МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**
Профиль олимпиады: **Математика**
ФИО участника олимпиады: **Мясников Роман Павлович**
Класс: **9**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Мясников Роман Павлович

Класс: 9

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Тех. балл***
15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	5 баллов	90 баллов

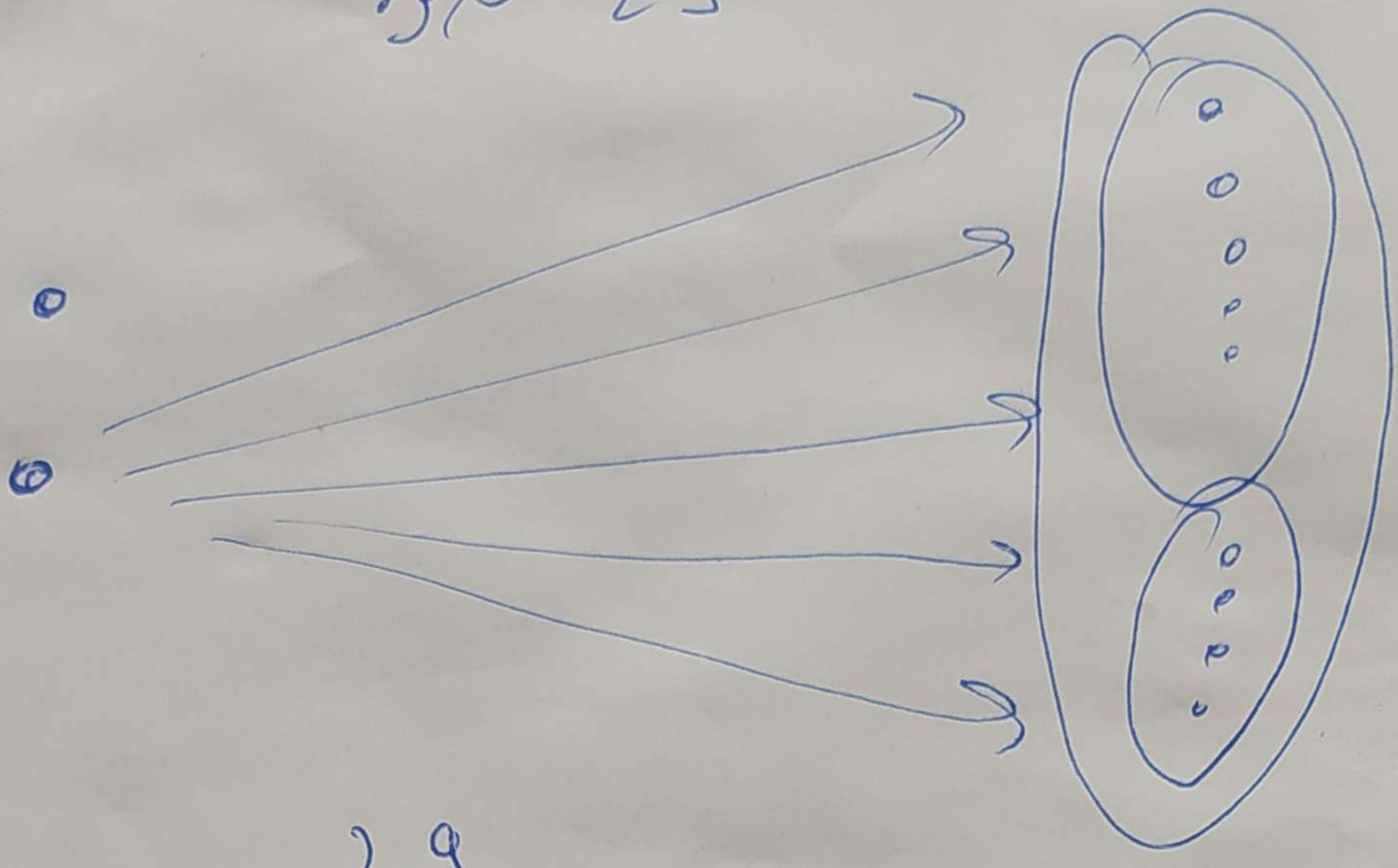
*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

Черновик, 12 стр.

~~30~~ 29

$(90-2)^2=$
$=8100+4-360$
$=8104-360$

$$\begin{array}{r} 8104 \\ -\ 360 \\ \hline 7804 \\ -\ 60 \\ \hline 7744 \end{array}$$



29

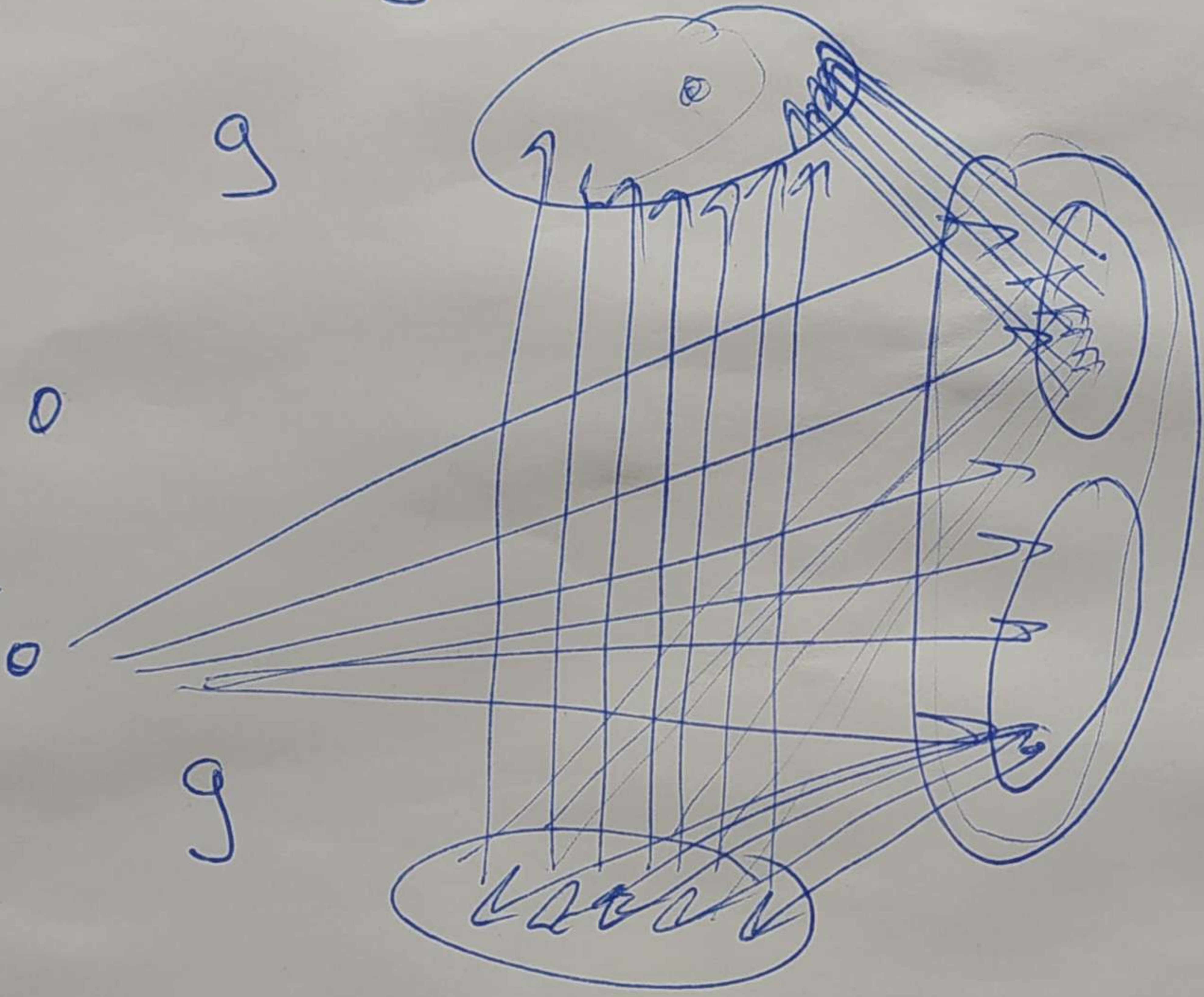
$8100-180+1$

$$\begin{array}{r} 8101 \\ -\ 180 \\ \hline 8001 \\ -\ 80 \\ \hline 7921 \end{array}$$

9

0

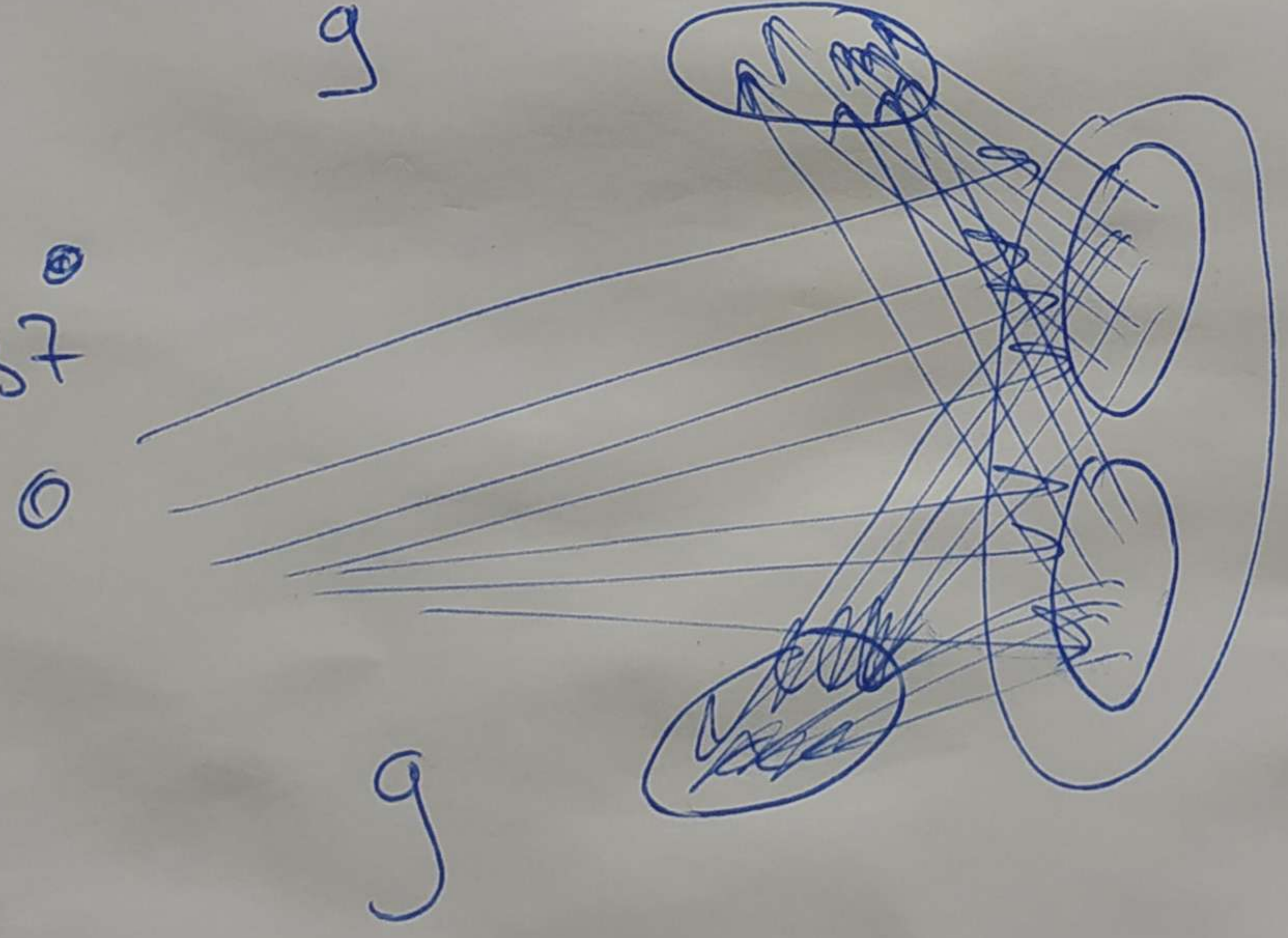
Г-37



9

9

Г-37



9

Раб $\quad v \quad t \qquad$ Гряд $\qquad$ Черновик, 11 стр.

$x \quad z \quad 2k \qquad y$

$x \cdot z \cdot 2k = 10 \qquad x \cdot z \cdot k = \cancel{10}\ 5$

$x \cdot zk = \cancel{10}\ 5$

$7 \cdot z \cdot k = y - 10 \qquad zk = \frac{5}{x}$

$zk \cdot 7 + 2x \cdot zk = y$

$zk(2x+7) = y$

$\frac{5}{x}(2x+7) = y \qquad x > 7$

$5\left(2 + \frac{7}{x}\right) = y \qquad 1 \quad 5 \quad 7 \quad 35$

$x = 35$

$10 + \frac{35}{x} = y \qquad x^2 + ax + 2022 = 0$

$\underline{y = 11} \qquad 0 \le a \le 99$

$x^2 + ax + 2022 = \left(x + \sqrt{2022}\right)^2$

$a = 2\underbrace{\sqrt{2022}}_{44 < \ \ < 45} =$

$88 < a < 90 \qquad x^2 + 89x + 202$

$a = 89$

$\underline{x_1 + x_2 = -a}$

$D > 0$

$a^2 - 4 \cdot 2022 > 0$

$a^2 > 4 \cdot 2022$

$a > 2\underbrace{\sqrt{2022}}_{44}$

$\underline{a \geq 90} \qquad a > 88$

$a = 89$

$x^2 + 89x + 2022 = 0$

$D = 7921 - 8088 < 0$

$\Sigma = -90 - 91 - 92 - 93 - 94 - 95 - 96 - 97 - 98 - 99 =$

$= -(90 \cdot 10 + 1 + 2 + \ldots + 9) = -\left(900 + \frac{9 \cdot 10}{2}\right) =$

$= -(900 + 45) = \underline{-945}$

Черновик, 10 стр.

$\overline{abc} - \overline{acb} \vdots 72$

$10b + c - 10c - b \vdots 72$

$9(b-c) \vdots 72$

$b - c \vdots 8$

$b - c = 0 \qquad b - c = 8$

$b = 8 + c$

1) $c = 0 \quad b = 8$ 1) 9

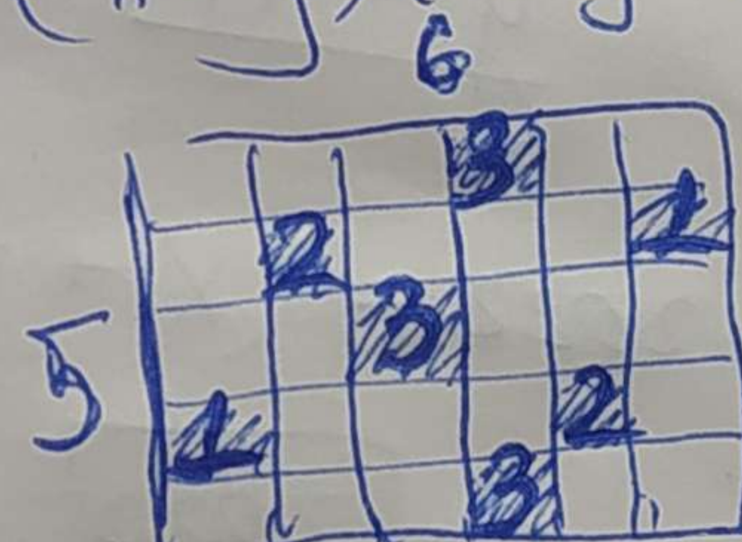
2) $c = 1 \quad b = 9$ 2) 9

3) $b = c$ 3) $9 \cdot 10 = 90$

$\underline{90 + 18 = 108}$

$(x, y) - ? \quad x, y \in \mathbb{N}$

$(x+y)(x+y+1) + y = 2022 \qquad (x+y)(x+y+1) = 2022 - y$



$\boxed{7}$

$(x+y)^2 + x + y + y = 2022$

$x^2 + 2xy + y^2 + x + 2y = 2022$

$(x-y)^2 + 4xy + x + 2y + 1$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + 2xy - x + 4y \cancel{+2} - 2 = \cancel{2024}\ 2020$

$(x+1)^2 + (y-1)^2 + x(2y-1) + 2(2y-1) = 2020$

$(x+1)^2 + (y-1)^2 + (x+2)(2y-1) = 2020$

$(2x+2y)(2x+2y+2) + 4y = 8088$

$(2x+2y+1)^2 - 1 + 4y = 8088$

$(2x+2y+1)^2 + 4y = 8089$

5

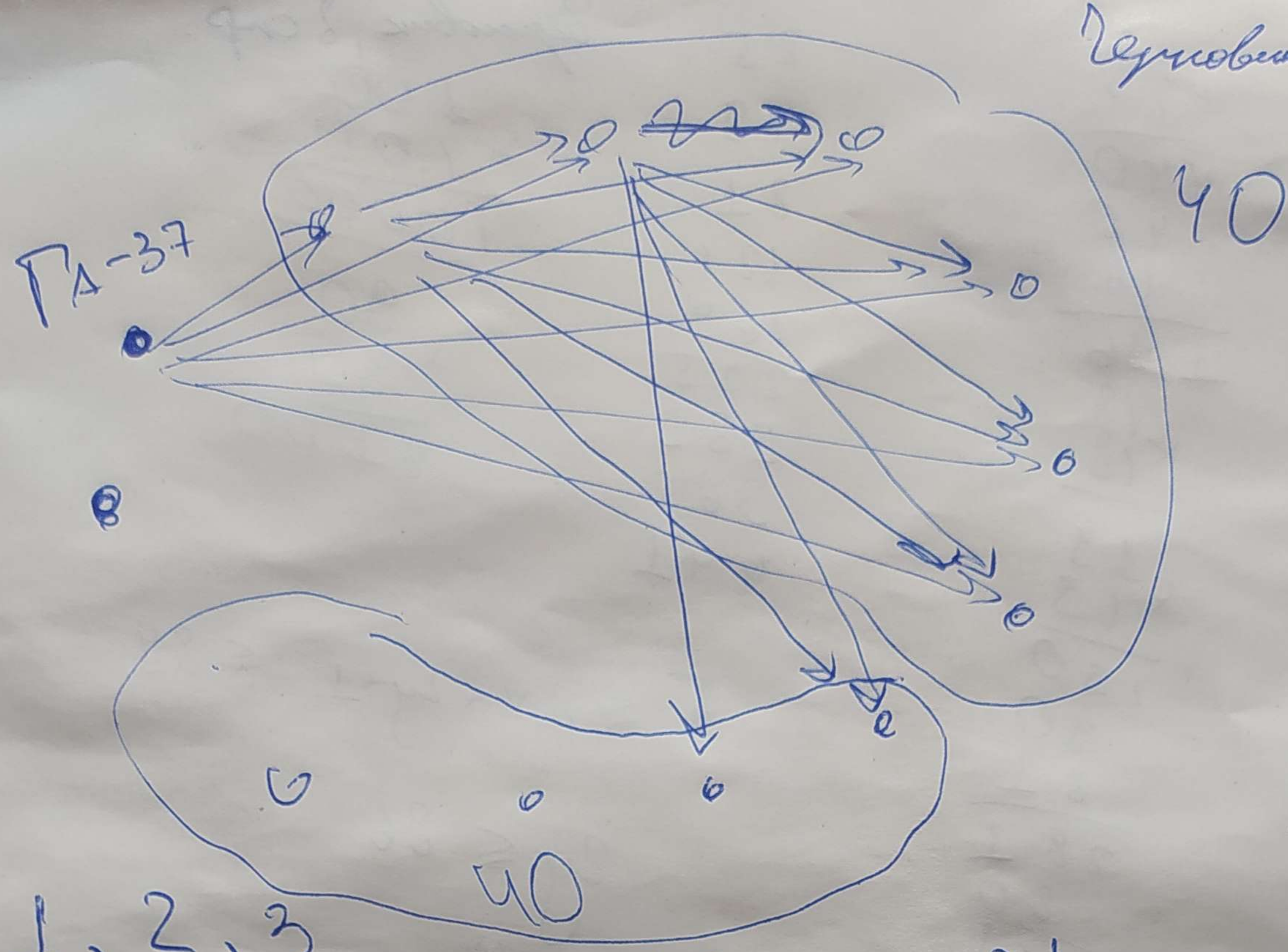
$337 \cdot 6$

$2(1011) = 2 \cdot 3 \cdot$

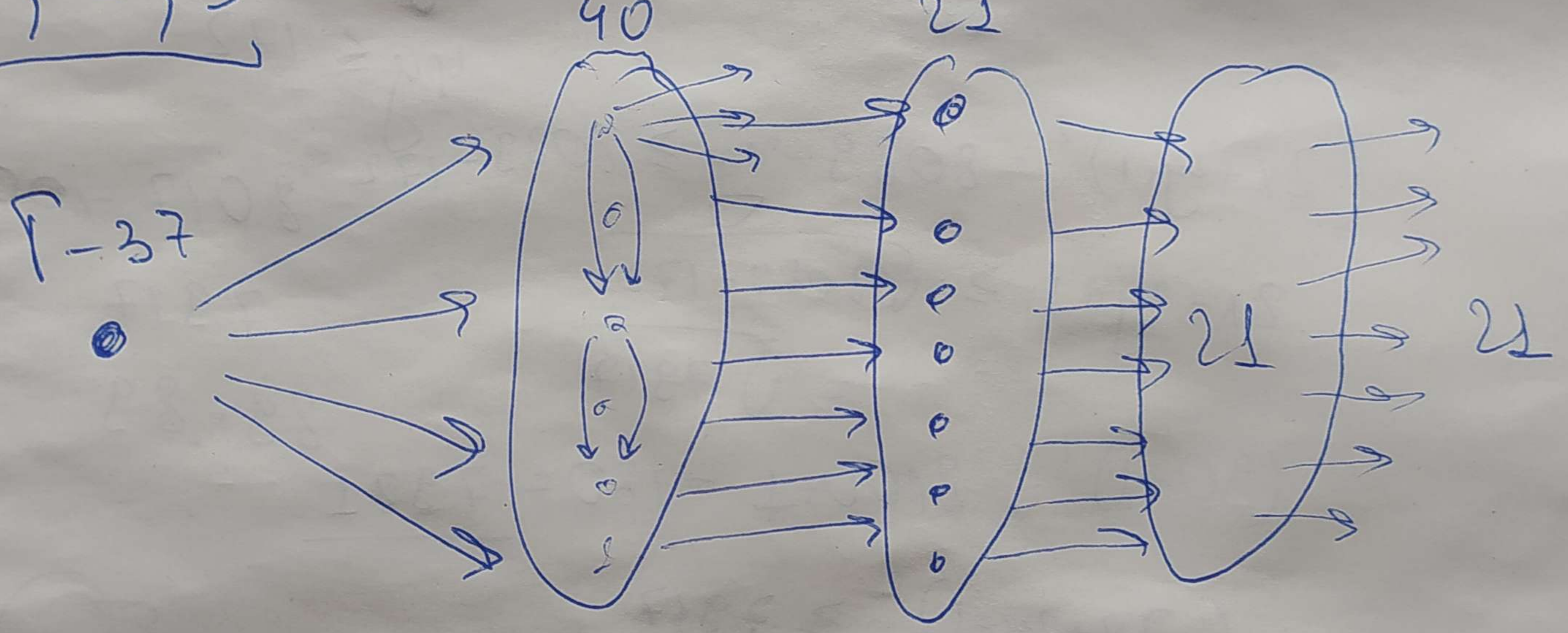
$1011 \mid 3$, 337

$1 \mid 3$, $11 \mid 3$, $1 \mid 21$

Черновик, 9 стр



$\underbrace{1, 2, 3}$



$$40\cdot 40-\frac{40\cdot 39}{2}=20\cdot(80-39)=\underbrace{20\cdot 41}$$

$40\cdot 40-$

$21\cdot 40-20\cdot 41$

Черновик, 8 стр.

25
36
49
64
81
100
121
144
169
196
225
256
289

$$\begin{array}{r} \times\, 14 \\ 14 \\ \hline 140 \\ 40 \\ 16 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 18 \\ 18 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 19 \\ 19 \\ \hline 190 \\ 90 \\ 81 \\ \hline 281 \\ 80 \\ \hline 361 \end{array}$$

25
49
81
121
169
225
289
361
441

$$\begin{array}{r} 100 \\ \times\, 100 \\ \hline 10000 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 90 \\ \times\, 90 \\ \hline 8100 \end{array}$$

$5 \le 2x+2y+1 \le 89$

$2y \le 86$

$4y \le 172$

$(2x+2y+1)^2 = 8089-4y \ge 8089-172$

$8017-100$

7917

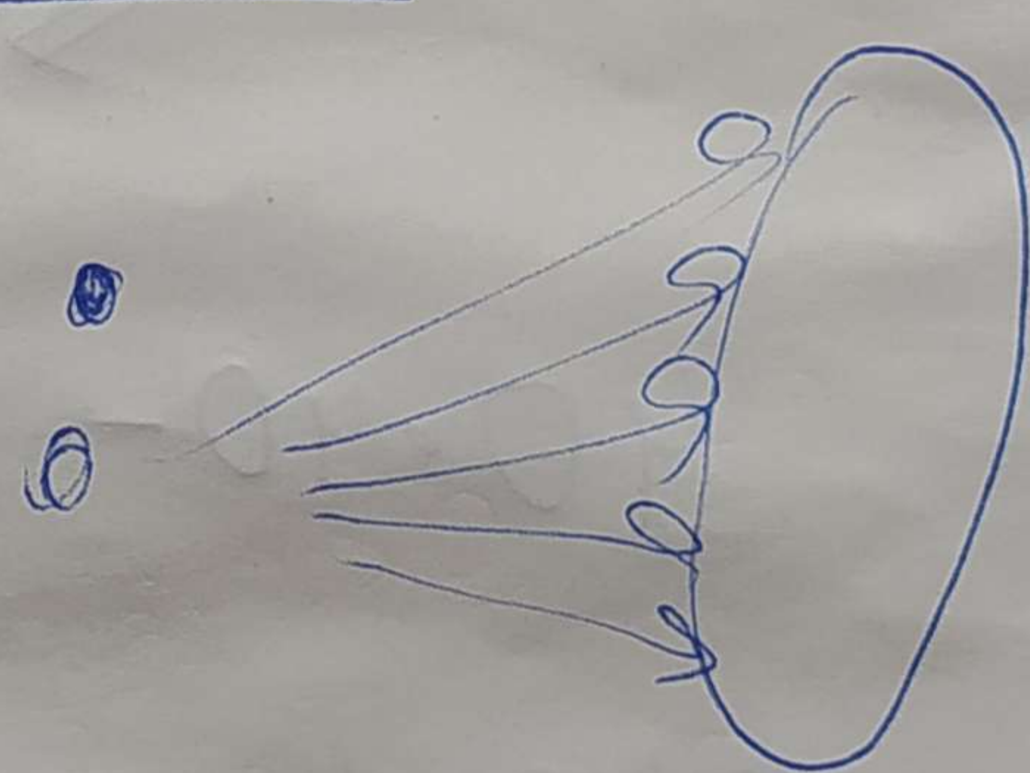
$89 \cdot 89$

$2x+2y+1 \ge \sqrt{8089-172}$

$= \sqrt{7917}$

$(90-1)^2 = 8100+1-180 = \underline{7921}$

$(2x+2y+1)^2 \ge 7917$



$89 \cdot 89 = 7921$

$2x+2y+1 = 89$

$7921+4y = 8089$

$4y = 89+79 = 168$

$\underline{y = 42}$

$2x+85 = 89$

$\underline{x=2}$

$(x, y) = \boxed{2; 42}$

Глиновик, 7 стр.

№6

(или меньше)
Тогда за 2 хода из пл. Га-37 можно попасть только в планеты с номерами от 2 до 81 включительно =>

за 2 хода до планеты Пандора не дойти;

~~Так~~ Но можно пойти из 1 в 40, из 40 в 80, из 80 в 100, тогда за 3 прыжка можно, за 2 нельзя;

Оценка:

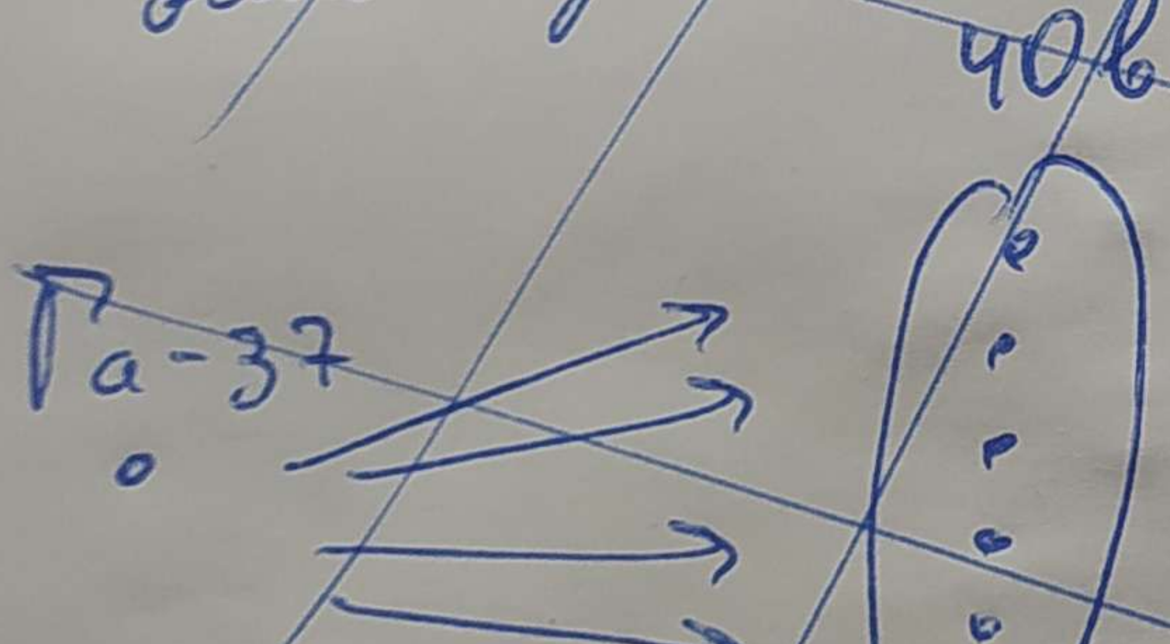
Переведём нашу задачу на язык графов;

Тогда ребра это порталы, вершины это планеты, граф ориентированный, из каждой верш. выходит 40 ребер и в каждую входит 40 ребер, при этом между 2 вершинами нет 2-х ребер (разноориентированных нет (⇄) и одинаково ~~н~~ одинаково направленных (⇉));

Докажем, что за 4 прыжка всегда можно.

Предположим противное, что нашёлся граф уд. условию, что из одной вершины нельзя попасть в другую за 4 ребра.

Рассмотрим этот граф:



Рассмотрим 40 в, в которые ведут ребра из пл. Га-37, тогда

Ответ: 1, 2, 3;

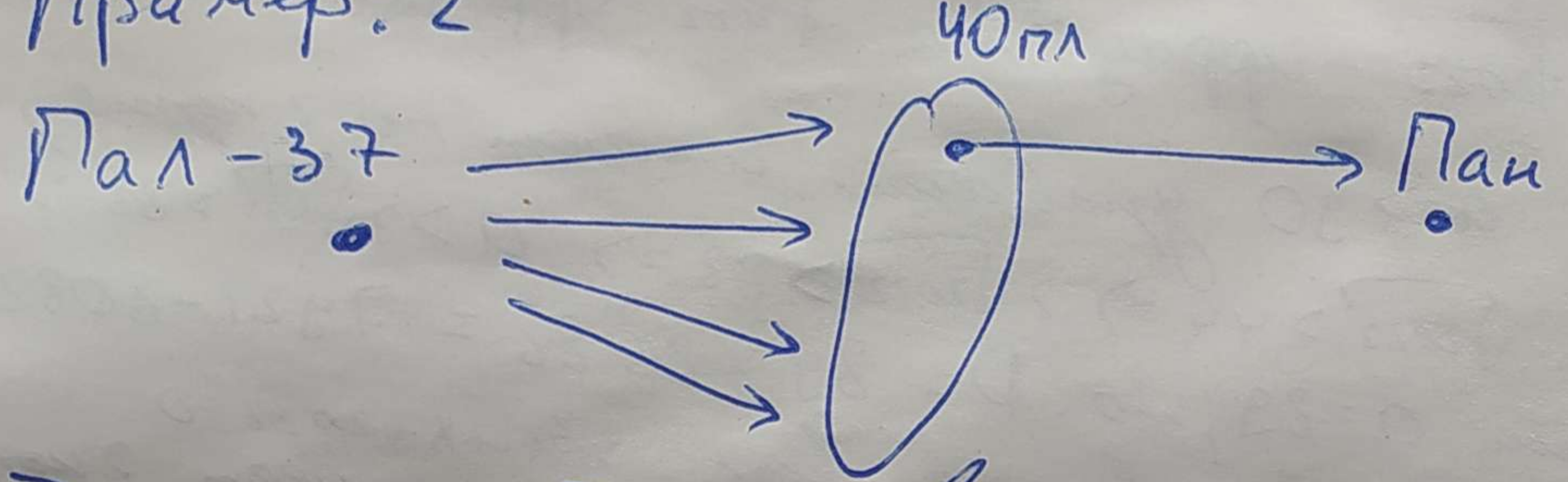
Пример: 1

~~Галатеи-37 не соединено на прямую с Пандорой, то есть нет ребра → : Га-37 ⟶ Пан~~

Тогда Галатеи-37 соединено на прямую с Пандорой:

Га-37 ⟶ Пан, тогда min кол-во прыжков 1;

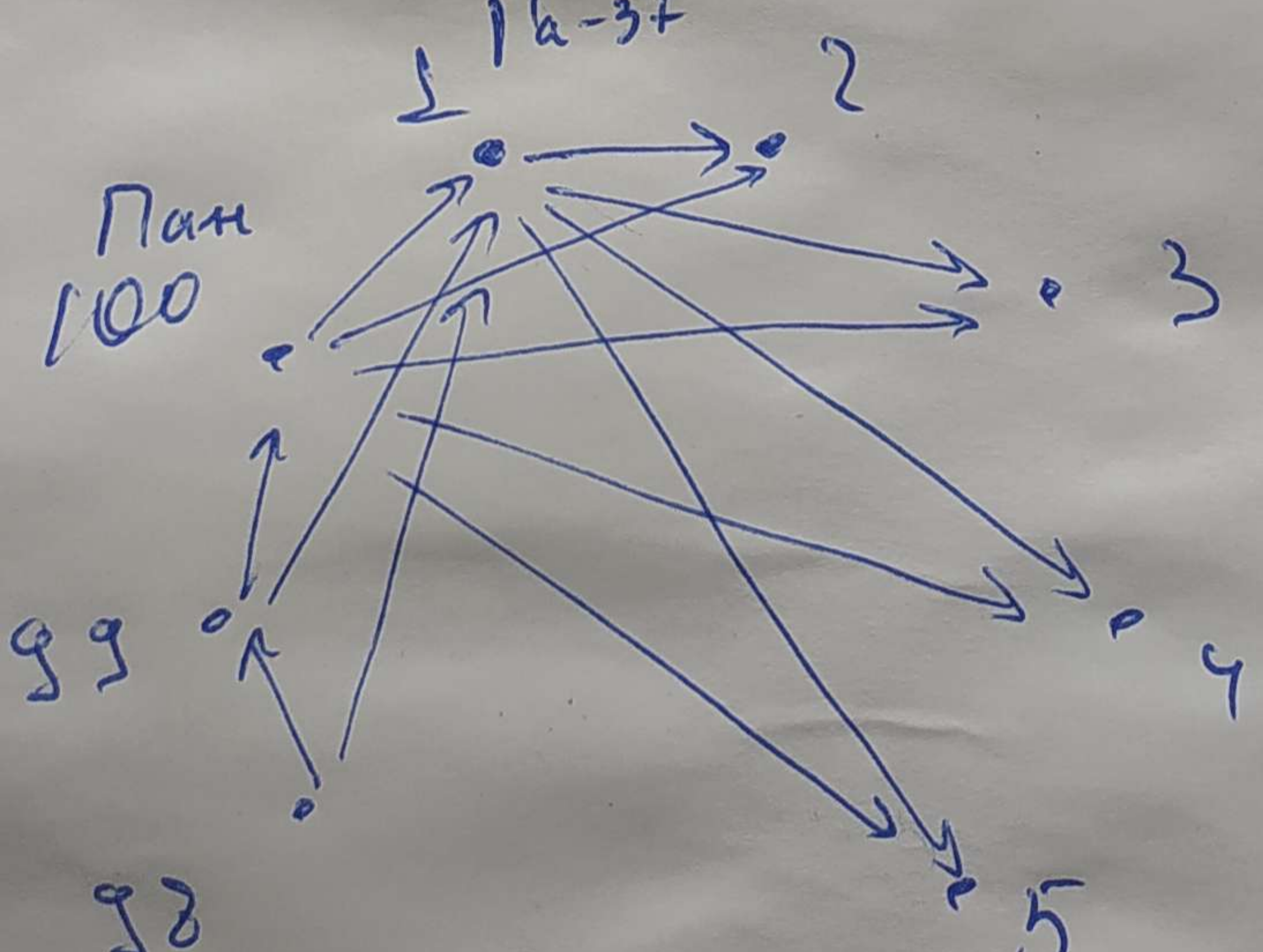
Пример: 2



То есть из Пал-37 ведет к ~~каким~~ каким-то 40пл и из какой-то из этих планет есть портал на ~~П~~ Пандору, при этом Пандору нет среди 40пл, к которым ведет ребро из Гал-37;

Пример: 3

Построим граф, где вершина это планета, а ребро это портал, все ребра ориентированы, и ~~пронумеруем~~ пронумеруем наши планеты ~~3~~ как 1, 2, 3, ..., 100, где 1 - Га-37, 100 - Пан, и поставим по кругу по порядку номеров;



И пусть все ребра из 1 планеты идут к след 40 за ней по кругу, то есть к 2, 3, ..., 41, и так для всех планет;

Тогда в каждую входит 40 ребер и 40 выходит (т.к. пред. 40 планет, например перед 1 проводит ребро к 1 планете)

Тогда из Га-37 можно на прямую попасть в планеты с номерами 2, 3, ..., 41 из 41 планеты можно попасть в планеты с номерами 42, 43, ..., 81 за ещё один ~~прыж~~ проход по ребру

№5 Гиктовик, 5стр.

$x^2+ax+2022=0$ $a\in\mathbb{Z}$ $0\le a\le 99$

Найдем все a при которых уравнение имеет хотя бы один корень, тогда если $\exists$ хотя бы 1 корень, то $D\ge 0$

$D=a^2-4\cdot 2022\ge 0 \Rightarrow a^2\ge 4\cdot 2022 \Rightarrow a\ge 2\sqrt{2022}$

Заметим, что $2022=45^2-3 \ne \cancel{48\cdot 42=6\cdot 8\cdot 7\cdot 6=2^4\cdot 3^2\cdot 7}$;

Тогда $\sqrt{2022}<45 \Rightarrow 2\sqrt{2022}<90$; $\Rightarrow a\ge 90$ подходит;

При этом $45^2-3>44^2$, т.к. $\underbrace{45^2-44^2}_{99}>3 \Rightarrow 44^2<2022<45^2$

$\Rightarrow a\ne 2\sqrt{2022}$, т.к. $2\sqrt{2022}$ - иррац, т.к $\sqrt{2022}$ - иррац (a - рац, т.к. $a\in\mathbb{Z}$), ~~при~~ значит $a\ge 90$ уравнения имеют по 2 корня;

при это $2022>44^2 \Rightarrow \sqrt{2022}>44 \Rightarrow 2\sqrt{2022}\ge 88 \Rightarrow a>2\sqrt{2022}>88 \Rightarrow$

$\Rightarrow a>88 \Rightarrow a\ge 89$; Если $a=89$, то $D=89^2-8088=7921-8082<0$

Тогда $a\ge 90$ и при всех a уравнение вида $x^2+ax+2022=0$ имеет 2 корня

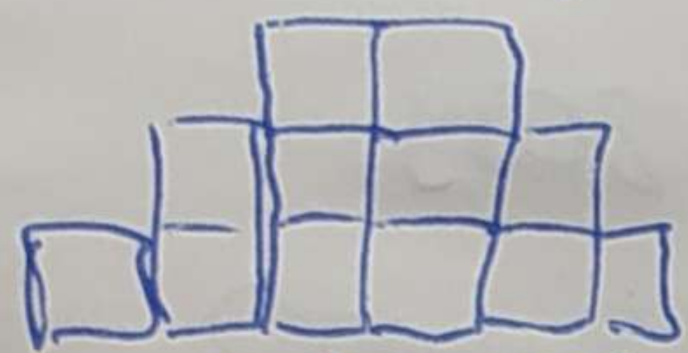
По теореме Виета: $x_1+x_2=-a \Rightarrow$

$\Sigma_{x_i}=-90-91-92-\ldots-99=-(90+91+\ldots+99)=-(90\cdot 10+1+\ldots+9)=$

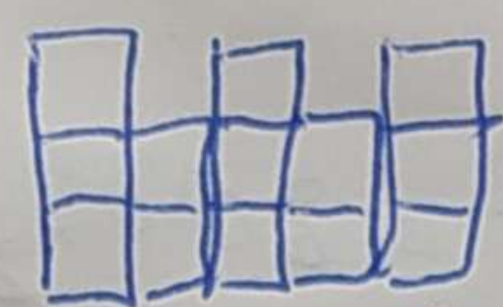
$=-945$; Ответ: -945;

№4. Гистович, 4 стр.

Заметим по виду сбоку, что должны точно быть по одной башни из 2-х кубиков в 2-х рядах (во 2 и 5 ряду)
также должны быть по 1-му кубику в 2-х рядах. (в 1 и 6 ряду)



ряд 1 2 3 4 5 6
Вид сбоку



ряд 1 2 3 4 5
Вид спереди

По виду спереди видно, что есть ~~т~~ хотя бы по одной башни из 3-х кубиков в 1, 3, 5 рядах;

Значит, хотя бы есть 7 башен: ~~две~~ три по 3 кубика, две по 2 кубика, две по 1 кубику;
Тогда в виде сверху будет видно хотя бы 7 башен, что есть хотя бы 7 ~~клеток~~ кубиков;

Пример:

вид спереди →

			3		
	2				1
		3			
1				2	
			3		

↑ вид сбоку

Сейчас вид сверху (цифры в клетках это кол-во кубиков в башне, стоящей в этой клетке)
Тогда сверху 7 кубиков, а спереди и ~~слева~~ сбоку вид совпадает с указанным в условии.

Ответ: 7

№3 Гештовик, 3 стр.

$x, y \in \mathbb{N}$

$(x+y)(x+y+1)+y=2022 \mid \cdot 4$

$(2x+2y)(2x+2y+2)+4y=8088 \Rightarrow (2x+2y+1)^2+4y=8089$

$\underbrace{(2x+2y)(2x+2y+2)}_{(2x+2y+1)^2-1}$

$(2x+2y+1)^2=8089-4y<8089$

$x, y \geq 1 \Rightarrow 2x+2y+1 \geq 5$; $(2x+2y+1)^2<(\sqrt{8089})^2<90^2=8100$

$\Rightarrow (2x+2y+1)^2<8089 \Rightarrow (2x+2y+1)$

$\Rightarrow 2x+2y+1 \leq 89$; Значит, $2y \leq 89-2x-1 \leq 86 \Rightarrow 4y \leq 172$;

$4y=8089-(2x+2y+1)^2 \leq 172 \Rightarrow \underbrace{8089-172}_{7917} \leq (2x+2y+1)^2$

$\Rightarrow \cancel{(2x+2y+1) \geq \sqrt{79}}$ $(2x+2y+1)^2 \geq 7917>88^2=7744$

$\Rightarrow 2x+2y+1 \geq 89$; Значит, $89 \leq 2x+2y+1 \leq 89 \Rightarrow 2x+2y+1=89$

$\Rightarrow 4y=8089-89^2=8089-7921=168 \Rightarrow y=42$

$2x+2y+1=2x+84+1=2x+85=89 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$;

Тогда $x=2$ $y=42$ $(x;y)=(2;42)$ Ответ: $(2;42)$

№2 Чистовик, 2 стр.

$\overline{abc}$ - 3-хзначное число $\Rightarrow a>0$ и $a\in\mathbb{N}$, $1\le a\le 9$;
b, c $b, c\in\mathbb{Z}$ и $0\le b, c\le 9$;
$\overline{abc}-\overline{acb}=(100a+10b+c)-(100a+10c+b)=9b-9c=9(b-c)\ \vdots\ 72$
$\Rightarrow b-c\ \vdots\ 8$; $b-c\le 9$, т.к. $b\le 9+c$, т.к. $b\le 9$ и $c\ge 0$;
$\Rightarrow$ ~~$b-c\ 7$~~ и $b-c\ge -9$, т.к. $b+9\ge c$, т.к. $b\ge 0$ и $c\le 9$;
$\Rightarrow$ 1) $b-c=0$ тогда $b=c$ 2) $b-c=8\Rightarrow b=8+c$, значит либо $c=0$ $b=8$
либо $c=1$ $b=9$
3) $b-c=-8\Rightarrow b+8=c$, значит либо $b=0$ $c=8$
либо $b=1$ $c=9$

1) $b=c$; тогда a - 9 способов выбрать, b - 10 способов, при этом тогда и c - опред. однозначно
$\Rightarrow$ общее кол-во равно $9\cdot 10=90$ сп.
2) $b=8$ $c=0$ a - 9 способов $\Rightarrow$ общ. кол-во 9 способов
$b=9$ $c=1$ a - 9 способов $\Rightarrow$ общ. кол-во 9 сп.
3) $b=0$ $c=8$ a - 9 сп $\Rightarrow$ общ. кол-во 9 сп.
$b=1$ $c=9$ a - 9 сп $\Rightarrow$ общ. кол-во 9 сп.
При этом мы не считаем никакие способы дважды, т.к. во 2 и 3 случаях $b\ne c\Rightarrow$ они не совпадают с 1 случаем, а 2 и 3 случаи не совпадают, т.к. b и c различные, то есть $b_2\ne b_3$;
Значит, всего способов это Σ 1, 2, 3 случаев $\Rightarrow \Sigma=90+4\cdot 9=$
$=90+36=126$

Ответ: 126.

№1 Чистовик, 1 стр.

Пусть всего грядок y, рабочих x, полный рабочий день идёт $2z$ (часов), производительность 1 рабочего $m\left(\frac{2}{z}\right)$;

Тогда в первый день каждый рабочий вскопал $m \cdot 2z$ (грядок), тогда все рабочие вскопали $x \cdot m \cdot 2z$ и по усл. это равно 10;

$x \cdot 2mz = 10$;

Во второй день рабочих стало 7, производ. не изменилась, время работы по усл. стало z, то за второй день каждый вскопал $m \cdot z$ (грядок), все вскопали $7 \cdot mz$ и по усл. они закончили

$\Rightarrow 10 + 7 \cdot mz = y$; Тогда получаем систему: $\begin{cases} 10 + 7mz = y \\ x \cdot 2mz = 10 \end{cases}$, где $x > 7$, т.к. кто-то заболел и $x, y \in \mathbb{N}$, $x \cdot 2mz + 7mz = y \Rightarrow mz(2x+7) = y$;

1) $\begin{cases} 10 + 7mz = y \\ x \cdot 2mz = 10 \end{cases}$ Подставим (2) в (1): Из (2): $mz = \frac{5}{x} \Rightarrow \frac{5}{x}(2x+7) = y \Rightarrow 10 + \frac{35}{x} = y$;
2)

Т.к. $y \in \mathbb{N}$ и $10 \in \mathbb{N}$, то $\frac{35}{x} \in \mathbb{N}$ $(x > 7) \Rightarrow 35 \vdots x$; тогда все делители числа 35 это 1, 5, 7, 35, т.к. $x > 7$, то $35 = 5 \cdot 7$,

$x = 35 \Rightarrow y = 10 + \frac{35}{35} = 11$; Ответ: 11;