



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Куренков Дмитрий Александрович**

Класс: **10-11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Куренков Дмитрий Александрович

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	0 баллов	80 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

Б - 11-1

Условие

лист 1/

$$(N2) \quad (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$$

1) Т.к. в неравенстве $\arccos(x-1)$, то
 $-1 \leq x-1 \leq 1$,
 а значит $x \in [0; 2]$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right) = \\ & = \arccos\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2} \cos 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 40^\circ}{\cos 40^\circ \cdot \cos 50^\circ} \right)\right) = \\ & = \arccos\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 50^\circ + \cos 30^\circ \cdot \cos 40^\circ}{\cos(50^\circ - 40^\circ) + \cos(50^\circ + 40^\circ)} \right)\right) = \\ & = \arccos\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 50^\circ + \cos 30^\circ \cdot \cos 40^\circ}{\cos 90^\circ + \cos 10^\circ} \right)\right). \end{aligned}$$

Т.к. $\cos 50^\circ = \sin 40^\circ$, то

$$\begin{aligned} & \arccos\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 50^\circ + \cos 30^\circ \cdot \cos 40^\circ}{\cos 90^\circ + \cos 10^\circ} \right)\right) = \\ & = \arccos\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\sin 30^\circ \cdot \sin 40^\circ + \cos 30^\circ \cdot \cos 40^\circ}{\cos 90^\circ + \cos 10^\circ} \right)\right) = \\ & = \arccos\left(\frac{\cos(40^\circ - 30^\circ)}{0 + \cos 10^\circ}\right) = \arccos\left(\frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}\right) = \\ & = \arccos 1 = 0 \end{aligned}$$

$$3) (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq 0$$

Разложим на множители $8x^3 + 4x^2 - 18x - 9$:

$$\begin{aligned} 8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 &= 4x^2(2x+1) - 9(2x+1) = \\ &= (4x^2 - 9)(2x+1) = ((2x)^2 - 3^2)(2x+1) = \\ &= (2x-3)(2x+3)(2x+1) = 8(x-1,5)(x+1,5)(x+0,5) \end{aligned}$$

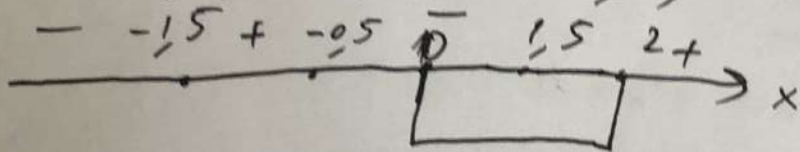
$$\bullet \arccos(x-1) \geq 0, \text{ ели } x-1 \geq 0 \Rightarrow x \in [0; 2]$$

$$\Rightarrow \text{нм } \arccos(x-1) \geq 0$$

Тогда нм $x \in [1; 2]$:

$$8(x-1,5)(x+1,5)(x+0,5) \leq 0$$

$$(x-1,5)(x+1,5)(x+0,5) \leq 0$$



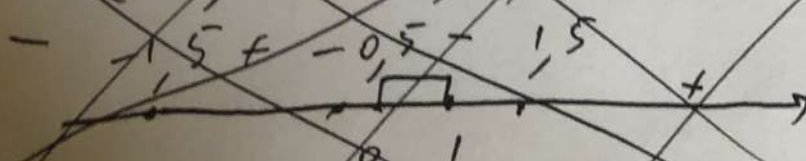
$$\text{Значит } x \in [0, 1,5]$$

$$\bullet \arccos(x-1) \leq 0, \text{ ели } x-1 \leq 0, \text{ тогда}$$

$$\text{нм } x \in [0; 1]:$$

$$8(x-1,5)(x+1,5)(x+0,5) \geq 0$$

$$(x-1,5)(x+1,5)(x+0,5) \geq 0$$



$$x = 0$$

Честовик

лист 3/

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - 1,5)(x + 1,5)(x + 0,5) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1,5; x = -0,5; x = -1,5, \text{ но с учетом } \text{того, что } x \in [0; 2]: x = 1,5$$

$$\arccos(x-1) = 0 \Rightarrow x-1 = 1 \Rightarrow x = 2$$

значит:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1,5 \\ \begin{cases} x \leq 1,5 \\ x \geq 0 \end{cases} \\ x \leq 2 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow x \in [0; 1,5] \cup \{2\}$$

Ответ: $[0; 1,5] \cup \{2\}$

21) числа $6, 7, 8, \dots$ - бесконечная арифметическая прогрессия, 1-ый элемент которой $a_1 = 6$, а шаг $b = 1$, тогда до того как уберем квадраты и кубы чисел:

$$a_{2022} = a_1 + (2022 - 1) \cdot b = 6 + 2021 = 2027$$

После удаления элементов: $a_{2022} = k$, тогда

$$k - 2027 = S_2 + S_3 - S_6, \text{ где}$$

S_2 - кол-во чисел, являющихся квадратами другого числа и ~~меньше~~ ~~на~~ ~~большее~~ 5, но меньше k , S_3 - кубов, S_6 - чисел 6-ой степени.

Исчисляем S_2 : Чистовик

лист 7/
лист 4/

$$2^2 = 4 \text{ (не подх)}$$

$$2^3 = 8 \text{ (подх)} \quad 3^2 = 9 \text{ (подходит)}$$

...

$$45^2 = 2025 \text{ (подходит)}$$

$$46^2 = 2116 \text{ (не подходит)}$$

Таким образом

$$S_2 = 45 - 3 + 1 = 42 + 1 = 43$$

Исчисляем S_3 :

$$1^3 = 1 \text{ (не подх)}$$

$$2^3 = 8 \text{ (подходит)}$$

...

$$12^3 = 1728 \text{ (подходит)}$$

$$13^3 = 2197 \text{ (не подходит)}$$

Таким образом $S_3 = 12 - 2 + 1 = 11$

Исчисляем S_6 :

$$1^6 = 1 \text{ (не подходит)}$$

$$2^6 = 64 \text{ (подходит)}$$

$$3^6 = 729 \text{ (подходит)}$$

$$4^6 = 4096 \text{ (не подходит)}$$

Таким образом

$$S_6 = 2$$

Числовик

мет 5/

Получаем, что:

$$K - 2027 = 43 + 11 - 2$$

$$K = 2027 + 52 = 2079$$

Отверстие: 2079

~4

$$a_1 = \frac{4043}{2022} = 2 - \frac{1}{2022}$$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$$

Найдём максимум n , что

$$|a_n| \leq \frac{2022}{2021} \Rightarrow |a_n| \leq 1 + \frac{1}{2021}$$

$$1) a_n > 0.$$

$$a) a_n > 0$$

$$b) a_{n+1} = a_n (a_n^2 - 3a_n + 3)$$

$$a_n^2 - 3a_n + 3 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 3 = 9 - 12 = -3 < 0$$

 $\Rightarrow D < 0$, ат.к. перега a_n^2 смонит

$$, \text{ но } a_n^2 - 3a_n + 3 > 0,$$

$$\text{значит } a_{n+1} > 0$$

$$2) \text{ Докажем, что } a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n < a_n$$

$$a_n^3 - 3a_n^2 + 2a_n < 0$$

Условие

метод

$$a_n(a_n^2 - 3a_n + 2) < 0$$

~~т.к. $a_n > 0$~~

$$a_n(a_n - 1)(a_n - 2) < 0 \Rightarrow \text{т.к. } a_n > 0,$$

$$\text{то } (a_n - 1)(a_n - 2) < 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} & + & 1 & - & 2 & + & \\ & & \circ & & \circ & & \\ & & & & & & \rightarrow a_n \end{array}$$

$a_n \in (1; 2)$, поэтому нужно показать, что $a_n > 1$

3) Заметим, что $a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n =$
 $= a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n - 1 + 1 = (a_n - 1)^3 + 1$

~~Покажем, что $a_n > 1$ по индукции~~

Пусть $a_n > 1$, тогда докажем, что $a_{n+1} > 1$:

$$a_{n+1} = (a_n - 1)^3 + 1, \text{ т.к. } a_n > 1, \text{ то } a_n - 1 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_n - 1)^3 > 0 \Rightarrow (a_n - 1)^3 + 1 > 1 \Rightarrow a_{n+1} > 1,$$

$$\text{т.к. } a_1 = \frac{4043}{2022} > 1, \text{ то можно утверждать,}$$

что $a_n > 1$

4) Покажем, что $a_{n+1} < a_n$ и $a_n \in (1; 2)$.

то есть a_n убывает и $f(a_n) = (a_n - 1)^3 + 1$

сближается к 1

$$(a_n - 1)^3 + 1 < a_n \text{ на } (1; 2)$$

Условие или 7/

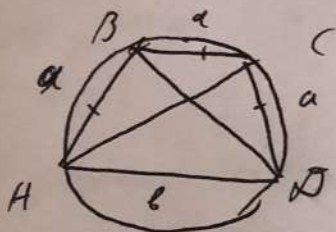
Заметим, что $(x-1)^3 + 1 = 1$, только
при $x=1$

А значит это условие

Остаток: 0

Условие м. 8)

№ 3



$$AB = BC = CD = a$$

$$\angle B = \alpha; \angle C = \beta;$$

$$AD = b$$

$ABCD$ - вписанный $\Rightarrow \angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$

По т. косинусов:

$$\begin{aligned} AC^2 &= 2a^2(1 - \cos \alpha) \\ AC^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \cos \beta \\ BD^2 &= 2a^2(1 - \cos \beta) \end{aligned} \Rightarrow$$

$$BD^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2 + 2ab \cos \alpha = a^2 - 2a^2 \cos \alpha \\ b^2 + 2ab \cos \beta = a^2 - 2a^2 \cos \beta \end{cases}$$

α, β - решения уравнений:

$$\cos x = \frac{a^2 - b^2}{2ab + 2a^2} = \frac{a - b}{2a} \text{ на интервале } (0; \pi)$$

Исходя из области значений косинуса при

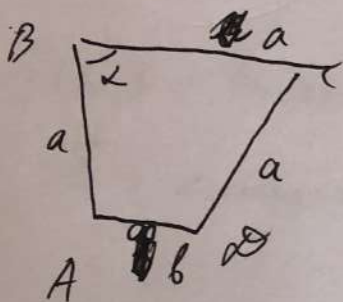
$$x \in (0; \pi) \text{ имеем: } \frac{a - b}{2a} \in (-1; 1).$$

Поскольку из условия вытекает, что $\alpha = \beta$, то есть.

Числовых мест 9/

ABCD это либо квадрат, либо р/б параллельная.
 Но если квадрат, то $AC = a\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$, но a зная-
 зная ABCD - равнобедренная параллельная.

Пусть $b < a \Rightarrow \alpha < \frac{\pi}{2} \cdot (\Rightarrow a \geq 2)$



Условие: $a, b \in \mathbb{Z}$
 $AC = 2a \sin \frac{\alpha}{2} \in \mathbb{Z}$

$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{2a}, m \in \mathbb{Z}$

$m^2 = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$ - не

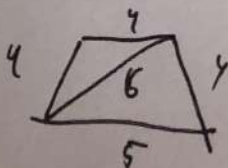
$a = 3 \Rightarrow b = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8$

$m^2 = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 33 \\ 15 & 27 \\ 21 & 30 \end{bmatrix}$ - не

$a = 4 \Rightarrow b = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$
 $m^2 = \begin{bmatrix} 20 & 24 & 36 \\ 24 & 36 \\ 28 \end{bmatrix} \Rightarrow a = 4, b = 5$

и нельзя быть не может, но

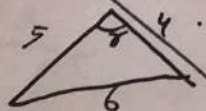
$P(a, b) = 3a + b$ монотонно возрастает по a и b



~~Упражнение 10/~~
~~астрономия~~

$$P = 4 \cdot 3 + 5 = 12 + 5 = \boxed{17}$$

~~Тогда из Δ:~~



$$\cos \theta = \frac{5^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{25 + 16 - 36}{40} =$$

$$= \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} =$$

$$R_{\text{on orig}} = \frac{a d c}{4 \sqrt{(p-a)(p-d)(p-c)}} \approx$$

$$p = \frac{1}{2} (4 + 6 + 5) = \frac{15}{2}$$

$$a d c = 4 \cdot 6 \cdot 5 = 120$$

$$p - a = \frac{7}{2}$$

$$p - d = \frac{3}{2}$$

$$p - c = \frac{5}{2}$$

$$R = \frac{120}{4 \sqrt{\frac{15}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}} = \frac{24}{\sqrt{63}}$$

$$\text{Омберн: } \frac{24}{\sqrt{63}}$$

Умножив на 11/

(25)

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| \leq 4x^2 + 8x$$

$$|x(x^2 + 1)^2 + a \frac{4}{3} + x(x-1)^2 - a| =$$

$$= |x((x+1)^2 + (x-1)^2)|$$

Отсюда

$$4x^2 + 8x \geq |x((x+1)^2 + (x-1)^2)|$$

$$4x^2 + 8x = 4x(x+2)$$

$$x(x+2) = 0$$

отсюда x не принадлежит $[0; 2]$
 покажем, что x не принадлежит -2
 при $x < -2$:

$$|x((x+1)^2 + (x-1)^2)| =$$

$$= -x((x+1)^2 + (x-1)^2) \geq -x((x+1)^2 + (x-1)^2) \geq$$

$$-(-2) \cdot 2 \cdot (x+1)^2 = 4(x+1)^2 =$$

$$= 4x^2 + 8x + 4 > 4x^2 + 8x$$

$$\cos(x-9) \text{ arc } \cos(x-1) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos 40^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Чепробук

1/

(21) $a_1 = 6; b = 1$

$$a_{2022} = 6 + (2022 - 1) \cdot 1 =$$

~~22~~ $\frac{6 + 2021 = 2027}{3 = 9 \dots}$

$$\sqrt{2027} =$$

$$= \sqrt{201600 + 4027} =$$

$$= \sqrt{40^2 +}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 46 \\ \times 1 \\ \hline 1276 \\ 184 \\ \hline 2116 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ 250 \\ \times 250 \\ \hline 125 \\ 50 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 45 \\ \times 45 \\ \hline 1225 \\ 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$45^2 < 2027 < 46^2$$

$3^2, 4^2, 5^2, \dots, 45^2$ - $\frac{45^2}{2} = 1012.5$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 16 \\ \times 4 \\ \hline 64 \end{array}$$

$45 - 3 + 1 = 43$ $\frac{45^2}{2} = 1012.5$

$$2027 + 43 = 2030 + 40 = 2070$$

$$10^3 = 1000$$

$$20^3 = 8000$$

$$\begin{array}{r} 15^3 = 225 \\ \times 15 \\ \hline 1125 \\ 225 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 27 \\ \times 27 \\ \hline 189 \\ 54 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 27 \\ \times 27 \\ \hline 189 \\ 54 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 12 \\ \hline 168 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 12 \\ \hline 168 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 169 \\ \times 13 \\ \hline 1507 \\ 169 \\ \hline 2197 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 169 \\ \times 13 \\ \hline 1507 \\ 169 \\ \hline 2197 \end{array}$$

$$2^6 = 64$$

$$3^6 = 729$$

$\frac{45^2}{2} = 1012.5$

$$a_{2022} = 2070 + 11 = 2081$$

$$\frac{45^2}{2} = 1012.5$$

$$4^6 = 2^{12} = 1024 \cdot 4 = 4096$$

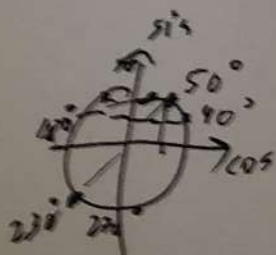
$$\text{Ответ: } 2081 - 2 = 2079$$

Упроблема

2/

$$(N2) (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right) \quad (=0)$$

$$\cos 40^\circ = \cos(90^\circ - 50^\circ) = \sin 50^\circ$$



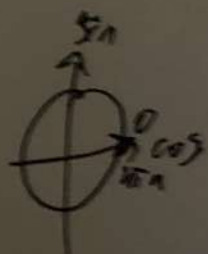
$$\frac{1}{4\sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{\cos 50^\circ} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\cos 50^\circ + \sqrt{3} \sin 50^\circ}{\sin 50^\circ \cos 50^\circ} \right) =$$

$$= \frac{\sin 30^\circ \cos 50^\circ + \cos 30^\circ \sin 50^\circ}{\sin 100^\circ} = \frac{\sin(50^\circ + 30^\circ)}{\sin 100^\circ}$$

$$= \frac{\sin 80^\circ}{\sin 100^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 100^\circ)}{\sin 100^\circ} = \frac{\sin 100^\circ}{\sin 100^\circ} = 1$$



$$\arccos 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq 0$$

$$4x^2(2x+1) - 9(2x+1) = (4x^2 - 9)(2x+1) = ((2x)^2 - 3^2)(2x+1) = (2x-3)(2x+3)(2x+1)$$

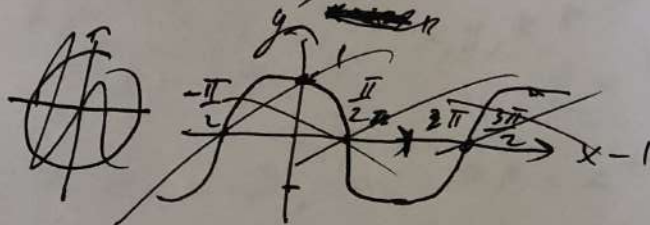
$$\text{If } x = 0 \Rightarrow 2^2 = 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$x = 1/3$

Задача 3/

$$8 \quad (x+1,5)(x-1,5)(x+0,5)\arccos(x-1) \leq 0$$

$$1) \arccos(x-1) \neq 0 \rightarrow$$



$$\Rightarrow x-1 \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in \left[1 - \frac{\pi}{2} + 2\pi k; 1 + \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$$

$$x-1 \in [-1; 1]$$

$$\cos \arccos(x-1) = x-1 \quad (\Rightarrow x=2)$$

$$\Rightarrow \cos y = x-1 \Rightarrow$$

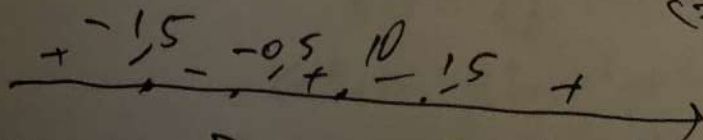
$$\Rightarrow x-1 \in [-1; 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in [0; 2]$$

$$\arccos x-1 \in [0; \pi]$$

$$\Rightarrow \arccos x-1 \geq 0 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

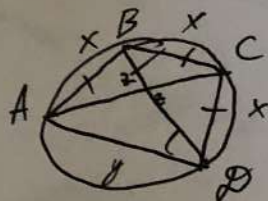
$$\Rightarrow (x+1,5)(x-1,5)(x+0,5) \leq 0$$



$$\text{Ответ: } x \in [0; 1,5] \cup \{2\}$$

Черновик 4/

нз



$$P = \min_{ABCD}$$

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$R = ?$$

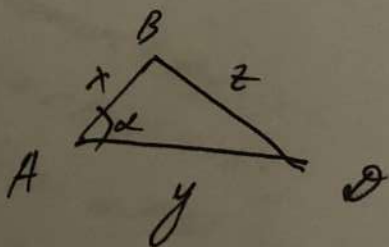
Т.к. $AB = CD$, то $\angle ADB = \angle DBC$, а т.к. так же при прямых AD и BC и секущей BD , то $BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ — параллелограмм, а т.к.

она вписана в окружность, то $ABCD$ — равнобедренный параллелограмм, а если $ABCD$ — параллелограмм, то $ABCD$ — ромб, т.е. $AB = BC = CD = DA = y$; $AD = y$; $AC = z$.

$$BD = z$$

$$\text{Т.к. } P_{ABCD} = \min, \text{ то } x + y = \min$$

в ABD :



По т. косинусов:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos \angle A \Rightarrow$$

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos \alpha$$

Пусть $x = 1$ и $y = 1$, тогда

$$z^2 = 2 - 2 \cdot \cos \alpha$$

$$\text{Пусть } \alpha = 60^\circ \Rightarrow z^2 = 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow z = x = y = 1$$

$$r = 1/3$$

Задача 5/

Т.к. $x_{min}=1$; $y_{min}=1$; $z_{min}=1$,
и условие $x=y=z=1$ - возмозможна,
то



Пусть $AB \parallel CD \Rightarrow ABCD$ - параллелограмм



$\alpha \in (0, 90^\circ]$

Т.к. $ABCD$ - вписан в сферу, то

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ;$$

$$\text{так как } \angle ABC = \angle ADC,$$

$$\text{то } \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$$

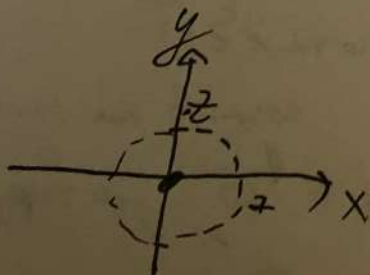
$$z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \text{треугольник прямоугольный}$$

$$\text{при } x=1: (\text{те поус}), \text{ т.к. } \uparrow$$

$$y=2$$

$$\text{то } 3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$\text{результаты } x \text{ и } y$$



$$P = 3 + 3 + 4 = 9 + 4 = 13$$

Упробити 61

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos \angle ABC = x^2 + y^2 - 2xy$$

$$\cos(180^\circ - \angle ABC) = -\cos \angle ABC$$

$$\cancel{x^2 - 2xy \cos \angle ABC} = \cancel{x^2 + y^2} + 2xy \cos \angle ABC$$

$$(x-y)(x+y) \cancel{x^2 - y^2} = 2xy \cos \angle ABC (x+y)$$

$$(x+y)(x-y - 2xy \cos \angle ABC) = 0$$

$$\cancel{x = -y \text{ (не може)}} \Rightarrow$$

$$\cancel{x - y + 2 = 0}$$

$$\Rightarrow x - y - 2 \cos \angle ABC = 0$$

$$y = x(1 - 2 \cos \angle ABC)$$

т.к. $y \in \mathbb{Z}$, то $x \in \mathbb{Z}$

то $(1 - 2 \cos \angle ABC) \in \mathbb{Z} = 1$

$$\Rightarrow 2 \cos \angle ABC \in \mathbb{Z} = 1$$

$$\Rightarrow \cos \angle ABC = \frac{1}{2} \text{ или } \cos \angle ABC = 1 \text{ или } \cos \angle ABC = -1$$

$$\angle ABC = 60^\circ, \angle ABC = 0^\circ$$

$$\angle ABC = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \angle ABC = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

т.к. $\angle ABC \in (0; 90^\circ]$, то 90°

$$\angle ABC = 60^\circ \text{ или } \angle ABC = 90^\circ$$

$\angle ABC = 0^\circ$ не може (не може)

не 90

Решение

8/

нужно $a_n \leq \frac{2022}{2021}$, тогда $a_{n+1} > \frac{2022}{2021}$

$$\begin{array}{r} \times 10004 \\ 2021 \\ \hline 8084 \end{array}$$

$$\frac{2022}{2021} > x^3 - 3x^2 + 3x$$

$$\begin{array}{r} 2021 \overline{) 2022} \\ \underline{-2021} \\ 10004 \\ \underline{-8084} \\ 1916 \end{array}$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - \frac{2022}{2021} \leq 0$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \leq 0$$

$$\cancel{x^2(x-3)}$$

$$(x-1)(x^2+x+1) \neq$$

$$3x(x-1) < 0$$

$$(x-1)(x^2+x+1-3) < 0$$

$$(x-1)(x^2-2x+1) < 0$$

$$(x-1)(x-2)^2 < 0$$

$$(x-1) < 0$$

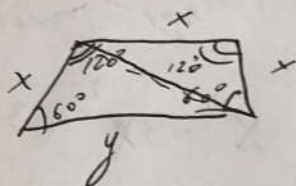
$$\underline{x < 1}, \text{ тогда}$$

$$a_n \leq \frac{2022}{2021} \text{ тогда } a_{n+1} > \frac{2022}{2021}$$

$$\text{из } x < 1, \text{ то } a_1 = \frac{4043}{2022} \text{ и}$$

при известном из этого же неравенства
следует, что $a_n > \frac{2022}{2021}$

при $\alpha = 60^\circ$:



$$z^2 = x^2 + y^2 - xy$$

$$a_1 = \frac{4043}{2022}$$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$$

$a_2 =$

$$a_2 = \frac{4043^3}{2022^3} > 2$$

$$a_n^3 - 3a_n^2 +$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x \leq x$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x \leq 0$$

$$x(x^2 - 3x + 2) \leq 0$$

$$x(x-1)(x-2) \leq 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} - & 0 & + & - & 2 & + & \\ \hline & 1 & & 1 & & - & 2 & + \end{array}$$

$$x \leq 0, x \in [1, 2]$$

$$1. \text{т.к. } a_1 > 2, \text{ то}$$

$$a_2 > a_1 \Rightarrow a_2 > 2 \dots$$

$$\text{поэтому } a_n > 2 \Rightarrow a_n > \frac{2022}{2021}$$

Ответ: да.