



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Магизова Яна Альбертовна**

Класс: **9**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Магизова Яна Альбертовна

Класс: 9

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	10 баллов	15 баллов	15 баллов	10 баллов	15 баллов	90 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

1 день - 10 гр. картошки
2 день + картошки

10

$$\frac{7}{x} = \frac{5}{10}$$

$$S = \frac{40}{x}$$

$$6 \text{ гр. } \frac{35}{x} + 10$$

$$abc - acb : 72 \quad 72 = 9 \cdot 2^3 = 8 \cdot 9$$

$$bc^n - cb : 9 \quad \text{где } abc = acb$$

$$\text{Наименьше: } bc - cb : 8$$

$$9b - 9c : 8$$

$$9(b - c) : 8$$

$$b - c : 8 \Rightarrow 19$$

$$91$$

$$\begin{array}{r} 90 \\ \times 30 \\ \hline 8100 \end{array}$$

$$2022 \cdot 4 = 8088$$

$$x = 4$$

11

$$x^2 + y^2 + 2xy + x + 2y = 2022 \quad (y+1)^2 \cdot x(x+2y+1) = 2023$$

$$x(x+1) + 2y(x+1) + y^2 = 2022$$

$$50 \cdot 50 = 2500$$

$$(x+1)(2y+x) + y^2 = 2022$$

$$\begin{array}{r} \times 45 \\ 45 \\ \hline 255 \\ 180 \\ \hline 2055 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 44 \\ 44 \\ \hline 176 \\ 176 \\ \hline 1936 \end{array}$$

x работников

$$x \cdot 10$$

$$7 \cdot 2$$

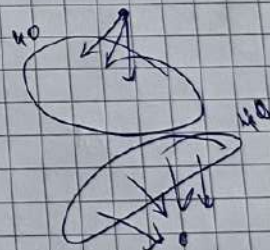
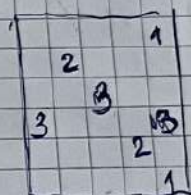
$$\frac{2 + \frac{1}{2}}{x} = \frac{10}{x} \Rightarrow \frac{2.5}{x} = \frac{10}{x} \Rightarrow \frac{5}{x}$$

$$\begin{array}{r} \times 44 \\ 44 \\ \hline 220 \\ 176 \\ \hline 1980 \end{array}$$

$$42 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} \times 93 \\ 93 \\ \hline 44 \end{array}$$

$$0 - 1 - 2 - 3$$



35 работников

10 человек

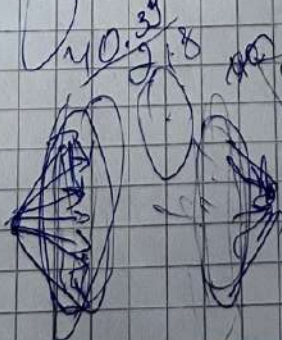
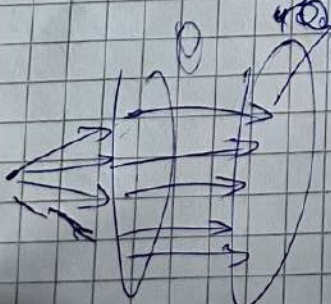
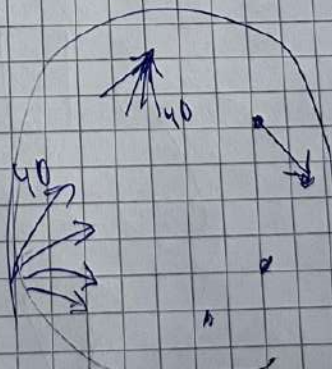
4 работников

по 10 гр. картошки

x человек

22 гр. картошки

100 гр. картошки

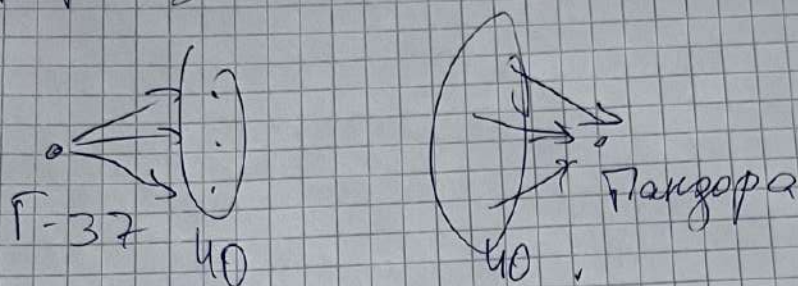


$$\begin{array}{r} 40 \cdot 39 \\ 39 \\ \hline 1560 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12345 \\ 12345 \\ \hline 12345 \end{array}$$

перевод

Рассмотрим 40 вершин [№] из которых выходит
ребра в Панзору и 40 вершин в которых входят
ребра из Подземки 37



Множество 40 вершин, в которых входят
ребра из Г-37 ведет в парную хотя бы
40-40-20-39 ребер. Поскольку всего входит 40-40, а всего
друг между другом их максимум $\frac{40-39}{2} = 20-39$.
Итак, из них ведет парную 20-39
20 (40-39) = 20-41 ребро. Заметим, что вершин
кроме подземки 82-ух 18- в них входит максимум
18-40 ребер $18-40 < 20-41 \Rightarrow$ хотя бы одно ребро из
которых входит ребро из Г-37 ведет в 40
из которых выходит ребра в Панзору. Либо в
саму Панзору $\Rightarrow$ есть путь длины 1, 2 или 3.
Противоречие.

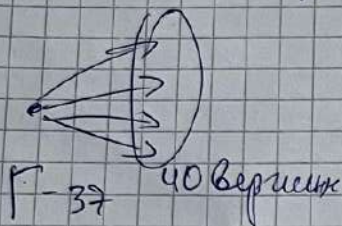
Переведем на язык графов. Планета - вершина,
ответ: 1, 2 или 3. норма - фронтальная река

Пример 1:

Очевиден пример кол. Граф со 100 вершинами и 40 ребрами
выходящими из каждой и входящими в каждую вершину
по соседнему ребру. - Галактика-37 и Пандора.

Пример 2:

Тот же граф. Разделим вершину - Галактика-37. от кол. 40



ребра (выходящих из кол). От этих ребер

(которые от какого-то

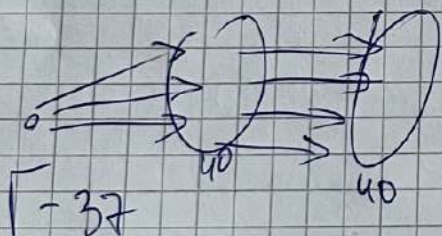
есть ребро в новую вершину

(одну из них назовем Пандора)

Заметим, что путь кратчайшим. Если

есть нет среди 40 вершин на расстоянии 1 от Галактики-37

Пример 3:



От Галактики-37 ведут ребра
из 40 вершин.

Из этих 40 вершин ребра ведут

в другие 40 вершин одинаково

те (из них входит по 40 в дру-

гую 40 входит по 40 - такое

может быть). Далее из одной

из этих 40 есть ребро в новую вершину - одна из них
Пандора.

Оценка: Пусть может быть так, что не было. Рассто-
яние между Г-37 и Пандорой хотя бы 4. Тогда:

З

№5.

$$x^2 + ax + 2022 = 0.$$

Когда Андрей подставлял под a $0, \dots, 99$ дискриминант был $D = a^2 - 4 \cdot 2022 = a^2 - 8088$. Заметим, что корни уравнения имелись только когда $D \geq 0 \Rightarrow a^2 - 8088 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq 8088 \Rightarrow a \geq 90$, ведь $90^2 = 8100$ и $8100 - 8088 = 12 > 0$, при $a \leq 89$ (ведь a натуральное) $a^2 \leq 8021 < 8088$.

$$\begin{array}{r} \times 89 \\ 89 \\ \hline 901 \\ 712 \\ \hline 8021 \end{array}$$

Итак только при $a \geq 90$ и при всех таких a $a^2 - 8088 > 0 \Rightarrow$

$\rightarrow$ имеет два корня. Заметим, что при различных

a_1, a_2 - натуральных от 90 до 99 включительно, корни

x_1' и x_1'' , x_2' и x_2'' таковы, что $x_1' + x_2'$ (или любая другая

по т. Виета сумма $x_1'' = \frac{2022}{x_1'}$ и $x_2'' = \frac{2022}{x_1'}$, пара 3 корней уравнений с a_1 и с a_2)

то есть $-x_1' - x_1'' = -x_2' - x_2'' = a_1 = a_2$. Противоречие.

Когда все корни всех десяти уравнений различны, тогда

по т. Виета для каждого из уравнений их сумма: $-90 - 91 -$

$\dots - 99 = -199 \cdot 5 = -500 - 450 - 45 = -950 - 45 = -995$.

Ответ: -995 .

№1

Из вида спереди видно, что существует три (хотя бы) столба
высотой 3, их высота ровно 3. Из вида справа понятно, что
существует хотя бы 2 столба высотой ровно 2 и хотя бы 2 столба
высотой ровно 1. Следовательно, столбов хотя бы $3+2+2=7$.
То есть и в виде сверху будет хотя бы 7 разноразных кубиков
(это верхние кубики столбов). Пример на 4:

			1
	2		
3		3	
		2	
			1

Вид сверху

Отмеченные клетки - показывают где есть столбы,
числа в них показывают высоту столба. Нетрудно
убедиться, что вид спереди и сбоку будет как в
условии.

Ответ: 7.

№2

Рассмотрим случаи: $x+y=44$, $x+y \leq 43$, $x+y \geq 45$.

Если $x+y=44$, то $(x+y)(x+y+1)+y = 44 \cdot 45 + y = 1980 + y = 2022 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = 42 \Rightarrow x = 44 - y = 2.$$

$$\begin{array}{r} \times 45 \\ 44 \\ \hline 180 \\ 180 \\ \hline 1980 \end{array}$$

Если $x+y \leq 43$, то $(x+y)(x+y+1)+y \leq 43 \cdot 44 + 42 = 1882 + 42 = 2022$

$$\begin{array}{r} \times 44 \\ 43 \\ \hline 132 \\ 176 \\ \hline 1882 \end{array}$$

Если $x+y \geq 45$, то $(x+y)(x+y+1)+y \geq 45 \cdot 46 + 1 = 2070 + 1 = 2071$

$$\begin{array}{r} \times 46 \\ 45 \\ \hline 230 \\ 184 \\ \hline 2070 \end{array}$$

Поскольку x и y ^{натуральные} ~~целые~~ все случаи рассмотрены.

Ответ: $x=2$; $y=42$

№2

a, b, c - цифры. Поскольку существуют перевернутые $\overline{abc}$ и $\overline{acb}$
 $a \neq 0$. $\overline{abc} - \overline{acb} = 100a + 10b + c - (100a + 10c + b) = 9b - 9c =$
 $= 9(b - c) : 72$ либо $b = c$, т. к. $0 : 72$ либо $72 = 9 \cdot 8 \Rightarrow b - c : 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} b=9, c=1 \\ b=8, c=0 \\ b=1, c=9 \\ b=0, c=8 \end{cases}$

10 вариантов. Притом во всех случаях из ^{10-ти} цифр a - любой
от 1 до 9 $\Rightarrow$ всего таких чисел ~~128~~ $14 \cdot 9 = 90 + 36 = 126$.

Ответ: 126 чисел.

Обозначим x - число работников в первый день; y - количество
 ульев, которое вспахивает за день один работник. Тогда в первый
 день было вспахано xy ульев, что по условию равно 10 $\Rightarrow xy = 10 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \frac{10}{y}$ $y = \frac{10}{x}$. Тогда во второй день пришло всего 7 рабочих.
 и каждый работник по дню $\Rightarrow$ вспахал по $\frac{y}{2}$ ульев. Значит,
 общее число ульев, вспаханного во второй день: $7 \cdot \frac{y}{2} =$
 $= 7 \cdot \frac{10}{2x} = \frac{35}{x}$. Это число должно быть натуральным
 числом - натуральное число, в первый день вспахано 10 - натураль-
 ное число $\Rightarrow$ и во второй день вспахано натуральное число
 ульев. Значит $\frac{35}{x} = \frac{7 \cdot 5}{x}$ натуральное число. Значит $x = 7$ без
 во второй день некоторые работники не вошли на работу.
 Тогда x - делитель 35, больший 7 $\Rightarrow x = 35$. Итого, всего 35 рабо-
 чих $\Rightarrow y = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$. Значит во второй день вспахано: $7 \cdot \frac{y}{2} =$
 $= 7 \cdot \frac{2}{7 \cdot 2} = 1$ улей. Но если всего по подсчетам ульев было $10 + 1 =$
 $= 11$ ульев.