



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Абу Асси Ясин Халедович**

Класс: **10-11**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Абу Асси Ясин Халедович

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	15 баллов	20 баллов	0 баллов	10 баллов	85 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

S2

$$\begin{aligned} \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50}\right) &= \arccos\left(\frac{\cos 50 + \sqrt{3}\cos 40}{4\cos 40 \cdot \cos 50}\right) = \\ &= \arccos\left(\frac{2 \cdot \frac{1}{2}\cos 50 + \frac{2\sqrt{3}}{2}\sin 50}{2 \cdot 2\cos 40 \cdot \sin 40}\right) = \arccos\left(\frac{2\sin(50+30)}{2\sin(40 \cdot 2)}\right) = \\ &= \arccos\left(\frac{\sin 80}{\sin 80}\right) = \arccos(1) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9)\arccos(x-1) &\leq 0 \text{ тогда и только} \\ \text{тогда } (4x^2(2x+1) - 9(2x+1))\arccos(x-1) &\leq 0 \text{ тогда и только} \\ \text{тогда } (2x-3)(2x+3)(2x+1)\arccos(x-1) &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x \in [0; 2] - \text{определ. аркос;} \\ \begin{cases} (2x-3)(2x+3)(2x+1) \leq 0; & \text{тогда и только} \\ x \geq 2 - \text{тогда } \arccos(x-1) = 0. & \text{тогда} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [0; 3/2] \\ x = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{тогда и только} \\ \text{тогда} \end{matrix} \quad x \in [0; 3/2] \cup \{2\}$$

Ответ: $x \in [0; 3/2] \cup \{2\}$.

(Честовек) Реш 1 Вариант: 11-1.

58

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| \leq 4x^2 + 8x$$

Пусть $f(x) = 4x^2 + 8x - |x^3 + 2x^2 + x + a| - |x^3 - 2x^2 + x - a|$

$f(x)$ - непрерыв. ф-ция, $f(x) > 0 \Rightarrow f \in (b; b+1)$, то

$f(x) > 0 \Rightarrow x \in [b; b+1] \quad |x| + |y| \geq |x+y| \quad \text{и} \quad |x| + |y| \geq |x-y|$

откуда

$$f(x) \geq 4x^2 + 8x - |2x^3 + 2x| \quad \text{и} \quad f(x) \geq 4x^2 + 8x - |4x^2 + 2a|$$

Пусть $f(x) \geq 0$, тогда $4x^2 + 8x \geq |2x^3 + 2x| \geq 0$

тогда $x \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$

Если $x \geq 0$, то $4x^2 + 8x \geq |2x^3 + 2x| = 2x^3 + 2x$,

$2x + 3 \geq x^2 \Rightarrow x \leq 3$, если $x \leq -2$, то $4x^2 \geq 4x^2 + 8$

$|2x^3 + 2x| = 2|x| \cdot |x^2 + 1| \geq 4|x^2 + 1| > 4x^2$, противоречие

Значит, что интервал решений $(b; b+1) \subset$

$[0; 3]$. Тогда в промежутке $[b; b+1]$ будут

хотя бы одно из 1 и 2. Пусть $a \geq 0$, тогда $|x^3 + 2x^2 + x + a| = x^3 + 2x^2 + x + a$. Если $x^3 - 2x^2 + x - a \geq 0$, то

$f(x) = 2x(x+1)(3-x) < 0$ значит где $x \in (b; b+1)$,

$x^3 - 2x^2 + x - a < 0$. Тогда $f(x) = 8x - 2a$, $f(x)$ - возр.

значит. мин. реш. должен быть $(2; 3)$, $a = 8$.

иначе $x^3 - 2x^2 + x - 8 < 0$ при $x \in (2; 3)$.

при $a < 0$. Пусть x - решение. Если в точке

x оба слагаемых имеют одинаковый знак, то

$|a| + |b| = |a + b|$, $f(x) = 4x^2 + 8x - |2x^3 + 2x| = 4x^2 + 8x - 2x^3 - 2x$

$= 2x(x+1)(3-x) < 0$. $x^3 - 2x^2 + x - a > x^3 - 2x^2 + x = x|x^2 - 2x + 1|$

≥ 0 . (Шаровик) Нет 3

156 (продолжение)

Значит $f(x) > 0$ только при $x^3 + 2x^2 + x + a < 0$
 $f(x) = 8x^2 + 8x + 2a$. Нужно чтобы $x^3 + 2x^2 + x + a < 0$
на $x \in (b; b+1)$. $x^3 + 2x^2 + x + a \leq 0$.

$8x^2 + 8x + a \leq 0$ на отр. $[b; b+1]$, поскольку

$f(x)$ — непрерывна, $f(x) \leq 0$ при $x < b$, $f(x) > 0$

при ~~$b < x < b+1$~~ $b < x < b+1$, то

$f(b) \geq 0$. Также рассуждением для

$|x^3 + 2x^2 + x + a|$. $b^3 + 2b^2 + b + a \geq 0$

$8b^2 + 8b + a \geq 0$, $b^3 + 2b^2 + b = 8b^2 + 8b$

$b^2 = 8b + 7$, но при $b \in (0; 2)$ — это невозм.

При $b \geq 0$, $8b^2 + 8b + a \geq a < 0$.

Ответ: $a \geq 8$

(Итого) Лист 4

52

Ответ: 2079

Решение: 2079 стоит в посл. до вычитания кубов и квадратов на 2074 месте.

$$2025 = 45^2 < 2079 < 46^2 = 2116$$

$$1728 = 12^3 < 2079 < 13^3 = 2197$$

$$729 = 3^6 < 2079 < 4^6 = 4096$$

В чис. послед. нет квадратов 1^2 и 2^2 , а так. 3^2 - есть, нет кубов 1^3 , а так. 2^3 - есть, нет 1^6 , а так. 2^6 - есть.

A_2 - множество кв. в послед. до 2079, аналогичн. стр.

A_3 (кубов) и A_6 (шестой степени). При этом $|A_2| =$

$$= 45 - 2 = 43, |A_3| = 12 - 1 = 11 \text{ и } |A_6| = 3 - 1 = 2.$$

Тогда по ф-ле включения-~~исключения~~^и, мы вычитем перед 2079: $43 + 11 - 2 = 52$ чисел, тогда номер его места уменьшился на 52, ~~то есть~~ стал равен $2074 - 52 = 2022$, тогда оно стоит на 2022 месте, т.е. 9.

(Числовик) Ответ 5

84

Ответ: Да, найдётся

Обоснование: Для начала заметим, что $a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$
 $= (a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n - 1) + 1 = (a_n - 1)^3 + 1$

Докажем с помощью мат. индукции, что

$$a_{n+1} = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^n}$$

База: $n \geq 0$, $a_{n+1} = a_1 = 1 + \frac{2021}{2022} = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^0}$ - верно

Переход: $n \Rightarrow n+1$, по предположению индукции
 $a_n = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}}$, тогда $a_{n+1} = (a_n - 1)^3 + 1 = \left(\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} + 1 - 1\right)^3 + 1$
 $+ 1 = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^n} = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^n}$ - переход доказан

Теперь докажем, что существует n , для которого
 $a_n = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \leq \frac{2022}{2021} = 1 + \frac{1}{2021}$, что равносильно

к $\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \leq \frac{1}{2021}$. Поскольку 3^{x-1} строго возрастает

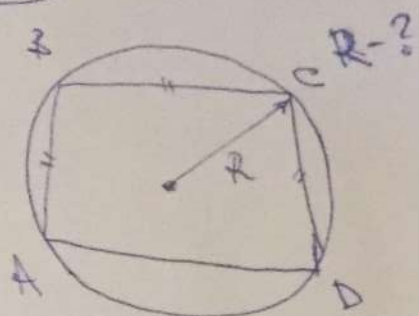
и стремится к $+\infty$, при $x \rightarrow \infty$, а $\frac{2021}{2022} < 1$,

тогда $\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{x-1}}$ убывает и стремится к 0 и $\frac{1}{2021}$
 всегда больше нуля. Тогда найдем x_0 , $\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{x_0-1}} < \frac{1}{2021}$

значит для $n > x_0$, мы получим $a_n = |a_n| \leq \frac{2022}{2021}$.

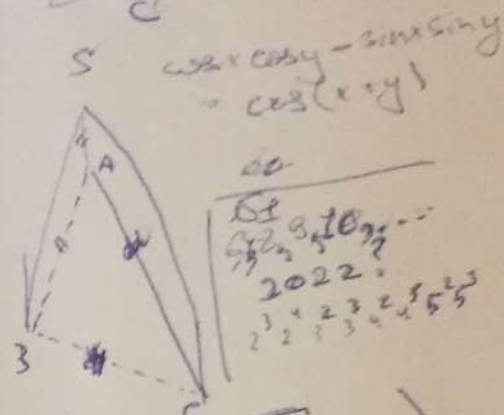
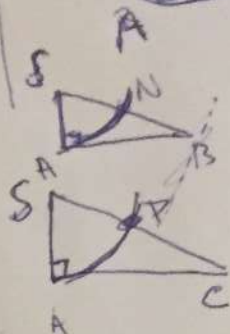
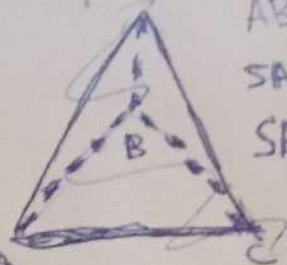
(Честовик) Мет 6

53



54 (Чепухов) Quest 7

ABC - p/5
SAB ⊥ ABC
SAC ⊥ ABC



$$\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x+y)$$

2022
2 2 3 3 4 5 5

52

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$$

$$(4x^2(2x+1) - 9(2x+1)) = (2x+1)(4x^2 - 9)$$

$$\arccos\left(\frac{(2x+1)(4x^2 - 9)}{4\cos 40^\circ \cos 50^\circ}\right) \leq \frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 50^\circ + \sqrt{3} \cos 40^\circ}{4\cos 40^\circ \cos 50^\circ} = \frac{4(\cos 50^\circ \cdot \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 40^\circ)}{4\cos 40^\circ \cos 50^\circ}$$

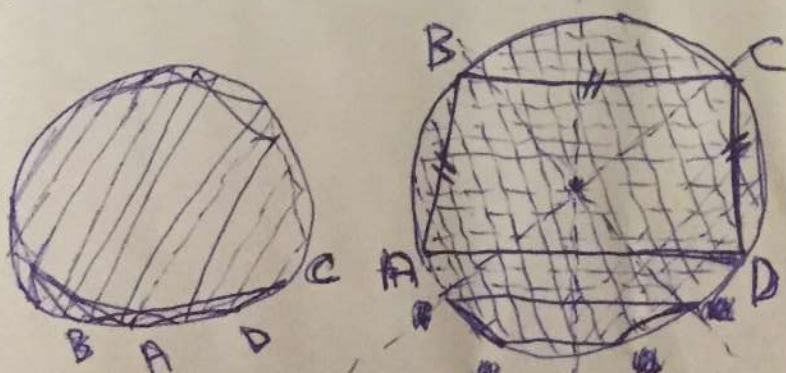
5u

$$a_1 = \frac{4043}{2022}, a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n, |a_n| \leq \frac{2022}{2021} \text{ ?}$$

$$\lim: 1 - \frac{3}{a_n} + \frac{3}{a_n^2} \approx 1$$

5B

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x$$



$$x^3 + 2x^2 + x + a - x^3 + 2x^2 - x + a < 4x^2 + 8x$$

$$4x + 2a < 4x^2 + 8x \Rightarrow 4x^2 + 4x - 2a > 0$$

$$x^2 + x - \frac{1}{2}a > 0$$

$$2a < 4x^2 + 4x \Rightarrow a < 2x^2 + 2x = 2x(x+1)$$

55

(Черновик) лист 8.

