



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Бахтияров Яков Вячеславович**

Класс: **9**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Бахтияров Яков Вячеславович

Класс: 9

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	10 баллов	95 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

Задача №1

Пусть производительности одного рабочего за один рабочий день — a грядок, а кол-во рабочих в начале — n . Тогда по условию: $a \cdot n = 10$; также по условию известно, что во второй день они сделали работу, а т.к. кол-во грядок изначально целое, и в первый день они вскопали целое число грядок, то и во второй день вскопали целое число грядок $\Rightarrow 7 \cdot a : 2 = \text{целое}$ ($:2$, потому что они работали половиной раб. дня) $\Rightarrow a$ можно представить, как дробь вида $a = \frac{2 \cdot x}{7}$; где x — натуральн. число (кол-во грядок — натуральное). Тогда из первого условия: $a \cdot n = 10 \Rightarrow \frac{2 \cdot x \cdot n}{7} = 10 \Rightarrow \frac{x \cdot n}{7} = 5$; где x и n — натур. $\Rightarrow$ либо x , либо $n : 7$ и при этом либо x , либо $n : 5$. ^{и ни на что другое!} А т.к. во второй день пришли 7 человек, то $n \geq 7$. Из этого следует, что n может быть равно только 35, т.к. $n > 7$, а 5 и 7 не подходят $\Rightarrow$ нужно взять их НОК $= 35$. $\Rightarrow x = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{7} \Rightarrow$ во второй день вскопали $\frac{2 \cdot 7}{7 \cdot 2} = 1$ грядку $\Rightarrow$ всего их было $10 + 1 = 11$.

Ответ: 11 грядок

Задача №2.

Запишем число вида abc как $100a + 10b + c$. Тогда из условия:

$$(abc - acb) : 72 \Rightarrow (100a + 10b + c - 100a - 10c - b) : 72 \Rightarrow (9b - 9c) : 72 \Rightarrow 9(b - c) : 72 \Rightarrow (b - c) : 8$$

То есть нам нужны все 3-значные числа abc , у которых $b - c : 8$. Возможны всего 3 случая:

- 1) $b - c = 8$
 - 2) $b - c = 0$
 - 3) $b - c = -8$
- в 1) случае всего 2 возможных пары b и c : I. $b = 8; c = 0$; II. $b = 9; c = 1$
 в 2) случае всего 10 возм. пар: I ~~возм.~~ $b = c = 0$ II $b = c = 1 \dots$ X $b = c = 9$
 в 3) случае всего 2 возм. пары: I. $b = 0; c = 8$; ~~возм.~~ II. $b = 1; c = 9$

То есть всего 14 возможных ^{различных} пар b и c у нас существует всего. И при этом для каждой пары есть значения a (от 1 до 9, 0 быть не может: а стоит в начале) $\Rightarrow$ всего ~~так~~ таких чисел abc будет $9 \cdot 14 = 126$.

Ответ: 126 чисел.

Задача №3.

Пусть $x+y=A$. Решим эту задачу относительно A и y :

$$A \cdot (A+1) + y = 2022$$

$$A^2 + A + y = 2022 \quad (1)$$

П.к. x и y - натур. числа, то y может принимать значения от 1 до $A-1$. Рассмотрим крайние случаи y , чтобы найти ограничения на A :

Из (1) получаем, что: $\textcircled{I} \quad A^2 + A + 1 \leq 2022$

$$A^2 + A \leq 2021$$

$\Downarrow$

$$A \leq 44, \text{ т.к. } 44^2 + 44 = 1980,$$

$$\text{а } 45^2 + 45 = 2025 + 45 = 2070$$

$\textcircled{II} \quad A^2 + A + A - 1 \geq 2022$

$$A^2 + 2A \geq 2023$$

$\Downarrow$

$$A \geq 44, \text{ т.к. } 44^2 + 2 \cdot 44 = 2024,$$

$$\text{а } 43^2 + 2 \cdot 43 = 1849 + 86 = 1935$$

Итого получается, что $A \leq 44$ и $A \geq 44 \Rightarrow A = 44 \Rightarrow x+y=44$. Подставим в равенство (1):

$$44 \cdot 45 + y = 2022$$

$$y = 2022 - 1980 = 42 \Rightarrow x = 44 - 42 = 2$$

Значит возможна только 1 пара x и y : 2 и 42

Ответ: $x=2; y=42$

Задача №5.

У нас имеется кв. трехчлен вида $x^2 + ax + 2022 = 0$. Чтобы x и y несли действ. корни, его D должен быть ≥ 0 : $D = b^2 - 4ac = a^2 - 8088$ в данном случае; он ≥ 0 при $a \geq 90$, т.к. a ^{целое} и $= \{0; 99\}$:

$$90^2 - 8088 = 8100 - 8088 = 12, \text{ что } > 0; \text{ но при этом } 89^2 - 8088 = 7921 - 8088 = \text{что-то отрицательное } (\times).$$

И при этом D всегда > 0 , т.к. 8088 не является квадратом натур. числа $\Rightarrow$ у $x^2 + ax + 2022$ всегда будет 2 корня при $a_i \geq 90$ и ≤ 99 . По теореме Виета $x_{i1} + x_{i2} = -a_i \Rightarrow$ сумма всех корней ур-нения будет равна $-a_1 - a_2 \dots - a_n$, т.е. мы докажем, что подойдут только $a_i = \{90; 99\}$; то сумма всех корней

$$\text{будет равна: } -(90 + 91 + \dots + 99) = -\left(\frac{10 \cdot 189}{2}\right) = -945$$

Ответ: $\sum x_{ik} = -945$

Задача №4.

Предположим, что Тётя строит замок на клетчатой доске, при этом на каждую клетку он ставит не более одного кубика. Нарисуем эту доску исходя из входовых проекций:

Заметим, что из проекций следует, что в каждой строке и в каждой строке как минимум по одной Башенке из кубиков (несколько кубиков, поставленных друг на друга), которые просматриваются как один кубик при виде сверху

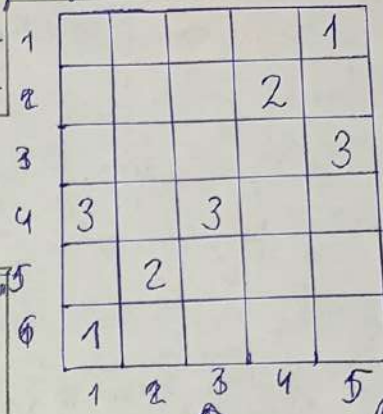
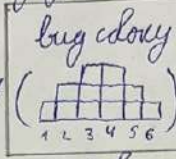


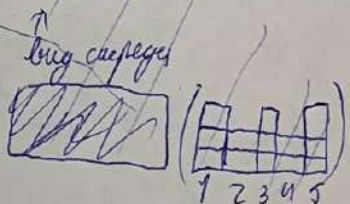
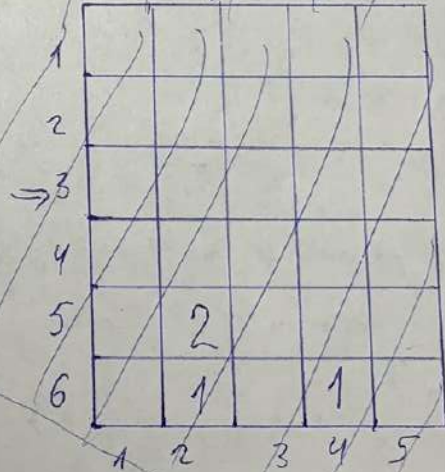
рис. 1

⇒ эти Башенки как минимум 6. Однако заметим, что в виде спереди есть минимум 3 Башенки с высотой 3 кубика, а в виде сверху всего 2, это значит, что в виде сверху как минимум одна Башенка "спряталась" за другими ⇒ Башенки минимум 7 (5 рядов по 1 Башенке, и 1 ряд с 2-мя Башенками)

И тогда вот пример на 7. (рис. 1)

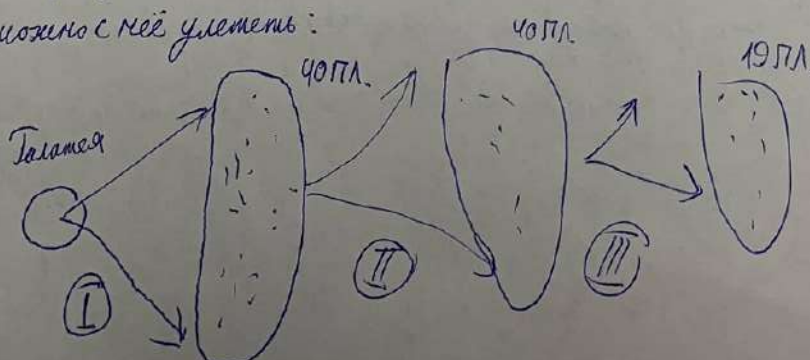
(числа в таблице - высота кубиков). Это всего 7 кубиков, если для нас нужно было учитывать только минимальные значения - ширина кубиков на доске и тогда на виде сверху появляются еще 4 кубика в строках, то есть 4 Башенки и тогда мин. кол-во Башенки это $7+4=11$. Пример на 11 как на рисунке (рис. 2):

Ответ: 7 кубиков



Задача №6.

Нарисуем Таламю-37 и проведем все варианты, куда можно с ней улететь:

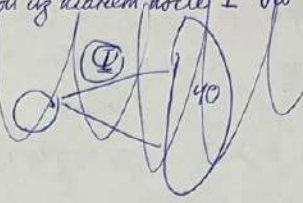


(Продолжение на стр. 4)

Задача 156 (Продолжение)

После первого перелёта мы могли попасть в 40 планет, докажем, что после второго в т.ч. сможем попасть в ^{21 планету} ~~в 21 планету~~.

Если бы мы могли попасть максимум в 39 планет с одной из планет после I-ого перелёта, то эти 40 планет I ~~или~~ или максимум были бы соединены $40 \cdot 40 - 39 \cdot 40 = 40$ связями между собой. А т.к. связи только односторонние, то

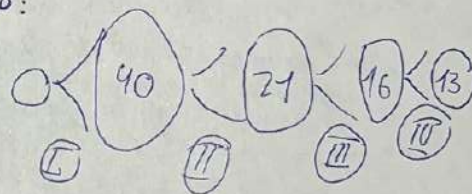


Между собой эти 40 планет макс. могут организовать по одному перелёту в каждой паре.

То есть между собой макс. $\frac{40 \cdot 39}{2}$ перелётов = $20 \cdot 39 = 780$. А всего у них $40 \cdot 40 = 1600$ перелётов $\Rightarrow 820$ перелётов минимум будут отправлены на др. планеты. По принципу Дирихле гарантированно мы попадём в $\lceil \frac{820}{40} \rceil$ планет = 20,5 планет то есть 21 пл.

Также докажем, что мы попадём из этих 21 планеты в 16:

$$\frac{21 \cdot 40 - \frac{21 \cdot 20}{2}}{40} = 21 - \frac{21}{4} = 15,75 \rightarrow \text{т.е. } 16 \text{ пл.}$$



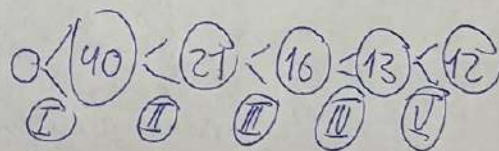
Также докажем, что мы попадём из этих 16 в 13:

$$\frac{16 \cdot 40 - \frac{16 \cdot 15}{2}}{40} = 16 - 3 = 13$$

И теперь мы за III перелёта гарантированно покроем $40 + 21 + 16 + 13$

Также докажем, что мы покроем 12 пл. этими 13-ю

$$\frac{13 \cdot 40 - \frac{13 \cdot 12}{2}}{40} = 13 - \frac{39}{20} = 12 - \frac{19}{20} \rightarrow 12 \text{ пл.}$$



Итого мы получили что за IV перелётов мы покроем гарантированно ~~40+21+16+13~~ $1 + 40 + 21 + 16 + 13 + 12 = 103$ пл. А их было 100. И в зависимости от того, где находится Пандора мы можем добраться до неё за 1-5 перелётов.

Ответ: от 1 до 5 прыжков