



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Гурьянов Иван Вячеславович**

Класс: **10-11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Гурьянов Иван Вячеславович

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	0 баллов	80 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

Черновик.

$$a^2 + ab = cd.$$

$$3a + b \rightarrow \min.$$

$$a=3; b=1.$$

$$a(a+b) = cd.$$

$$\frac{3a+b}{2} \geq \sqrt{3ab}$$

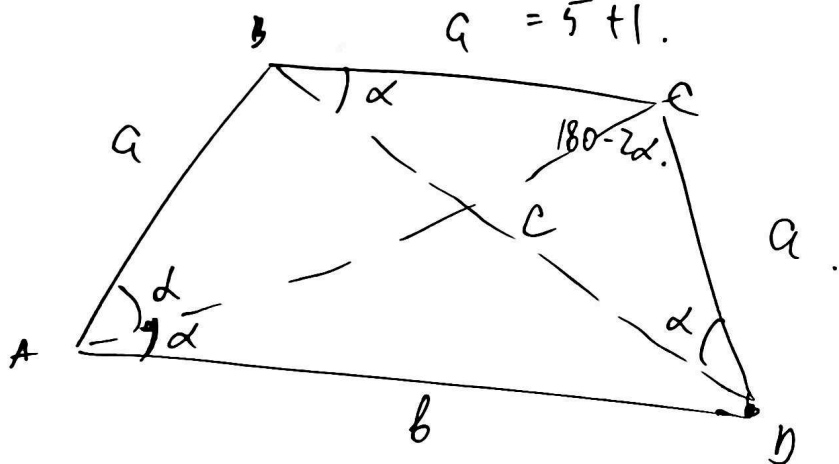
$$10$$

$$2^2 + 1 - 2 \cdot (-\frac{1}{4}) \cdot 2 \cdot 1 = \frac{3ab}{2}$$

$$a = 5 + 1.$$

$$(3a+b)^2 \geq 4 \cdot 3ab.$$

$$12ab.$$



$$3a = b.$$

$$b = a.$$

$$4a^2 = cd.$$

$$2^2 + 2^2$$

$$2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2^2 \cdot (-\frac{1}{4}) = 2ab \cdot \cos 2\alpha - \text{geom.}$$

$$= 7$$

$$2a^2 \cos 2\alpha - \text{geom.}$$

$$1 + 2 \cos 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$2 \cos 2\alpha = -\frac{1}{2}.$$

$$27.$$

$$b1.$$

$$\cos 2\alpha =$$

$$= -\frac{1}{4}$$

$$2^2 + 1 +$$

$$a = b = 1.$$

$$1 + 2 \cos \alpha = \frac{b}{a}$$

$$b \in \mathbb{N}.$$

$$3^{n-1}$$

$$b \leq 3a.$$

$$b \in [0; 3a].$$

$$(1 + \frac{1}{n}) \ln(2021) - \ln 2022 \leq 0.$$

$$a^2 + ab = cd.$$

$$3 \cdot 2 + 1 = 7$$

$$4 \cdot 1 = 4, \text{ imp.}$$

черновик

$$a=2 \quad b=2.$$

$$a=2 \quad b=3 \quad p=9.$$

$$2(1+2\cos 2\alpha) = 3$$

$$1+2\cos 2\alpha = \frac{3}{2}$$

$$2\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$2^2 + 2^2 + 2 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{4} =$$

$$2^2 + 3^2 - \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 =$$

=

$$a=1 \quad b=2 \quad p=5 \quad b=3.$$

$$1+2\cos 2\alpha = 2$$

$$2\cos 2\alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$2a > b$$

$$2\cos 2\alpha = 2$$

$$\cos 2\alpha = 1.$$

$$p=6.$$

$$1^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$2 \quad 3.$$

$$a=2 \quad b=2$$

$$6+2 = 8.$$

$$1+2\cos 2\alpha = 1.$$

$$\cos 2\alpha = 0.$$

$$a=2 \quad b=4$$

$$2\cos 2\alpha = 1$$

$$2^2 + 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2^2$$

amp. 2

Черновик.

10.

3 а.ч.

3 1

$$2 \quad 1 + 2 \cos 2\alpha = \frac{1}{3}.$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}.$$

$$3^2 + 3^2 - \frac{1}{3} \cdot 3^2$$

~~a^2 + c^2~~

$$a^2 (2 + 2 \cos 2\alpha) = BD^2$$

$$a \sqrt{2 + 2 \cos 2\alpha} = BD$$

0; 1; 2; 3; 4.

$$\cos 2\alpha = 1.$$

$$2a = BD.$$

~~$$a^2 + a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cos 2\alpha$$~~

~~а.ч.~~

$$2a = b.$$

$$3a + 2a = 5a.$$

imp. 3.

Черновик.

$$(x^3 + 7x^2 + x)' = 3x^2 + 4x + 1 = 3x^2 + 3x + x + 1$$

$$\frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1 - 8 + 3}{27}$$

$$x^3 + 2x^2 + x + 9 + x^3 - 2x^2 + x - 9 < 4x^2 + 8x$$

$$2x^3 + 7x < 4x^2 + 8x$$

$$x^3 + x < 2x^2 + 4x$$

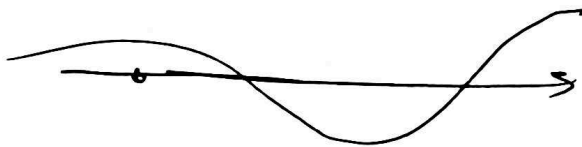
$$x^3 - 3x^2 - 2x$$

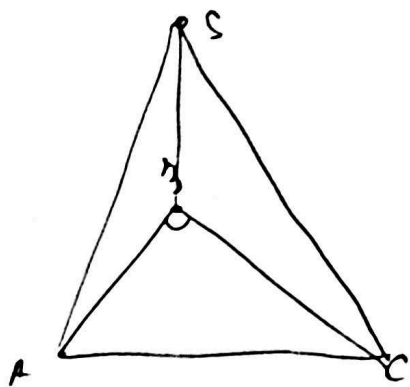
$$x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x < 0$$

$$x^2(x-3) + x(x-3) < 0$$

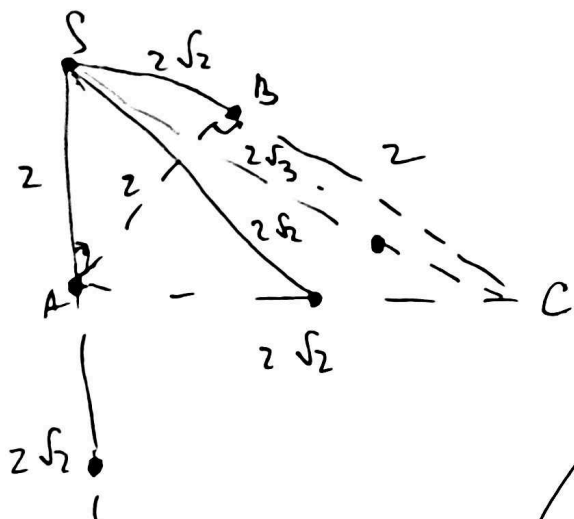
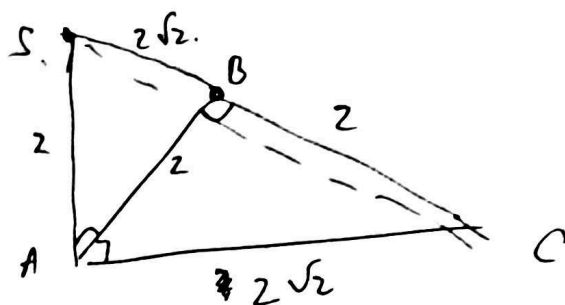
$$x \cdot x^2(x-3) + x(x-3) < 0$$

$$x(x-3)(x+1) < 0$$



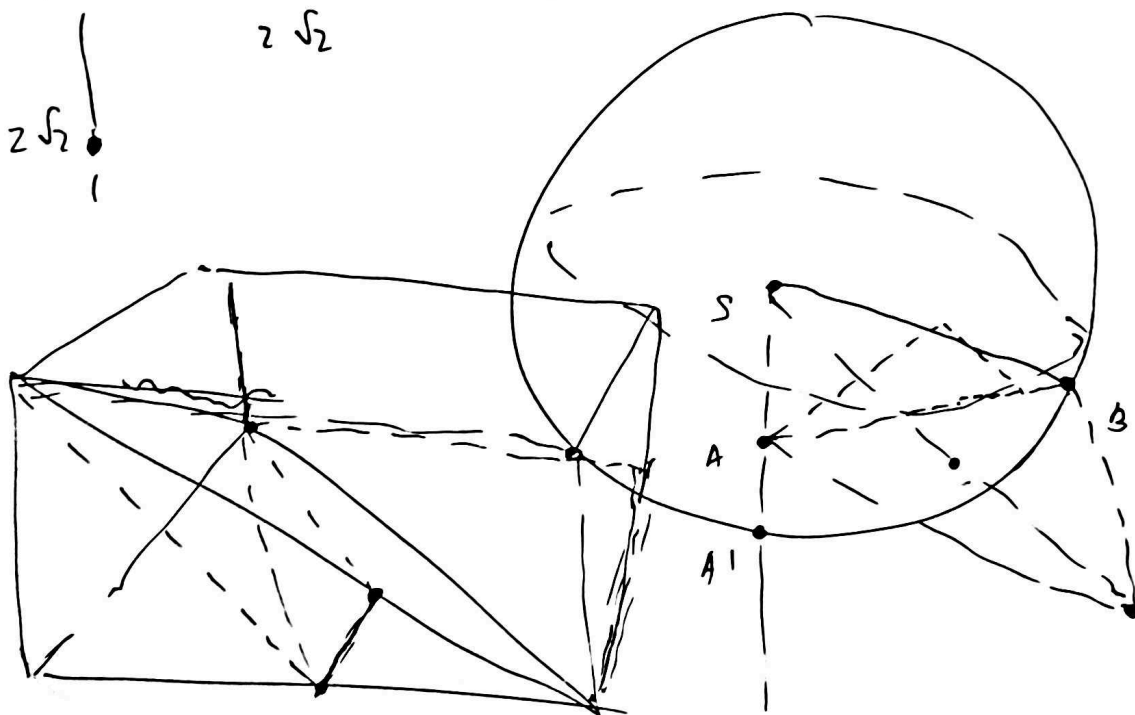


Криво бим.



$$4 + b = 12 \quad 2\sqrt{3}$$

$$a = 2 \cdot (1 + 2\cos\alpha) = b.$$



$$\alpha = 45^\circ.$$

$$2\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$a = 2$$

$$3a + b \rightarrow \min.$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$a \geq \frac{1}{1 + \cos 2\alpha} \geq 1.$$

$$3a + \frac{1}{2} a(1 + \cos 2\alpha) \rightarrow \min.$$

$$1 + 2\cos 2\alpha = 1$$

$$a(1 + 2\cos 2\alpha) \geq 1$$

$$a \geq \frac{1}{1 + 2\cos 2\alpha}$$

$$2\alpha = 120^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ.$$

$$a \geq \frac{1}{1 + 2\cos 2\alpha}$$

$$-2; 3.$$

imp. 6.5

6, 7, 8, 9, ..., 2027.

кепробу

$$\frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 50^\circ} =$$

$$\cos 50^\circ = \sin 40^\circ.$$

$$13^3 =$$

$$= \frac{1}{4 \sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 50^\circ} =$$

$$\sqrt{3} \cdot \cos 50^\circ + \frac{\sqrt{3} \sin 50^\circ + 1 \cdot \cos 50^\circ}{2 \sin 50^\circ \cos 50^\circ} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 50^\circ + \frac{1}{2} \cos 50^\circ$$

$$\sin 100^\circ.$$

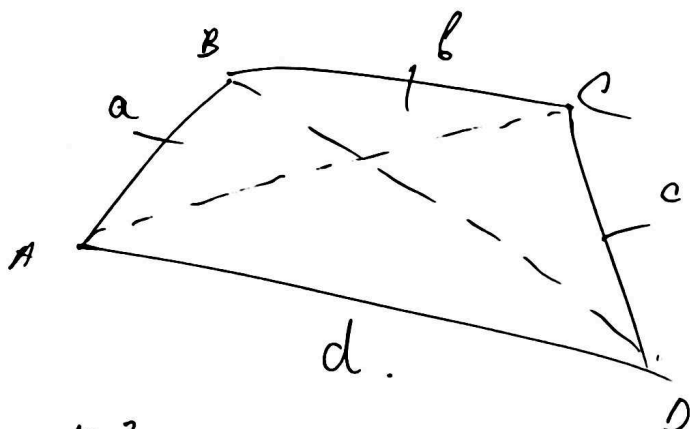
$$\frac{\sin 80^\circ}{\sin 100^\circ} = 1.$$

$$\times \frac{169}{13} = 1690 +$$

$$\cos(50^\circ - 60^\circ) = \cos 10^\circ.$$

$$2^6 = 64$$

$$3^6 = 81 \cdot 9 = 729 + 180 + 27 =$$



$$ac + bd = 4^6 = 64 \cdot 64 > 3600.$$

$$\times 44$$

$$\left(\frac{2021}{2022} + 1 - 1\right)^3 + 1 = \left(\frac{2021}{2022}\right)^3 + 1$$

$$12^3 = 144 \cdot 12 = 1440 + 288$$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$$

$$a_{n+1} = (a_n - 1)^3 + 1.$$

$$a_2 = \left(\frac{2021}{2022}\right)^3 + 1 <$$

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1. (40+6)^2 =$$

$$9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089, 1156, 1225, 1296, 1369, 1444, 1521, 1600, 1681, 1764, 1849, 1936, 2025, 2116, 2209, 2304, 2401, 2500, 2601, 2704, 2809, 2916, 3025, 3136, 3249, 3364, 3481, 3600, 3721, 3844, 3969, 4096, 4225, 4356, 4489, 4624, 4761, 4900, 5041, 5184, 5329, 5476, 5625, 5776, 5929, 6084, 6241, 6400, 6561, 6724, 6889, 7056, 7225, 7396, 7569, 7744, 7921, 8100, 8281, 8464, 8649, 8836, 9025, 9216, 9409, 9604, 9801, 10000.$$

$$44^2$$

$$(40+15)^2 = 2025.$$

$$(40+4)^2 = 1600 + 320 + 16$$

$$= 1600 + 480 + 36 = 2116$$

читовки

н.т.

Если бы мы имели не уравнение, то на 2022-м
Т.е. имели бы все число 2027.
Найдём кол-во кубов и квадратов в посл.
на 1-м первом квадрате: $9 = 3^2$

От $n^2 \leq 2027$ $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq 45$, т.к. $45^2 = 2025$, а $46^2 > 2027$.
Итого, в посл. до 2027 содерж. квадр. чисел.
3, ..., 45, т.е. 43 квадрата.
С первым кубом: $8 = 2^3$

$m^3 \leq 2027$; $m \in \mathbb{N} \Rightarrow m \leq 12$, т.к. $12^3 = 1728$, а
 $13^3 > 2027$.

Итого, в посл. до 2027 содерж. кубы чисел:
2, ..., 12, т.е. 11 чисел.

Также в посл. содерж. две 6-е ст.т.; $2^6 = 64$ и $3^6 = 729$
($4^6 > 3600$), значит в промежутке от 6 до 2027
мы ураним 52 числа.

$$46^2 = 1600 + 480 + 36 = 2116$$

$$13^3 = 169 \cdot 13 = 1690 + 507 = 2197$$

$\Rightarrow$ в промежутке от 2027 до
2100 нет ни кубов,
ни квадратов.

Т.о. на 2022

стр. 1.

читовки

н1.

Т.о. от 2027 до 2100 можно угадать не надо $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ после уравнения 52 можно до 2027 на 2022
мне означают число 2079.

Див: 2079.

003;

$$-1 \leq x - 1 \leq 1$$

$$0 \leq x \leq 2$$

н2.

$$\frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 40^\circ}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos 40^\circ = \sin(90^\circ - 40^\circ) = \sin 50^\circ.$$

$$\frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 50^\circ} = \frac{1}{4 \sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 50^\circ} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cos 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 50^\circ}{2 \sin 50^\circ \cos 50^\circ}$$

$$2 \sin 50^\circ \cdot \cos 50^\circ = \sin 100^\circ$$

$$\sin 80^\circ = \sin(50^\circ + 30^\circ) = \frac{1}{2} \cos 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 50^\circ \quad | \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \cos 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 50^\circ}{2 \sin 50^\circ \cos 50^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 100^\circ} = 1, \text{ м.к.}$$

$$\sin(180^\circ - x^\circ) = \sin x^\circ.$$

imp. 2

числовые

числовые

12

априор $1 = 0$.

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \text{ априор } (x-1) \leq \text{априор } 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 \leq 0 \\ 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

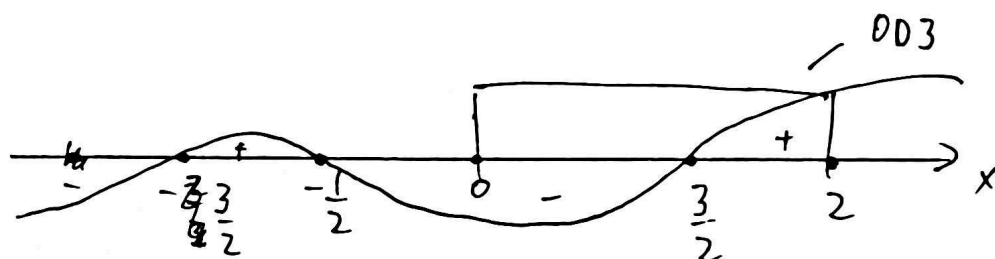
$$x=2, \text{ м.ч. априор } (x-1) \geq 0.$$

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 4x^2(2x+1) - 9(2x+1) = \\ = (2x-3)(2x+3)(2x+1)$$

$$(2x-3)(2x+3)(2x+1) \leq 0$$

совместимая 003/.

Решим методом интервала.



~~Совместим 003~~

$$\begin{cases} 8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 \leq 0 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}$$

$$\text{Реш: } x \in [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}.$$

$\{2\}$.

смп. 3

интервал

14

$$a_1 = \frac{4043}{2022} = 1 + \frac{2021}{2022}$$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n = (a_n - 1)^3 + 1$$

$$a_2 = \left(\frac{2021}{2022}\right)^3 + 1 \quad / \quad a_3 = \left(\frac{2021}{2022}\right)^9 + 1.$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{2021}{2022} - 1\right)^3 + 1 \\ & \left(1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^3 - 1\right)^3 + 1 \end{aligned}$$

Т.е., если $a_n = 2 + 1$, то $a_{n+1} = 2^3 + 1$

$$a_n = \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} + 1; \quad n \geq 2.$$

Если $a_n > 1$, то и $a_{n+1} > 1$,
м.н. $(a_n - 1)^3 > 0$ и
 $(a_n - 1)^3 + 1 > 1$

$$a_n > 1 \Rightarrow |a_n| \leq \frac{2022}{2021} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n \leq \frac{2022}{2021}$$

$$1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \leq \frac{2022}{2021} \Leftrightarrow \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \leq \frac{1}{2021}.$$

$$\exists 3^{n-1} = t \quad n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow t \in \mathbb{N}$$

$$\frac{2021+t}{2022+t} \leq \frac{1}{2021}$$

$$\frac{1}{2022+t} \leq \frac{1}{2021+t+1}$$

$$\frac{2021+t+1}{2022+t} \leq 1.$$

Прологарифмируем

$$\ln \left(\frac{2021+t+1}{2022+t} \right) \leq 0.$$

пер-во

$$\begin{aligned} (t+1) \ln 2021 - t \ln 2022 &\leq 0. \\ t+1 \ln 2021 &\leq t \ln 2022 \end{aligned}$$

смп. 4.

Итого вы
и ч.

$$\frac{t+1}{t} \leq \frac{\ln 2022}{\ln 2021}.$$

$$1 + \frac{1}{t} \leq \frac{\ln 2022}{\ln 2021}.$$

Вернемся к ит. переи.

$$1 + \frac{1}{3^{n-1}} \leq \frac{\ln 2022}{\ln 2021}.$$

$$\frac{1}{3^{n-1}} \leq \frac{\ln 2022}{\ln 2021} - 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0, \text{ а}$$

$$\frac{\ln 2022}{\ln 2021} - 1 > 0 \Rightarrow \text{такое}$$

и найдем.

Отв: да.

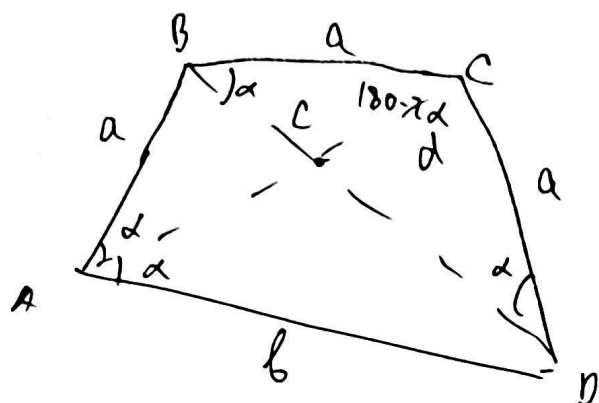
Четовник

лз.

] $AB = BC = CD = a$, при этом $a \in \mathbb{Z}$

] $AC = d$; $BD = c$; $AD = b$

$d, c, b \in \mathbb{Z}$.



~~Четырехуго.~~ ~~Птолемей~~ ~~вписанный~~ $\Rightarrow$ для него впис. м-на

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

$$cd = a^2 + ab.$$

] $\angle CBD = \alpha \Rightarrow \angle CDB = \alpha$ ($BC = CD \Rightarrow$ $ABCD$ - ρ -с/).

$\frac{1}{2} \overset{\frown}{CD} = \alpha = \angle CAD$; аналогично: $\frac{1}{2} \overset{\frown}{BC} = \angle CDB = \alpha = \angle BAC$

(м.к. $ABCD$ - впис.)

Т. $\cos b$ $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$

$$AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos 2\alpha = BD^2$$

$$BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos(180-2\alpha) = BD^2$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos 2\alpha = BD^2$$

$$a^2 + a^2 + 2a^2 \cos 2\alpha = BD^2 \Rightarrow a^2 + a^2 + 2a^2 \cos 2\alpha - a^2 - b^2 + 2ab \cos 2\alpha = 0$$

$$(a-b)(a+b) + 2a(a+b) \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow a-b + 2a \cos 2\alpha = 0 \text{ (по б.)}$$

Кинтович

№3.

$$a(1 + 2\cos 2\alpha) = b.$$

$$\text{периметр} = 3a + b = 3a + (1 + 2\cos 2\alpha)a$$

т.ч. $b \in \mathbb{Z}$, то в уст. из задачи $b \geq 1$, аналог. $a \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ периметр ≥ 4 .

Равенство достигается при $a = 1$ и $b = 1$

$$1 = (1 + 2\cos 2\alpha)1 \Rightarrow 1 + 2\cos 2\alpha = 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = 90^\circ$$

($\alpha = 45^\circ$ в уст. задачи).

Но тогда c и $d \notin \mathbb{Z}$, $\Rightarrow a = 1$ не год. и $b = 1$ не год.

Проверим $a = 2$;

$$b \geq 1, \text{ равенство дост. при } (1 + 2\cos 2\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{4}.$$

$$p = 3a + b = 7, \text{ ч. } c, d \notin \mathbb{Z}.$$

$$BD^2 = 2^2 + 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha.$$

$$a \cdot \sqrt{2 + 2\cos 2\alpha} = BD.$$

Числовым

№ 3.

Организуем перебор. Задача в, или ABCD - выпуклая.

a	b	$1 + 2 \cos 2\alpha$	p
1	1	1	4
1	2	2	5
1	3	3	6
2	1	1	7
2	2	2	8
2	3	3	9
2	4	2	10
2	5	2	11
2	6	3	12
3	1	1	13
3	2	2	14
3	3	3	15
3	4	1	16
3	5	4	17
3	6	5	18
3	7	3	19
3	8	2	20
3	9	7	21
4	1	3	22
4	2	8	23
4	3	3	24
4	4	4	
4	5	2	
4	6	4	
4	7	3	
4	8	4	
4	9	4	
4	10	5	
4	11	4	
4	12	6	

$$a^2(2 + 2 \cos 2\alpha) = BD^2$$

$$1 + 2 \cos 2\alpha = \frac{5}{4}$$

$$2 \cos 2\alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

По теореме синусов в $\triangle ABD$

где

$$\frac{BD}{\sin 2\alpha} = 2R$$

$$\frac{6 \cdot 8}{3\sqrt{3}} = 2R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

Перебирая, найдем что

R - мин при $a=4$ $b=5$

$$R = 17.$$

$$BD = 6, AC = 6.$$

См. 2

$$a^2 \cdot \sqrt{2 + 2 \cos 2\alpha} = BD^2$$

$\sqrt{2 + 2 \cos 2\alpha}$ - радиус

$$\text{Отв: } R = 17; R = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

и 3. (вероятно).
 $(1 + 2 \cos 2\alpha)$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 2,5 \\ 3 \end{array}$$

$$2 \cos 2\alpha = \frac{1}{4}$$

1	2
1	3
1	4
4	$\frac{3}{2}$
4	2
4	7, 5
4	3
4	3, 5
4	4

16.

$$BD = 6$$

$$a = 4$$

3	1
3	2
3	3
3	4
3	5
3	6
3	7
3	8
3	9

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \\ \hline 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 7 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \end{array}$$

$\frac{4}{3}$
 $\frac{5}{3}$
 $\frac{6}{3}$
 $\frac{7}{3}$
 $\frac{8}{3}$
 $\frac{9}{3}$
 $\frac{10}{3}$
 $\frac{11}{3}$
 $\frac{12}{3}$
 $\frac{13}{3}$
 $\frac{14}{3}$
 $\frac{15}{3}$
 $\frac{16}{3}$
 $\frac{17}{3}$
 $\frac{18}{3}$
 $\frac{19}{3}$
 $\frac{20}{3}$
 $\frac{21}{3}$
 $\frac{22}{3}$
 $\frac{23}{3}$
 $\frac{24}{3}$
 $\frac{25}{3}$
 $\frac{26}{3}$
 $\frac{27}{3}$
 $\frac{28}{3}$
 $\frac{29}{3}$
 $\frac{30}{3}$
 $\frac{31}{3}$
 $\frac{32}{3}$
 $\frac{33}{3}$
 $\frac{34}{3}$
 $\frac{35}{3}$
 $\frac{36}{3}$
 $\frac{37}{3}$
 $\frac{38}{3}$
 $\frac{39}{3}$
 $\frac{40}{3}$
 $\frac{41}{3}$
 $\frac{42}{3}$
 $\frac{43}{3}$
 $\frac{44}{3}$
 $\frac{45}{3}$
 $\frac{46}{3}$
 $\frac{47}{3}$
 $\frac{48}{3}$
 $\frac{49}{3}$
 $\frac{50}{3}$
 $\frac{51}{3}$
 $\frac{52}{3}$
 $\frac{53}{3}$
 $\frac{54}{3}$
 $\frac{55}{3}$
 $\frac{56}{3}$
 $\frac{57}{3}$
 $\frac{58}{3}$
 $\frac{59}{3}$
 $\frac{60}{3}$
 $\frac{61}{3}$
 $\frac{62}{3}$
 $\frac{63}{3}$
 $\frac{64}{3}$
 $\frac{65}{3}$
 $\frac{66}{3}$
 $\frac{67}{3}$
 $\frac{68}{3}$
 $\frac{69}{3}$
 $\frac{70}{3}$
 $\frac{71}{3}$
 $\frac{72}{3}$
 $\frac{73}{3}$
 $\frac{74}{3}$
 $\frac{75}{3}$
 $\frac{76}{3}$
 $\frac{77}{3}$
 $\frac{78}{3}$
 $\frac{79}{3}$
 $\frac{80}{3}$
 $\frac{81}{3}$
 $\frac{82}{3}$
 $\frac{83}{3}$
 $\frac{84}{3}$
 $\frac{85}{3}$
 $\frac{86}{3}$
 $\frac{87}{3}$
 $\frac{88}{3}$
 $\frac{89}{3}$
 $\frac{90}{3}$
 $\frac{91}{3}$
 $\frac{92}{3}$
 $\frac{93}{3}$
 $\frac{94}{3}$
 $\frac{95}{3}$
 $\frac{96}{3}$
 $\frac{97}{3}$
 $\frac{98}{3}$
 $\frac{99}{3}$
 $\frac{100}{3}$

$$2 \cos z_2$$

$$\begin{array}{r} -2 \\ -3 \\ -1 \\ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ \hline 3 \\ 1 \\ 4 \\ \hline 3 \\ 5 \\ 3 \end{array}$$

imp 8.9

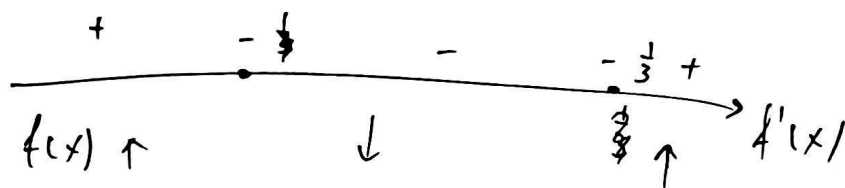
$$16 + 5 \cdot 4 = 6 \cdot 6$$

Умножим

$$\overbrace{|x^3 + 2x^2 + x + a|}^{f(x)} + \overbrace{|x^3 - 2x^2 + x - a|}^{g(x) \cdot 16} < 4x^2 + 8x$$

$$|x(x+1)^2 + a| + |x(x-1)^2 - a| < 4x^2 + 8x.$$

$$(x^3 + 2x^2 + x)' = 3x^2 + 4x + 1 = 3x(x+1) + 1(x+1) = (3x+1)(x+1).$$

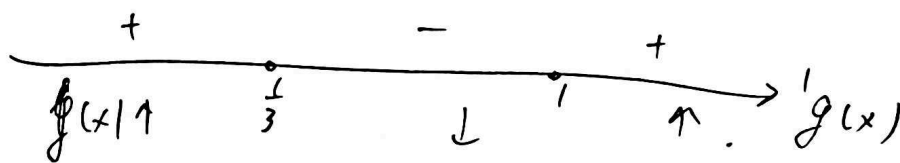


$$(x^3 + 2x^2 + x)' = 3x^2 - 4x + 1 = (x-1)(3x-1).$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$D = 16 - 12 = 4$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{6} = \frac{1}{3}, 1$$



$$x^3 - 2x^2 + x = x^3 + 2x^2 + x$$

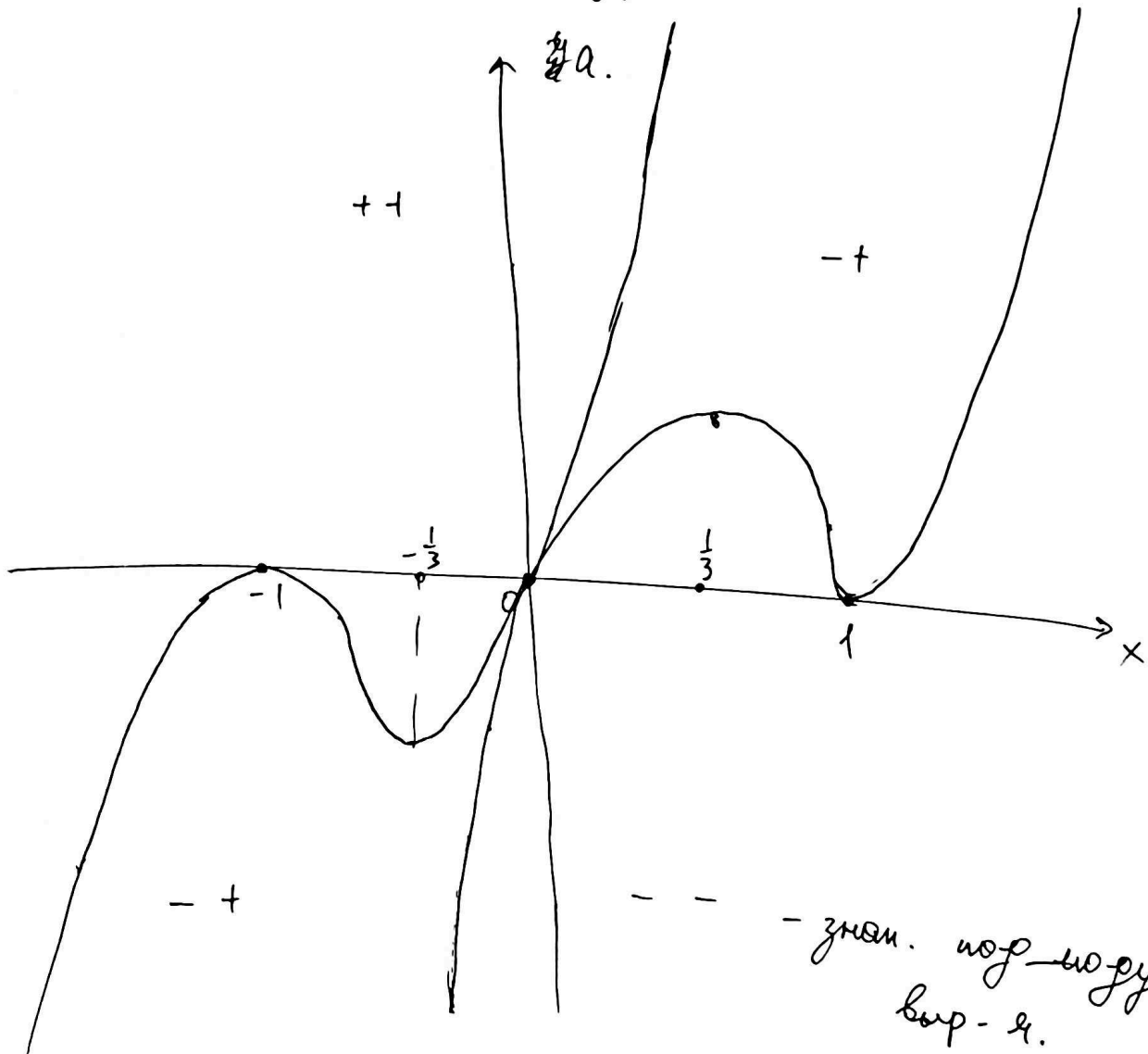
$$4x^2 = 0$$

$$x = 0.$$

Умножим

на 6.

24.

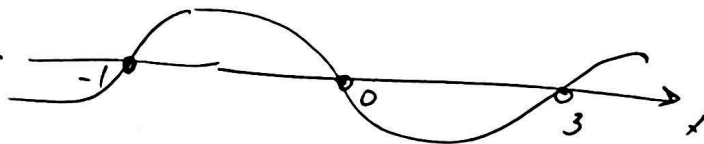


знам. по порядку
выр-я.

$$++; 2x^3 + 2x < 2x^2 + 8x$$

$$(x-3)(x+1)x < 0.$$

не пох.



Imp. 11

умови.

н 6.

1х. - - :

$$-x^3 - 2x^2 - x - a - x^3 + 2x^2 - x + a < 4x^2 + 8x$$

$$-2x^3 - 2x - 4x^2 - 8x < 0.$$

$$x^3 + 5x + 4x^2 > 0$$

$$x(x^2 + 4x + 5) > 0$$

$$x(x^2 + 5x).$$

$$x > 0$$

не пох.

+ - :

$$x^3 + 2x^2 + x + a - x^3 + 2x^2 - x + a < 4x^2 + 8x$$

$$2a < 8x$$

$$a < 4x.$$

- + :

$$-x^3 - 2x^2 - x - a + x^3 + 2x^2 + x + a < 4x^2 + 8x$$

$$-2a < 4x.$$