МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**
Профиль олимпиады: **Математика**
ФИО участника олимпиады: **Левин Марк Романович**
Класс: **10-11**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Левин Марк Романович

Класс: 10-11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Тех. балл***
10 баллов	20 баллов	20 баллов	15 баллов	0 баллов	20 баллов	85 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.
Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.
Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

Черновик стр.1.

№1

6, 7, 8, 9, 10, ...

$100 = 10000$

$46 \times 46 = 2116$

$45 \times 45 = 225 + 180 = 2025$

$(50-1)^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401$

$x^2 > 2022$

$50 \times 50 = 2500$

$48^2 = 48 \times 48 = 384 + 192 = 2304$

$x^3 > 2022$

$3, \ldots 45^2$

$15 \cdot 15 = 225$

$2^0 \ldots 15^3$

$225 \times 15 = 1125 + 125 = 2375$

$196 \times 14 = 784 + 196 = 2744$

$14 \times 14 = 56 + 14 = 196$

$3^2 - 44^2$

$2^3 - 13^3$

$169 \times 13 = 507 + 169 = 2197$

$x^2 = y^3 = z^6$

$2^6 = 64$

$3^6 = 9^3$

$4^6 = 16^3$

$2197 - 2 = 45^2$

$44 \times 44 = 176 + 176 = 1936$

$42 + 12 - 2 = 52$

$2022 + 5 = 2027$

$3^2 \ldots 45^2$

$144 \times 12 = 288 + 144 = 1728$

$169 \times 13 = 507 + 169 = 2197$

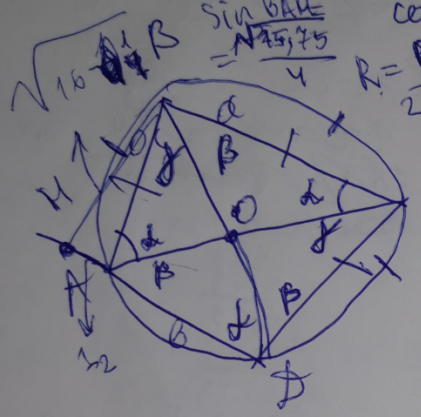
Черновик стр 2.

№2

$(2x+1)(2x-3)(2x+3)$

$(8x^3+4x^2-18x-9)\cdot\arccos(x-1)\le\arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$

$\frac{1}{2}\sin 40$ $\quad$ $\sin 30$



$\sqrt{16-1}$

$\sin BAH = \frac{\sqrt{15,75}}{4}$

$R = \frac{BD}{2\sin\angle BAD} = \frac{6}{2\cdot\frac{\sqrt{15,75}}{4}} = \frac{12}{\sqrt{15,75}}$

$\cos 40^\circ = \frac{1}{4\cos\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos(\frac{90}{2}-\frac{1}{2})}$

$\frac{1}{4\cos 40} + \frac{\sqrt{3}}{4\sin 130}$

R – ?

AB; AD; BD; AC – целые

3AB + AD – min.

$a_{n+1} = (a_n-1)^3+1$

$a_1 = \frac{4043}{2022}$ $\quad a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$

Сущ. ли n такое, что $|a_n| \le \frac{2022}{2021} = 1+\frac{1}{2021}$

$a_{n+1} = (a_n-1)^3+1$

$a_1 = \frac{4043}{2022}$ $\quad |a_n| \le \frac{2021}{2021}$

$a - b$

$2021a - 2022b$

$a_2 = \left(\frac{4043}{2022}-1\right)^3+1 =$

$= \left(\frac{2021}{2022}\right)^3+1$

$\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3k}+1 \le 1+\frac{1}{2021}$

$2021^{3n+1} \le 2022^{3n}$

$\frac{2021^{3n}}{2022^{3n}} \le \frac{1}{2021}$ $\quad \frac{2021^{3n}}{2022^{3n}} \le 1$

$x^{k+1} \le (x+1)^k$

$(1+n)^x \ge 1+nx$

$(x-1)^3 \le \frac{1}{2021}$

$x-1 \le \sqrt[3]{\frac{1}{2021}}$

$x \ge \sqrt[3]{\ } + 1$

$\frac{2021}{2022}$

$(2021)^2$

2021

2022

1

2020

$\frac{1}{2}$

$\times 2021$

2021

$+4042$

$+0000$

$+4042$

$4086441 - 2022$

$0,999$

$\times 2022$

1998

1998

1998

$2019,978$

$0,9999$

2022

$\times 0,9$

1998

1998

$2021,98$

$0,9$

$\times 2022$

$1,9998$

черновик стр 3.

$|x^3+2x^2+x+a| + |x^3-2x^2+x-a| \leq 4x^2+8x$

т.к. $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$, то

$|2x^3+2x| \leq 4x^2+8x <$ правая

$2x^3+2x <$ прав. части $\quad x \in (0;3)$

$x>0$

$x<0$ — нет нет

$x(x^2+2x+5) > 0 \ \forall x$

$x = 3$

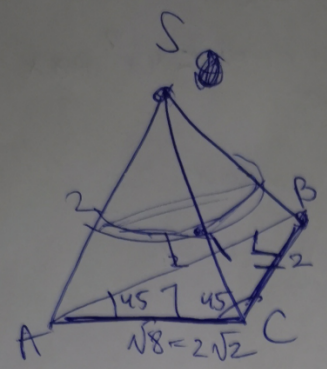
$x \cdot (x+1)^2 = 48$

$x(x-1)^2 = 12$

$x = 3$

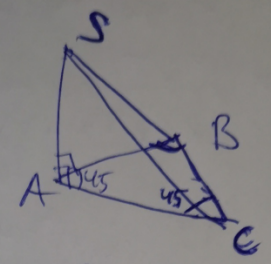
Черновик стр 4.

$c^2 \neq$ окв 4



ΔBOC ΔAOD $AC = BD$

$SA = AB = 2$



№3. Нерво-проблемы

R

$\sin 100 = 1$

$\sin 80$

$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x$

$(8; -24)$ $\frac{\text{скобки}}{2}$

$P = 17$

Ответ: $[0; 1,5] \cup \{2\}$ $\frac{(x+0,5)(x-1,5)(x+1,5)\cdot arc}{(3a > b)} < 0$ все a

$c > b$, $a \geq 4$;

нерво или

$arcsin(x-1) \geq 0$ обл. опр. arc. $P_2 > P_{6;4;5}$

$c = 6$; $a = 4$, $b = 5$

$x = 1$ $x - 1 \in [-1; 1]$ Эт. равн. трап.

при $x \geq 2$ левo $= 0$. $0 \leq x \leq 2$

в) $c = 6$

1) $a = 1$ $b = 35$ $b > 3a$ –

2) $a = 2$ $b = 16$ –

3) $a = 3$ $b = 9$ $b = 3a$ –

4) $a = 4$ $b = 5$ +

$AB = a$

$AD = b$

пот. Пт.

$c^2 = a^2 + ab = a \cdot (a + b)$

т.к. нечет.

$AC = BD = c$

$b \geq 1$

$a \leq c$; $c \leq a$; $c = b$

5) $c = 5$

$a = 1$

$b = 24$

$b > 3a$ –

2) $c = 3$

$a = 1$

$b = 8$

$b > 3a$ – 1

$c = 2$ $a = 1$; $b = 3$

нен-ву лом

$AB + BC + CD \geq AD$

$3a > b$

$3a = b$ –

$b = 3a$ –

3) $c = 4$ $b > 3a$

$a = 1$ $b = 15$

4) $c = 4$

$a = 2$ $b = 6$

Вариант 11 – I чистовик стр. 1

Задача №1.

Для начала заметим, что если мы не будем удалять все квадраты и кубы натуральных чисел, то на 2022-м месте изначально стоит число 2027 (т.к. последовательность начинается с 6). Заметим далее, что $3^2 < 4^2 < \ldots < 45^2 < 2027 < 46^2$; ($45^2 = 2025$; $46^2 = 2116$); поэтому, среди квадратов, как минимум, должны быть удалены $3^2, \ldots 45^2$. Заметим также, что $2^3 < 3^3 < \ldots < 12^3 < 2027 < 13^3$ ($12^3 = 1728$; $13^3 = 2197$)

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 46 \\ \hline 276 \\ +184 \\ \hline 2116 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times\ 13 \\ \hline 507 \\ +169 \\ \hline 2197 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 144 \\ \times\ 12 \\ \hline 288 \\ +144 \\ \hline 1728 \end{array}$$

Поэтому, среди кубов, как минимум, должны быть удалены кубы: $2^3, \ldots 12^3$.

Заметим, что между множествами удалённых кубов и удалённых квадратов есть пересечение; а именно, число a^6 в квадратах записано как $(a^3)^2$, а в кубах – как $(a^2)^3$; т.е. при вычитании ненужного числа квадратов и кубов, шестые степени вычитутся дважды; Заметим, что это числа 3^6 ($3^6 = 9^3 = 27^2$); 2^6 не подходит, т.к. нету 4^3 (последовательность начинается с 6); 4^6 не подходит, т.к. $4^6 = (4^2)^3 = 16^3 > 13^3$. Поэтому, в пересечении только 3^6.

по формуле включений – исключений получаем, что:

$2027 + 43 + 11 - 1 = 2027 + 53 = 2080$, т.е. на 2022 месте будет стоять 2080. При этом, т.к. $2080 < 13^3$; $2080 < 46^2$, то числа 46^2 и 13^3 не будут удалены; значит, будут удалены $3^2; \ldots 45^2$; $2^3; \ldots 12^3$, при этом $3^6 = 9^3 = 27^2$ будет удалено 1 раз; значит, на 2022 месте будет стоять 2080.

Ответ: 2080.

чистовик стр 2

Задача №2.

$$(8x^3+4x^2-18x-9)\cdot\arccos(x-1)\le\arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$$

Заметим, что многочлен раскладывается нас:

$8x^3+4x^2-18x-9=(2x+1)(2x-3)(2x+3)$ (если раскрыть скобки, то сойдётся).

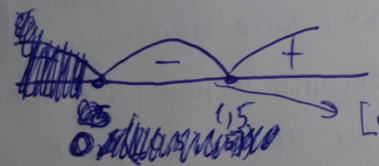
Теперь рассмотрим правую часть неравенства.

$$\arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)=\arccos\left(\frac{\sin 100^\circ}{\sin 80^\circ}\right)=\arccos(1)=$$

$=0$; то есть правая часть равна 0. Заметим, что $\arccos(x-1)$ – неотрицательное число; из обл. опред. $\arccos(x-1)$ получаем, что $x-1\in[-1;1]$, т.е. $0\le x\le 2$; Причём, если $x=2$, то получим, что $0\le 0$; Пусть $x\ne 2$, тогда $\arccos(x-1)\ne 0$; Тогда разделим правую часть на 2 и сделаем по методу интервалов:

$(x+0,5)(x-1,5)(x+1,5)\cdot\arccos(x-1)\le 0$; т.к. $\arccos(x-1)>0$ $(x\ne 2)$

$(x+0,5)(x-1,5)(x+1,5)\le 0$



(учитываем, что $0\le x\le 2$), Поэтому $[0;1,5]$

Ответ: $x\in[0;1,5]\cup\{2\}$.

Задача №4.

Ответ: да, найдётся.

Решение: Заметим, что $a_n+1=(a_n-1)^3+1$ (исходя из формулы куба разности). Тогда, т.к. $a_1=1+\frac{2021}{2022}$, то

$a_2=\left(\frac{2021}{2022}\right)^3+1$; $a_3=\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3\cdot 2}+1$, ...

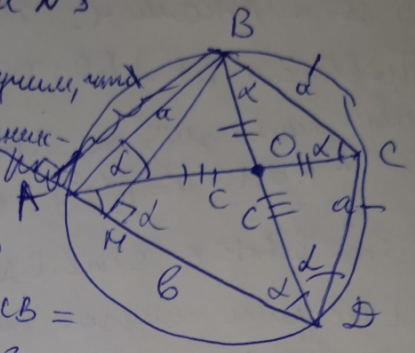
$a_n=\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3\cdot(n-1)}+1$ (при $n>1$); При этом, $a_n>0$;

Перейдём к вопросу задачи. Заметим, что

$|O_n| \le \frac{2022}{2021} \Leftrightarrow 1+\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3(n-1)} \le 1+\frac{1}{2021} \Leftrightarrow \frac{2021^{3(n-1)+1}}{2022^{3(n-1)}} \le 1$,

а это верно при достаточно больших n (т.к. убывает).

Задача №3



Пусть $\angle BAC = \alpha$; тогда, получим, что $\angle BAC = \angle BDC$ (т.к. четырёхугольник вписанный); т.к. $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$ – равнобедренные, то

$\angle BAC = \angle BDC = \angle DBC = \angle ACB = \angle CAB = \angle BDA = \alpha$; значит, $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ – равнобедренные, $\Rightarrow AC = BD$.

Пусть $AB = BC = CD = a$; $AD = b$; $AC = BD = c$,

Тогда по т. Птолемея:

$c^2 = a^2 + ab = a(a+b)$; т.к. a, b, c – натуральные, то $b \ge 1$;

$a \le c$; $a + b \le c$; Заметим, что по нер-ву ломаной,

$AB + BC + CD > AD \Leftrightarrow 3a > b$; $c > 1$ (т.к. $a \ge 1$ и $b \ge 1$);

Разберём случаи:

1) $c=2$; $a=1$; $b=3$
$3a = b$, поэтому не подходит

2) $c=3$; $a=1$; $b=8$
$b > 3a$ – не подх.

3) $c=4$; $a=1$; $b=15$
$b > 3a$, противоречие

4) $c=5$; $a=1$; $b=24$
$b > 3a$ – противоречие

5) $c=6$
1) $a=1$; $b=35$ – $b > 3a$ –
2) $a=2$; $b=16$ – $b > 3a$; –
3) $a=3$; $b=9 \Rightarrow b = 3a$; –
4) $a=4$; $b=5$ + – единственный подходящий $c=6$; $a=4$; $b=5$.

Если $c > 6$, то $a \ge 4$, а значит периметр будет больше (не наименьший).

Тогда $a=4$; $b=5$, $P = 3 \cdot 4 + 5 = 17$.

чистовик стр 4.

~~Найдём~~ R; ~~Проведём~~ $BH \perp AD$; ~~Тогда~~ $BH =$

Причём, такой четырёхугольник существует — (вписанная) равнобедренная трапеция с основаниями 5 и сторонами 4. Найдём радиус окружности.

Проведём $BH \perp AD$; Тогда, т.к. $AD = 5$; $BC = 4$ и это равн. трапеция, то $AH = \frac{1}{2}$; Тогда, по Т. Пифагора для $\triangle ABH$: $4^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + BH^2$, откуда $BH = \sqrt{16 - \frac{1}{4}}$

~~$\sin\angle BAH =$~~ $\sin\angle BAD = \sin\angle BAH = \frac{\sqrt{15{,}75}}{4}$ тогда по теореме синусов найдём R от. окр (для $\triangle ABD$): $\left(2R = \frac{BD}{\sin\angle BAD}\right)$:

$2R = \frac{a}{\sin\alpha}$, откуда

$$R = \frac{6 \cdot 4}{2 \cdot \sqrt{15{,}75}} = \frac{12}{\sqrt{15{,}75}}$$

Ответ: $R = \frac{12}{\sqrt{15{,}75}}$

Задача №6.

$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x$; Заметим, что, поскольку, $|a+b| \le |a| + |b|$, то получим, что:

$$4x^2 + 8x > \underbrace{|x^3 + 2x^2 + x + a|}_{|a|} + \underbrace{|x^3 - 2x^2 + x - a|}_{|b|} \ge \underbrace{|2x^3 + 2x|}_{|a+b|}, \text{ то есть,}$$

$|2x^3 + 2x| < 4x^2 + 8x$.

1) $x < 0$, тогда $|2x^3 + 2x| = -2x^3 - 2x$, тогда:

$-2x^3 - 2x < 4x^2 + 8x \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 10x > 0 \Leftrightarrow$

$2x(x^2 + 2x + 5) > 0$, т.е. $x(x^2 + 2x + 5) > 0$

Но при $x < 0$ корней нет. Тогда $x > 0$, и

$2x^3 + 2x < 4x^2 + 8x$

$4x^2 + 8x - 2x^3 - 2x > 0 \Leftrightarrow 2x(-x^2 + 3 + 2x) > 0$

Т.к. $x > 0$, то $2x > 0$, а значит оно не влияет на знак. Тогда:

$-x^2 + 3 + 2x > 0$, т.е. $x^2 - 3 - 2x < 0$;

$x^2 - 3 - 2x = 0$, т.е. $x^2 - 2x - 3 = 0$

по т. Виета: $x_1 x_2 = -3$; $x_1 + x_2 = 2$;

$x_1 = 3$; $x_2 = -1$; ; но ранее получили, что $x > 0$,

Значит, $x \in (0; 3)$.

$|2x^3 + 2x^2 + x + a| = |x(x+1)^2 + a|$;

$|2x^3 - 2x^2 + x - a| = |x(x-1)^2 - a|$ – Если подставить $a = 8$, то отрез 1; $a = 8$ под

Если $x = 3$, то $x(x-1)^2 = 12$; $x(x+1)^2 = 48$, т.е.

$|48 + a| + |12 - a| < 50$ $a = -24$

Ответ: 8; -24

черновик стр 3.

$$|x^3+2x^2+x+a| + |x^3-2x^2+x-a| \leq 4x^2+8x$$

т.к. $|a+b| \leq |a|+|b|$, то

$|2x^3+2x| \leq 4x^2+8x <$ правая

$2x^3+2x <$ прав. части $\quad x \in (0;3)$

$x>0$
$x<0$ — реш нет

$x(x^2+2x+5) > 0 \ \forall x$

$x = 3$

$x \cdot (x+1)^2 = 48$

$x(x-1)^2 = 12$

$x = 3$