



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Семенова Софья Андреевна**

Класс: **9**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Семенова Софья Андреевна

Класс: 9

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	15 баллов	15 баллов	5 баллов	15 баллов	15 баллов	90 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

Задача 2

Число $\overline{abc}$ можно представить в виде: $100a + 10b + c$

Число $\overline{acb}$ можно представить в виде: $100a + 10c + b$

По условию $\overline{abc} - \overline{acb}$ должно быть кратно 72, т.е:

$$(100a + 10b + c - (100a + 10c + b)) : 72$$

$$(100a + 10b + c - 100a - 10c - b) : 72$$

$$(9b - 9c) : 72$$

$$9(b - c) : 72$$

$$(b - c) : 8$$

Так как b и c — цифра (от 0 до 9), то ~~разность~~ разность b и c будет делиться без остатка на 8 только когда $b - c = 8$ или $b - c = 0$ (в условии не сказано, обязательно ли b и c различные цифры), т.е. двузначной разности получить не может.

$b - c = 8$ при I. $b = 9; c = 1$
II. $b = 8; c = 0$

Тогда (рассматриваем вариант, когда $b \neq c$) цифру a ~~можно~~ можно выбрать 9-ю способами (цифра от 1 до 9), а цифр b и c — двумя. Всего получится 18 вариантов таких чисел ($2 \cdot 9$)

Если же $b = c$, то цифру a по-прежнему можно выбрать 9-ю способами, а цифр b и c — 10-ю (11, 22, 33..., 99, 00). Тогда получится еще $10 \cdot 9 = 90$ вариантов чисел.

Итого, если $b \neq c$ (в условии ничего не сказано), то получится 18 чисел, а если b может быть равным c , то получится $18 + 90 = 108$ чисел

Ответ: 18 чисел, если $b \neq c$

108 чисел, если b может равняться c

Задача 5

Для начала заметим, что чтобы получился действительный корень, дискриминант должен быть ≥ 0 . Т.е.:

$$a^2 - 4 \cdot 2022 \geq 0$$

$$a^2 - 8088 \geq 0$$

$$a^2 \geq 8088$$

Это возможно при $a \geq 90$ (если рассматриваем только целые числа). То есть диапазон возможных a уменьшился до целых чисел от 90 до 99.

Теперь рассмотрим корни уравнения при $a = 90$:

$$D = 8100 - 8088 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{-90 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -45 \pm \sqrt{3}$$

Эти корни тоже войдут в сумму ~~в~~ ~~в~~ корней. При их суммировании получаем:

$$x_1 + x_2 = -45 + \sqrt{3} + (-45 - \sqrt{3}) = -45 + \sqrt{3} - 45 - \sqrt{3} = -90, \text{ т.е. } = -a.$$

Так как в формуле нахождения корней квадратного уравнения возможно ~~$-a \pm \sqrt{D}$~~ $-a + \sqrt{D}$ и $-a - \sqrt{D}$, то при суммировании $+\sqrt{D}$ и $-\sqrt{D}$ взаимно уничтожаются, и останется только $\frac{-a}{2} + \frac{-a}{2}$ (рассматриваем для приведенного квадратного трехчлена, так как в задаче у нас приведенный. То есть его старший коэффициент = 1). А $\frac{-a}{2} + \frac{-a}{2} = -a$. Получается, что для нахождения искомой суммы надо сложить все целые числа от 90 до 99 и умножить на -1:

$$\begin{aligned} \text{Summ} &= -a_1 + (-a_2) + (-a_3) + \dots + (-a_9) = -\overset{+(-a_{10})}{(90+91+92+\dots+99)} = \\ &= -945 \end{aligned}$$

Ответ: -945

Чистовик. Лист 3 из 7

Задача 3

Введем новую переменную:

$$a = x + y, a \in \mathbb{N}$$

$$a(a+1) + y = \text{~~2022~~ 2022}$$

$$a^2 + a + y = \text{~~2022~~ 2022}$$

a^2 точно меньше 2022. Тогда ~~максимальное~~ ^{максимальное} подходящее значение a — это $a = 44$.

При $a = 44$:

$$1936 + 44 + y = 2022$$

$$y = 42$$

$$a = x + y = x + 42$$

$$x + 42 = 44$$

$$x = 2$$

При $a = 43$:

$$1849 + 43 + y = 2022$$

$$1892 + y = 2022$$

$$y = 130$$

($< a$)

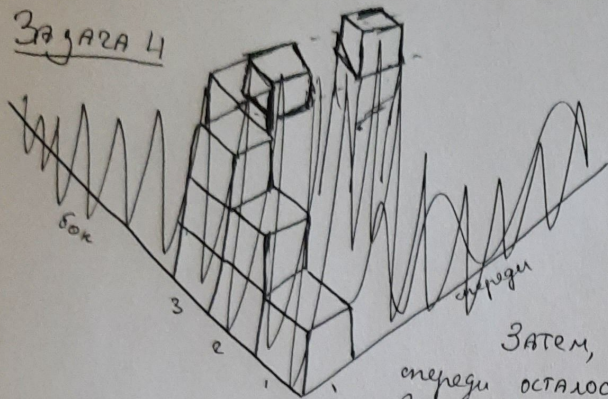
Однако y должен быть < 43 , чтобы x оставался натуральным. *

Итак, при уменьшении числа a , уменьшается и сумма $a^2 + a$, $\Rightarrow$ должен возрастать y . Однако, с другой стороны, так как уменьшается a , должен уменьшаться и y (так как и y , и x , и $a \in \mathbb{N}$). Противоречие.

$\Rightarrow$ единственная пара x и y , которая нам подходит, это $x = 2$ и $y = 42$

Ответ: (2; 42)

Задача 4



по приведенным в условии рисункам однозначно можно установить часть недостающего замка в объеме. То есть как минимум 3 кубика на виде сверху будет изображено ~~замком~~.

Затем, рассмотрим рисунки. На виде сверху осталось два столба по 3 кубика, а на виде сбоку — один. Один из них можно разместить сбоку, а один из этих столбов будет не видно.

Не имеет значения в каком порядке их расположить. Один из вариантов представлен у меня на рисунке. Также будем все столбы располагать «столбами», а не «лесенками», а потом, в случае чего, достроим до пертема.

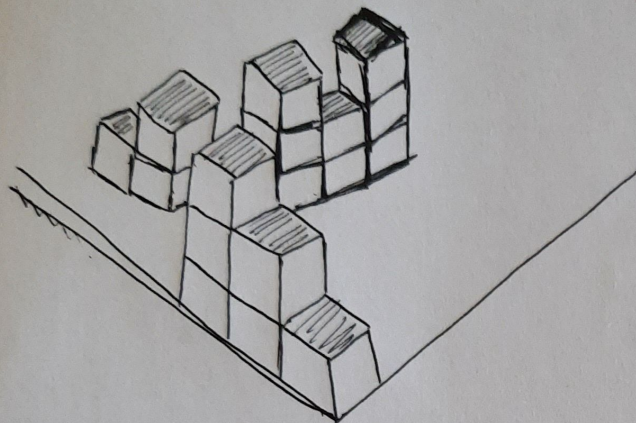
Еще нужно как-то расположить столбы, в которых по 2 кубика. Вариант тоже приведен у меня на рисунке. Стоя в виде сбоку остается крайний один кубик, который можно поставить независимо от вида сверху.

Получается, что всего понадобится, как видно из рисунка, ~~для~~ для вида сверху как минимум 8 кубиков

(рисунок на след. стр.)

Чистовик. Лист 5 из 7

(продолжение задачи 4)



— ЗАШТРИХОВАНО те грани
кубиков, которые попадают
на вид сверху.

Ответ: 8 кубиков

Чистовик. Лист 6 из 7

Задача 1

Пусть x_* - кол-во работ в 1-й день, v - производительность одного рабочего (участков в день). $x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

В 1-й день:

$$x \cdot v \cdot 1 = 10$$

Во 2-й день

$$7 \cdot v \cdot 0,5 = ?$$

$$3,5v = ?$$

Тогда, чтобы сделать работу, рабочим понадобится выкопать еще какое-то целое число участков. Это возможно, когда числитель числа v - четный. Также это должно быть не сократимая дробь.

Получается, что $v = \frac{y}{z}$ ($3,5 = \frac{7}{2}$, чтобы сократить с числителем дроби)

$$\text{Тогда } \frac{x \cdot y}{z} = 10, \quad \frac{7}{2} \cdot \frac{y}{z} = ?$$

$$xy = 70 \quad \frac{y}{z} = ?$$

Разложим 70 на множители: $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$. Единственное такое число — 2, т.е. $y = 2$.

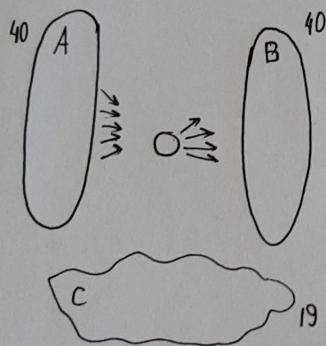
Тогда во второй день рабочие выкопали $\frac{7}{2} \cdot \frac{2}{7} = 1$ участку, а всего участков было $10 + 1 = 11$

Ответ: 11

Чистовик. Лист 7 из 7

Задача 6

Рассмотрим какую-либо одну планету. Из нее выходит 40 порталов, и в нее входит 40 порталов. Планеты, в которые входят и выходят из которых порталы в рассматриваемую планету, раз-
личны. И еще какие-то 19 планет напрямую с рассматриваемой планетой не связаны.



- Получается, что от Галатея-37 до Пандоры возможно 5 вариантов прощелков:
- I. Галатея-37 в группе (A) — 1 прощелок
 - II. Галатея-37 в группе (B), прощелок до группы (A), оттуда на Пандору — 2 прощелка
 - III. Галатея-37 в группе (B), прощелок до группы C, оттуда в группу (A) и на Пандору — 3 прощелка
 - IV. Галатея-37 в группе (C), прощелок до группы (A), оттуда на Пандору — 2 прощелка
 - V. Галатея-37 в группе (C), прощелок до группы (B), оттуда в группу (A) и на Пандору — 3 прощелка.

Ответ: 1, 2, или 3 прощелка (минимальное — 1)

ЧЕРНОВИК 1

1: 10

2: 7 чис; по: пр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...

3: 40, 80, 120, 160, 200, 240, 280, 320, 360, 400, 440, 480, 520, 560, 600, 640, 680, 720, 760, 800, 840, 880, 920, 960, 1000, 1040, 1080, 1120, 1160, 1200, 1240, 1280, 1320, 1360, 1400, 1440, 1480, 1520, 1560, 1600, 1640, 1680, 1720, 1760, 1800, 1840, 1880, 1920, 1960, 2000, 2040, 2080, 2120, 2160, 2200, 2240, 2280, 2320, 2360, 2400, 2440, 2480, 2520, 2560, 2600, 2640, 2680, 2720, 2760, 2800, 2840, 2880, 2920, 2960, 3000, 3040, 3080, 3120, 3160, 3200, 3240, 3280, 3320, 3360, 3400, 3440, 3480, 3520, 3560, 3600, 3640, 3680, 3720, 3760, 3800, 3840, 3880, 3920, 3960, 4000, 4040, 4080, 4120, 4160, 4200, 4240, 4280, 4320, 4360, 4400, 4440, 4480, 4520, 4560, 4600, 4640, 4680, 4720, 4760, 4800, 4840, 4880, 4920, 4960, 5000, 5040, 5080, 5120, 5160, 5200, 5240, 5280, 5320, 5360, 5400, 5440, 5480, 5520, 5560, 5600, 5640, 5680, 5720, 5760, 5800, 5840, 5880, 5920, 5960, 6000, 6040, 6080, 6120, 6160, 6200, 6240, 6280, 6320, 6360, 6400, 6440, 6480, 6520, 6560, 6600, 6640, 6680, 6720, 6760, 6800, 6840, 6880, 6920, 6960, 7000, 7040, 7080, 7120, 7160, 7200, 7240, 7280, 7320, 7360, 7400, 7440, 7480, 7520, 7560, 7600, 7640, 7680, 7720, 7760, 7800, 7840, 7880, 7920, 7960, 8000, 8040, 8080, 8120, 8160, 8200, 8240, 8280, 8320, 8360, 8400, 8440, 8480, 8520, 8560, 8600, 8640, 8680, 8720, 8760, 8800, 8840, 8880, 8920, 8960, 9000, 9040, 9080, 9120, 9160, 9200, 9240, 9280, 9320, 9360, 9400, 9440, 9480, 9520, 9560, 9600, 9640, 9680, 9720, 9760, 9800, 9840, 9880, 9920, 9960, 10000

$$x^2 + xy + x + xy + y^2 + y = 2022$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 2022$$

$$(x+y)^2 + x + y = 2022$$

$$abc - acb = 100a + 10b + c - 100a - 10c - b = 9b - 9c = 9(b-c)$$

$$72$$

$$144$$

$$0$$

$$43$$

$$43$$

$$129$$

$$172$$

$$1849$$

$$a = 90$$

$$D = 8100 - 8088 = 12$$

$$x = \frac{-90 \pm \sqrt{12}}{2} = -45 \pm \sqrt{3}$$

$$a = 91$$

$$8281 - 8088 = 193$$

$$x = \frac{-91 \pm \sqrt{193}}{2} = -45.5 \pm \sqrt{193}$$

$$(x+y)(x+y+1) + 1 = 2022$$

$$a(a+1) + y = 2022$$

$$a^2 + a + y = 2022$$

$$(x+y)^2 + x + 2y = 2022$$

$$\frac{-1 + \sqrt{8089 - 4y}}{2}$$

$$20$$

$$-1 + \sqrt{8089 - 4y} > 0$$

$$y < 2022.5$$

$$(x+y)(x+y+1) + y = 2022$$

$$x+y=a$$

$$a(a+1) + y = 2022$$

$$a^2 + a + y = 2022$$

$$a^2 + a + y - 2022 = 0$$

$$D = 1 + 4y + 8088 = 8089 - 4y$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$abc - acb = 100a + 10b + c - 100a - 10c - b = 9b - 9c = 9(b-c)$$

$$9(b-c) = 72$$

$$(b-c) = 8$$

$$b \in [0, 9]$$

$$c \in [0, 9]$$

$$b = 9, c = 1$$

$$b = 8, c = 0$$

$$a = 0$$

$$x^2 + 2022 = 0$$

$$x^2 + x + 2022 = 0$$

$$a^2 - 8088 < 0$$

$$a^2 \geq 8088$$

$$a \geq 90$$

$$(90+99) \cdot 5 = 189 \cdot 5$$

$$22$$

$$22$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$

$$44$$



$$8089 \cdot 4$$

$$a^2 + a + x = 2022$$

$$1936 + 44 + 42 = 2022$$

$$y = 42$$

$$x = 2$$

$$4y < 8089$$

$$y < 2022.5$$

$$\sqrt{8089 - 4y} > 1$$

$$8089 - 4y > 1$$

$$94 < 2022$$

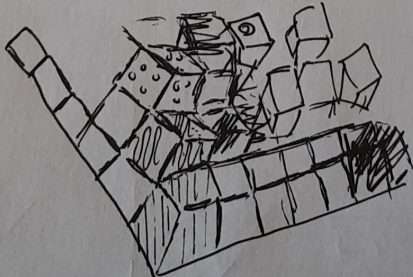
$$y < 2022$$

ЧЕРНОВИК 2

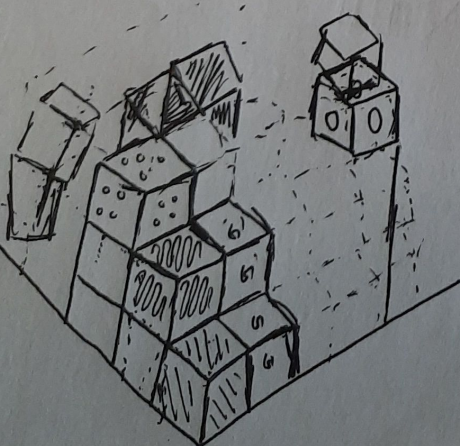
1	2	3
6	5	4
5	4	3
4	3	2

1	2	3
6	5	4
5	4	3
4	3	2

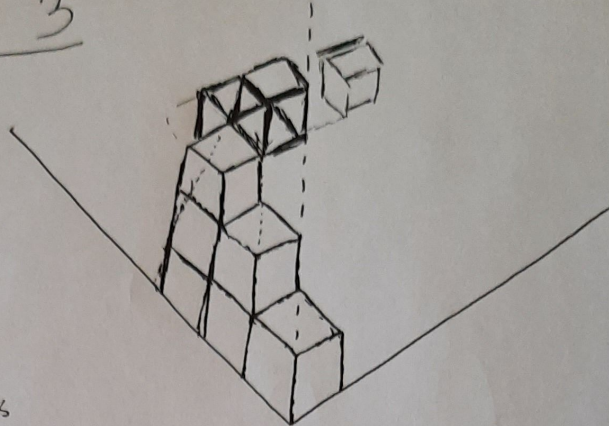
1	2	3	4	5
6	5	4	3	2
5	4	3	2	1
4	3	2	1	0



8 9
10 11
12 13
14 15



ЧЕРНОВИК 3



$$\frac{4}{7} \cdot 10 = 5.71$$

$$4x = 70$$

$$\frac{4}{7} \cdot x = 10$$

$$\frac{1}{8} \cdot 10 = 1.25$$

$$\frac{1}{4} \cdot 10 = 2.5$$

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{9}{7} = 9$$



10 - чужок / день

$$x \cdot 10 = 10$$

$$70 \cdot 0.5 = 35$$

$$x \cdot 10 = 10$$

$$3.5 \cdot 10 = 35$$

$$10 + y = ?$$

10 - чужок

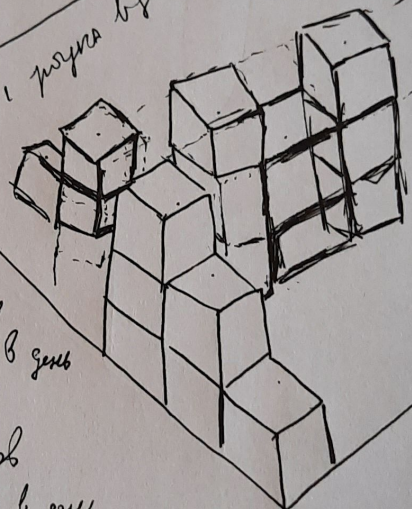
$$x \cdot 10 = 10$$

$$3.5 \cdot 10 = 35$$

3.5 работникова
1 чужок в день

10 работникова
1 чужок в день

7 работникова
1 чужок в день



$$\begin{array}{r|l} 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \end{array}$$

$$\frac{8}{7} = 1.14$$

$$x = 0.5$$

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot 10 = 10$$

$$0.5 = 70$$

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{x}{7} = \frac{x}{2}$$

$$x = 2$$

$$\frac{2}{7} \cdot 10 = 2.86$$

$$24 = 70$$

$$y = 35$$

$$\frac{x}{7} \cdot y = 10$$

$$10 = 70$$

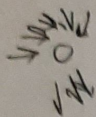
3.5 - чужок

$$10 : 2 = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} 35 \cdot \frac{2}{7} = 10 \\ 7 \cdot \frac{2}{7} = 1 \end{array} \right\} \parallel$$

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{14}$$

ЧЕРТОВИК 1



1, 2, 3

