МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**
Профиль олимпиады: **Математика**
ФИО участника олимпиады: **Шарипова Зарина Илдаровна**
Класс: **7-8**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Шарипова Зарина Илдаровна

Класс: 7-8

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Тех. балл***
15 баллов	15 баллов	10 баллов	15 баллов	5 баллов	15 баллов	85 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

Черновик 1

$\overline{abc} - \overline{acb} \,\vdots\, 72$

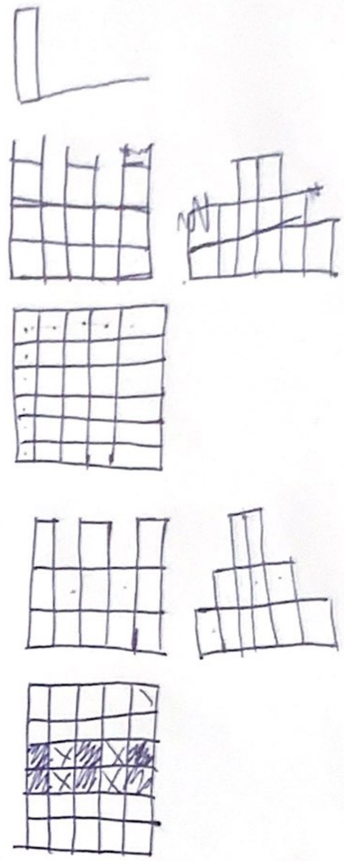
$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

$\overline{abc}$ и $\overline{acb}$ – четные

$\overline{abc}$ и $\overline{acb}$ – обе нечетные

1) 10 грядок
2) 7 человек



(3) $100a + 10b + c - \cancel{100a} - 10c - b =$

$= 9b - 9c = 9(b-c)$

$9(b-c) \,\vdots\, 72$

$(b-c) \,\vdots\, 8$

$b - c = 8$

n   n+1

$(x+y)\cdot(x+y+1) + 2y = 100$

$x^2 + xy + x + xy + y^2 + y + 2y = 100$

$x^2 + y^2 + 2xy + x + 3y = 100$

$n > y$

(4) $n\cdot(n+1) + 2y = 100$

1) $b = 8; c = 0$

2) $b = 9; c = 1$

$n\cdot(n+1) < \cancel{100}\ 98$

11
12
132

1) $\overline{a80} - \overline{a08}$

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

$7\cdot 8$

$\times 10$
11

$9\cdot 10 + 10$

$8\cdot 9 = 72$ 28 $7\cdot 8$

$x + y = 8$

2) $\overline{a91} - \overline{a19}$

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

$x + y = 9$

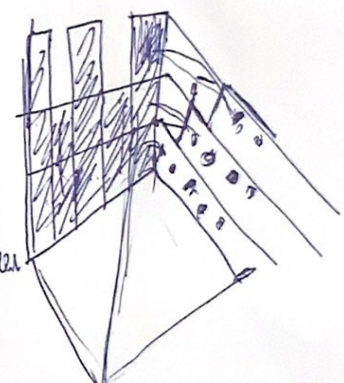
4 и 5

18

5 и 6

* „Б" и „К" разные у всех

1 чел. – $\frac{5}{7}$ в день



1) Нет 6 жителей, которые собрали бананов больше, чем я

2) Хотя бы у 7 жителей больше кокосов, чем у меня

$10 : \frac{4}{7} = 10\frac{7}{4}$

$10 : \frac{5}{7} = \overset{2}{\cancel{10}} \cdot \frac{7}{\cancel{5}_1} = 14$ чел.

$\frac{35}{7}\cdot 7$

(1) $1\,\Lambda > 6$

$5\,3\,3\,\Lambda < 7$

(2)

$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 7$

$\frac{1}{8}\ \frac{7}{8}$

-72

-72

10 грядок

7 человек $\frac{1}{2}$ раб. дня

10 чел. $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}\ 7$

5 чел.
4 ...
1 чел. – 2 грядки

$7x$ = целое

10 грядок $+ x$ = всего

$35 > 10$

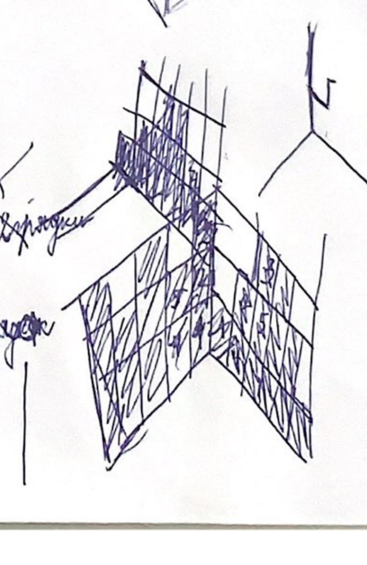
$10 : \frac{2}{7} = \overset{5}{10}\cdot\frac{7}{\cancel{2}} \frac{2}{7}$

$7 \to 1$

1) x – целое ≥ 2

2) $x = \frac{1}{7}\ \varnothing$

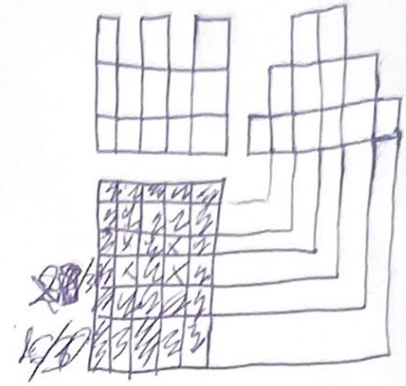
1 чел. – 2 грядки



Черновик 2.

100 обит. планет

40 порталов от др. планет планета → 40 гиперпространственных порталов



$7 : \frac{1}{7} =$

$\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} = 7 \cdot \frac{5}{14_2}$

7

Планет 100

40 гиперпространственных порталов

40 порталов от других планет

Докаж: 1) есть 6 жителей, которые собрали бананов больше, чем он
2) <7 жителей, у которых больше кокосов, чем у него

ужесов максимум 7

53. | 54 | 53 | 52 | 51 | 50 | 49

1 → 100

1 (с 2 по 41)

2 (с 3 по 52)

3 (4-53

1 (1) → 41 50

41 → 81

81 → 100

бананы:

6р

кокосы:

≥7

бананы: 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10

кокосы: 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13

≥7

1 (с 2 по 41)
2 (с 3-42) 60

41

61 (с 61 по 100)

1 - 40
41 - 80
81 - 100

Чистовик 1

Задание 3.

$\overline{abc} - \overline{acb} \vdots 72$

Представим $\overline{abc}$ так: $100a+10b+c$

Представим $\overline{acb}$ так: $100a+10c+b$

$\overline{abc} - \overline{acb} = 100a+10b+c-100a-10c-b = 9b-9c = 9(b-c)$

$\overline{abc} - \overline{acb} \vdots 72$

$9(b-c) \vdots 72$

$\Downarrow$

$b-c \vdots 8$ (т.к. $72=9\cdot8$)

$b-c=8$ или $c-b=8$

$\begin{cases} b=9 \\ c=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} b=8 \\ c=0 \end{cases}$ $\begin{cases} c=9 \\ b=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} c=8 \\ b=0 \end{cases}$

a при этом любое, т.к. при разности остается двузначное число:

Например, если $a=1$, то $\overline{1bc} - \overline{1cb} = \overline{bc} - \overline{cb}$.

Всего вариантов $\overline{a}$ – 9 штук

Всего вариантов таких чисел $\overline{abc}$ $4\cdot9=36$.

$\Downarrow$

вариантов таких чисел $\overline{abc}$

Ответ: 36 трехзначных чисел таких существует.

Задание 4:

$(x+y)\cdot(x+y+1)+2y=100$

Заметим, что $x+y$ и $x+y+1$ – числа, различающиеся на 1 $\Rightarrow$ они соседние

Пусть $(x+y)=n$, тогда $(x+y+1)=n+1$

$n(n+1)+2y=100$

y-натуральные $\Rightarrow y \geq 1$, однако $2y \leq 18$ (т.к. y – это цифра)

$80 \leq n(n+1) \leq 98$

Найдем все решения неравенства:

1) $n=9$ и $n+1=10$

$9\cdot10<98$

✓

2) $n=7$ и $n+1=8$

$56<7$ $8<98$

Но $7\cdot8=56<80$ – они и все более мелкие n и n+1 не удовлетворяют неравенству

3) $n=10$ и $n+1=11$

$10\cdot11=110>98$

$\varnothing$

• Единственный подходящий вариант – $n=9$ и $n+1=10$:

$n=x+y=9$

$\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=8 \\ y=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=2 \\ y=7 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=7 \\ y=2 \end{cases}$ ....

$(x+y)\cdot(x+y+1)=90$

$2y=10$

$y=5$

$x=n-y=4$

$x=4$ и $y=5$ – единственное решение, так как пара найденных $(n, n+1)$ и $(x;y)$ – единственные, другие либо больше, либо меньше

Ответ: $(4;5)$

Задание 2

1 день) 10 грядок

2 день) 7 человек, $\frac{1}{2}$ дня.

Следует обозначить, что количество вскопанных грядок в 1 и 2 дни – целые положительные числа.

10 грядок + x грядок = всего грядок

Во 2 день вскопали x грядок

Если рабочий мог вскапывать не обязательно целое число грядок, то рассмотрим два случая:

Пусть $\frac{n}{m}$ – то сколько грядок вскапывает каждый рабочий за день:

1) $\frac{n}{m}$ – целое $\Rightarrow m=1$ } За 2 день количество вскопанных грядок – целое $\Rightarrow$ 2) $\frac{n}{m}\cdot7$ – целое $\Rightarrow m=7$

1) $n \neq 1$, так как во 2 день $\frac{n}{2} \geq 1$

2) $\frac{n}{m}$ – дробное

1) $n>2$

Пусть производительность каждого работника – 2 грядки в день $\Rightarrow$ в 1 день работало 5 человек, но такого быть не может, потому что во 2 день вышедших на работу должно было быть меньше. $\varnothing$

А если $n>2$, то в 1 день рабочих будет меньше 5, то есть разница между 1 и 2 днем будет расти еще больше $\varnothing$

2) $\frac{n}{m}$ где $m=7 \Rightarrow \frac{n}{7}$. Так как грядок, вскопанных в 1 день, целое количество, то $10:\frac{n}{7}$ – целое $\Rightarrow \frac{10\cdot7}{n}$ – целое $\Rightarrow 10 \vdots n$.

Чистовик 2

$10 = 2 \cdot 5 \Rightarrow$ есть 2 варианта $\frac{10}{ч}$:

1) $\frac{10}{2} \Rightarrow 10 : \frac{2}{7} = \frac{10 \cdot 7}{2} = 35$ людей всего $\Rightarrow$ Во 2 день грядок вскопанных: $\frac{1}{5} \cdot 35 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} = 7 \cdot \frac{1}{7} = 1$ грядка $\Rightarrow$ всего грядок 11 штук.

2) $\frac{10}{5} \Rightarrow 10 : \frac{5}{7} = \frac{10 \cdot 7}{5} = 14$ людей всего $\Rightarrow$ Во 2 день грядок вскопанных $\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} = \frac{1}{7} \cdot \frac{5}{14} \left(\frac{5}{14} \text{ — дробное}\right) = 3{,}5$ штуки

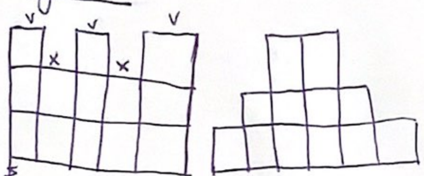
дробное.

А по условию задачи количество грядок целое

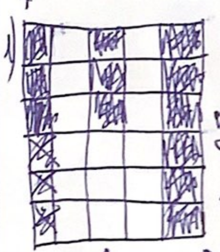
Единственный ответ данной задачи — 11 грядок.

Ответ: Всего 11 грядок было на подсобном участке

Задание 5



1)



Максимум изображенных на виде сверху кубиков — 30 (5×6)

Попробуем найти минимум.

Чтобы добиться лестничного расположения кубиков, нужно, чтобы отмеченные „✓" столбцы на виде спереди клетки, шли как-бы в форме лестницы (сбоку).

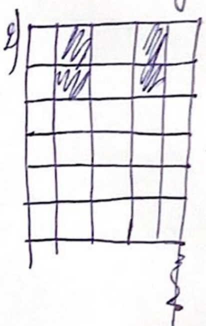
Сверху это будет выглядеть так!

Посередине достаточно лишь 3 кубика изображенных, потому что середина сбоку „не видна".

Здесь мы взяли все по минимуму, т.к. по бокам нужно показать 6 клеток, а посередине и с другого бока хватит и 3.

всего $6 + 3 + 3 = 12$

2)



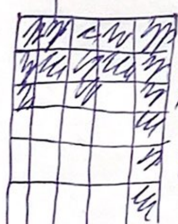
Теперь средние, отмеченные „x".

Их также достаточно показать по 2, чтобы соответствовать виду спереди.

$2 + 2 = 4$

Взяли опять таки минимум.

Итого:



$12 + 4 = 16$

Ответ: минимум 16 кубиков

Чистовик 3

Задание 1

1) Нет 6 жителей, которые собрали бананов больше, чем я.
2) Хотя бы у 7 жителей больше кокосов, чем у меня

• Эти утверждения верны только тогда, когда житель города-рыцарь.

• Когда он лжец эти утверждения стоит понимать (для лжеца) так:
1) Есть 6 жителей, которые собрали бананов больше, чем я.
2) <7 жителей, у которых больше кокосов, чем у меня.

=> можем сделать вывод что у всех лжецов больше кокосов чем у рыцарей, и 2. у всех лжецов бананов меньше, чем у рыцарей.

бананы: лжецы | 6 рыцарей
кокосы: рыцари | ≥7 лжецов

С помощью утверждений лжецов и рыцарей, выше прописанных мной, понятно, что при сравнении с помощью бананов рыцарей строго 6.
А при сравнении с помощью кокосов лжецов ≥ 7.
Сам лжец говорит, что впереди него (так 6 человек). Значит, лжецов 7.

То есть лжецов – 7, а рыцарей – 6. Этот ответ единственный, т.к. утверждения рыцарей и лжецов двоякого смысла не имеют, и с помощью двух утверждений выводится единственный возможный ответ!

Ответ: рыцарей – 6, лжецов – 7.

Задание 6

Планет всего 100.

40 интерпространственных порталов

40 порталов от других планет

планета n

Пусть у 1 планеты порталы к планетам от 2 до 41, тогда у 2 планеты от 3 до 42 ..., у 60 от 61 до 100.

То есть самый дальний возможный маршрут => 3 прыжка (с 1 планеты, например, до 100: с 1 до 41, ~~41~~ до ~~90~~, с 80 до 100)

Но возможны случаи с 1 и 2 прыжками (например с 1 планеты до 2, или с 1 планеты до 61)

Но случай с 3 прыжками подходит для любого случая, и 3 прыжков хватит для любого расстояния между планетами.

Ответ: 3 прыжка – наименьшее число интерпространственных прыжков.