $\overline{abc}-\overline{acb}$ делится на 72 без остатка 1,25

$\frac{\times 35\ 8}{280}$

$4+4\cdot\frac{4}{7}$

$100a+10b+c-(100a+10c+b)=\cancel{100a}-\cancel{100a}+10b-b+c-10c$

$=(9b-9c):72$ $\frac{10}{7\cdot 4\cdot3+13+28}$ $\frac{1}{3}$ $14+2\cdot-2\cdot$ $\frac{7}{2}+\frac{y}{2}=10$

$9(b-c):72$ $1:9$ 2 $\frac{\frac{7}{2}}{2}$ $14+$ $7+y=2$

$b-c:8$ 0123456789 10,5+

$380-308$ $\cdot 10$ -91 $\frac{19}{72}$ $6{,}5=\frac{y}{2}$ $\frac{\frac{7\cdot 2}{2}}{14^2}$ $\frac{10}{7}=\frac{13}{7}$

$191-119=72$ $y=13$ 0,5 3,5 + 0,5.

$7x=10-yx$ 6,5 13 $=-yx$

Черновик 9

$(x+y)(x+y+1)+2y=100$

$x^2+xy+x+xy+y^2+y+2y=100$

$x^2+2xy+x+3y+y^2=100$

$x^2+2xy+y^2+x+3y=100$

$(x+y)^2+x+3y=100$ $\quad$ $(x+y)(x+y+1)+2y=100$

$x\ 2xy$

$(x+y)(x+y+1)$ – произведение чётного и нечётного числа ⇒

⇒ произведение точно делится на 2

$x^2+2xy+x+y+y^2$

$\frac{(x+y)^2+(x+y)}{2}+y=50$ $\quad$ $\frac{t^2}{2}$ $\quad$ $4+1$ $\quad$ $82+8$

$2+3+1$ $\quad$ 6 $\quad$ 6 $\quad$ 30

$(x+y)^2+(x+y)+(2y-100)=0$

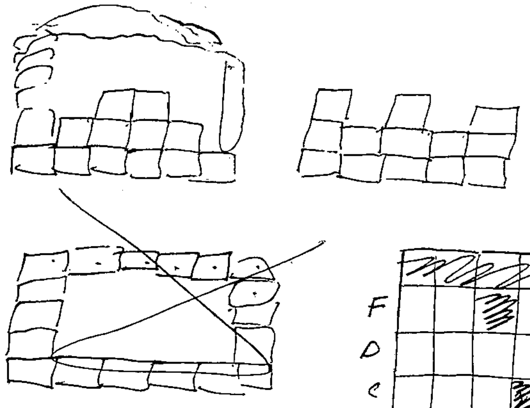
$401 : 8 = 50,125$

$D = 1-4(2y-100) = 1-8y+400 = 401-8y$

$(x+y)_1 = \frac{-1-\sqrt{401-8y}}{2}$ $\quad$ $(x+y)_2 = \frac{-1+\sqrt{401+8y}}{2}$

$2x+2y = -1-\sqrt{401-8y}$

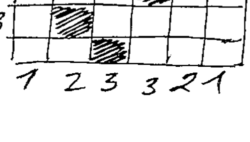
5)



6

$x+y+2y-100 = 3x+3y-2x$

$x+3y = x+3y$



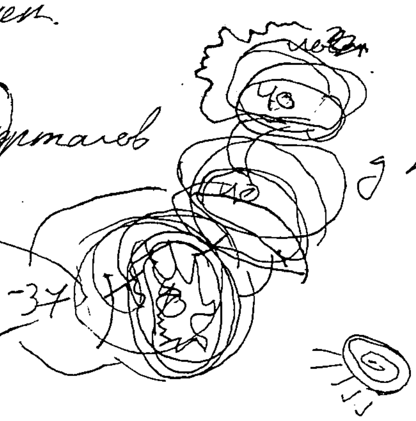
$409 | 8$

5

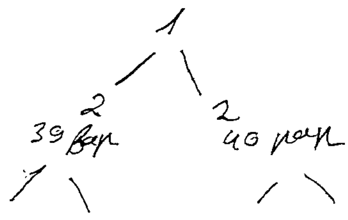
Черновик. 10

100 планет.

40 порталов 1 = 40 порталов



У каждой планеты есть 40 пор из которых с него можно попасть



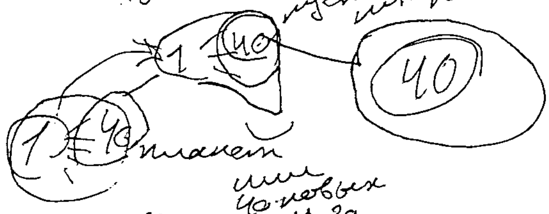
100 − 41 = 69

$\times$ 100
40
4000
порталов всего

из 100 планет есть 40 с которых можно попасть на Падору

81 или 80

ост 19 ост 20 пусть среди них КП



или 40 новых или 39

пусть среди них КП

81, 80

~~Черновик №3~~ Черновик. 11

~~№2 (... часа)~~

~~1 день – 10 прогон (полный рабочий день)~~

~~2 день – 7 часа~~