



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Карпова Мария Александровна**

Класс: **10-11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Карпова Мария Александровна

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	0 баллов	80 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

Числовик ① вариант 11-1

Задача №2

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$$

$$\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{4\sin 40^\circ \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3} \cos 40^\circ}{4\sin 40^\circ \cos 40^\circ} = \frac{\sin 40^\circ + \sqrt{3} \cos 40^\circ}{4\sin 40^\circ \cos 40^\circ} =$$

$$\frac{2\sin(40^\circ + \arctan \sqrt{3})}{2\sin 80^\circ} = \frac{2\sin(40^\circ + 60^\circ)}{2\sin 80^\circ} = \frac{\sin 100^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin(90^\circ + 10^\circ)}{\sin(90^\circ - 10^\circ)} = \frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 1$$

$$* a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \arctan(\frac{b}{a}))$$

$$\sin 40^\circ + \sqrt{3} \cos 40^\circ = 1 \cdot \sin 40^\circ + \sqrt{3} \cos 40^\circ = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} \sin(40^\circ + \arctan(\frac{\sqrt{3}}{1})) = 2\sin(40^\circ + \arctan \sqrt{3})$$

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos(\cos 0^\circ)$$

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq 0.$$

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 4x^2(2x+1) - 9(2x+1) = (4x^2 - 9)(2x+1) =$$

$$(2x+1)(2x-3)(2x+3)$$

$$(2x+1)(2x-3)(2x+3) \arccos(x-1) \leq 0.$$

$-1 \leq x-1 \leq 1$ - ограничение $\arccos$.

$$0 \leq x \leq 2$$

$$\text{значит } 2x+1 > 0.$$

$$2x+3 > 0.$$

поделим пер-во на положительн. число $2x+1$, затем на $2x+3$.

$$(2x-3) \arccos(x-1) \leq 0.$$

т.к. $\arccos(x-1) \in [0, \pi]$, то $\arccos(x-1) \geq 0$.

Если $\arccos(x-1) = 0$, то $x-1 = 1 \Rightarrow x = 2$. проверим

$$(2 \cdot 2 - 3) \cdot 0 \leq 0 \quad - \text{верно} \Rightarrow x = 2 - \text{корень.}$$

Иначе $\arccos(x-1) \neq 0$, то $\arccos(x-1) > 0$.

поделим прав-во на положительн. число

$$2x-3 \leq 0.$$

$$x \leq \frac{3}{2}.$$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \text{ или } x = 2.$$

и у-е $\arccos(x-1) \in [0, \pi]$

Ответ: $[0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}$

Честовик ③ задача 4

$$a_1 = \frac{4043}{2022}$$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n = a_n(a_n^2 - 3a_n + 3) =$$

$$a_n((a_n - 1.5)^2 + 0.75).$$

Рассмотрим $(a_n - 1.5)^2 + 0.75$ - парабола, ветви ~~вверх~~ вверх

$a_n = 1.5$ - вершина на $(-\infty; 1.5)$ - убывание, на $(1.5; +\infty)$ -

возрастание.

Если $a_n \in (\frac{2022}{2021}; \frac{4043}{2022}]$, то максимальное значение

$$\text{на левой ветви } M_1 \leq \left(\frac{2022}{2021} - 1.5\right)^2 + 0.75 = \left(\frac{4044 - 6063}{4042}\right)^2 + 0.75 =$$

$$\left(\frac{2019}{4042}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{4038 + 6063}{8084} = \frac{4076361}{16337764} + \frac{3}{4} = \frac{4076361 + 12253323}{16337764} =$$

$$\frac{16329684}{16337764}.$$

$$\frac{16329684}{16337764}.$$

$$\text{на правой ветви } M_2 \leq \left(\frac{4043}{2022} - 1.5\right)^2 + 0.75 = \left(\frac{1010}{2022}\right)^2 + \frac{3}{4} =$$

$$\frac{1020100 + 3066363}{4088484} = \frac{4086463}{4088484}.$$

$$\text{т.е. максимум } q = (a_n - 1.5)^2 + 0.75 \leq \max(M_1, M_2).$$

В обоих M_1, M_2 числитель меньше знаменателя $\Rightarrow q < 1$.

$$\text{Значит пока } a_n \in \left(\frac{2022}{2021}; \frac{4043}{2022}\right]$$

$$a_1 \leq a_1$$

$$a_2 \leq a_1 \cdot q$$

$$a_3 \leq a_1 \cdot q^2$$

$$a_n \leq a_1 \cdot q^{n-1}.$$

правая часть - геом. прогрессия с $q < 1$, где q - какое число.

известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \rightarrow 0$, значит найдется n , для которого

$$a_n \leq a_1 \cdot q^{n-1} \leq \frac{2022}{2021}. \text{ Указанно } a_n \in \left(\frac{2022}{2021}; \frac{4043}{2022}\right] \Rightarrow \text{убывает до}$$

тех пор, пока $a_n \in \left(\frac{2022}{2021}; \frac{4043}{2022}\right] \Rightarrow \text{найдется } n \text{ при котором.}$

Честовик 3

Нужно найти n и точно не менее $\frac{2022}{2021}, \frac{4043}{2022}$

Пусть x такое, что a_x делится, а a_{x+1} уже не ~~делится~~ делит в $(\frac{2022}{2021}, \frac{4043}{2022}]$ (точка есть такое).

$a_{x+1} < a_x$ (т.к. a_x еще меньше в $(\frac{2022}{2021}, \frac{4043}{2022}]$)

а $a_{x+1} \notin (\frac{2022}{2021}, \frac{4043}{2022}]$.

значит $a_{x+1} \leq \frac{2022}{2021}$.

a_x - делится. $(a_x - 1,5)^2 + 0,75$ - делится $\Rightarrow$

a_{x+1} - делится $\Rightarrow a_{x+1} \geq 0$

$0 \leq a_{x+1} \leq \frac{2022}{2021} \Rightarrow |a_{x+1}| \leq \frac{2022}{2021}$.

$n = x+1$ - искомое значение n .

Ответ: найдется.

Числовик ④
Задача 1.

Пусть $f(x)$ - количество чисел оканчивая в последовательности
или обрат числа $\leq x$. ($x \in \mathbb{N}$). Очевидно такая функция
не возрастает, убывает.

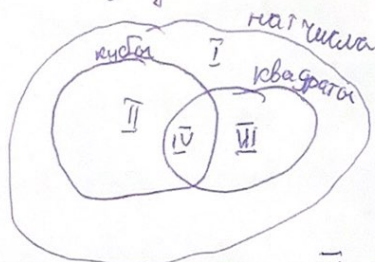


Диаграмма
Эйлера-Венна.

$$f(x) = \underbrace{I - II - III}_{\text{натур. квадр. кубов}} + \underbrace{IV}_{\text{кубиквадраты}} - \left(\underbrace{5}_{\{1,2,3,4,5\}} - 2 - \frac{1}{\{1,4\}} + \frac{1}{\{1\}} \right) =$$

$$I - II - III + IV - 3.$$

IV - это пересечение квадратов и кубов, т.е. в степени

для x : $I = x$

$$II = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$$

$$III = \lfloor \sqrt[3]{x} \rfloor$$

$$IV = \lfloor \sqrt[6]{x} \rfloor$$

$$f(x) = x - \lfloor \sqrt{x} \rfloor - \lfloor \sqrt[3]{x} \rfloor + \lfloor \sqrt[6]{x} \rfloor - 3$$

Нам интересно такое x , что $f(x) = 2022$.

но неубывание $\Rightarrow$ таких x может быть несколько.

Исходя из определения $f(x)$ если $f(x) = f(x+1)$, значит

$x+1$ в последовательности не вошло. Распространив это на

все x : $f(x) = 2022$ нас интересуют минимальный $f(x) = 2022$

Если $x = 2060$, то

$$f(x) = 2060 - 45 - 12 + 3 = 2006.$$

$$45^2 < 2060 < 46^2$$

$$\parallel$$

$$2116$$

$$12^3 < 2060 < 13^3$$

$$\parallel$$

$$1728$$

$$\parallel$$

$$2197$$

$$3^6 < 2060 < 4^6$$

$$\parallel$$

$$729$$

$$\parallel$$

$$4096$$

числовик ⑤

Если $x = 2080$ (нуленно 16 чисел $\Rightarrow$ исконый $x \geq 2060 + 10$)
 $f(x) = 2080 - 45 - 12 + 3^3 = 2023 \Rightarrow$ исконый $x < 2080$ ($f(x)$ нечет)

Если $x = 2078$ $f(x) = 2078 - 45 - 12 + 3 - 3 = 2021 \Rightarrow$ исконый $x > 2078$ ($f(x)$ нечет)

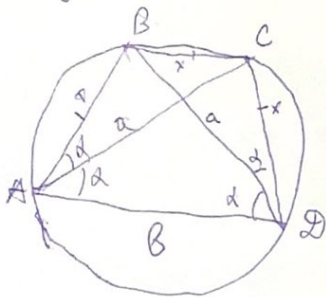
Значит $x = 2079$. проверим.

$$f(x) = 2079 - 45 - 12 + 3 - 3 = 2022.$$

Ответ: ~~2022~~ 2079.

Очистовик ©

Задача 3.



по Т. Птолемея

$$a \cdot a = x \cdot b + x \cdot x$$

$$a^2 = xb + x^2 \quad b, x \in \mathbb{N}$$

Обозначим $AB = BC = CD = x$

Т.к. $BC = CD$ и $AB = BC$, то

AC и BD - бис-сы угла

$\angle AED$ и $\angle CEA$ соотв $\Rightarrow$

$$\angle BAC = \angle CAD \text{ и } \angle CBD = \angle DBA$$

по св-ву хорд

Т.к. углы $\angle BDA$ и $\angle CAD$ опираются на одну дугу, хорду,

то $\angle CAD = \angle BDA$ по св-ву хорд и впис. углов

тогда $\angle BAC = \angle CAD = \angle CBD = \angle DBA = \alpha$. Тогда $ABED$ - параллелограмм
 $\Rightarrow BD = CA = a$.

имеем: $a^2 = xb + x^2$ xb

$(b - b \cdot 1) \quad a + x > b \text{ и } 2x > a$
 $\triangle ABD \quad \triangle BCD$

В формуле в левом члене a , поэтому когда мы найдем b , что $a^2 = 1 + b$ $a, b \in \mathbb{N}$ и $a + x \leq b$, то дальше будем искать

Решая, т.к. $a + x \leq b$ будем подбирать и дальше.

$$a^2 = 1 + b$$

$$b = 3$$

$$a = 2$$

но $2 + 2 = 4$ - тогда $a + x > b$ неверно.

при $x = 2$.

$$a^2 = 2b + 4$$

при $b = 1, 2, 3, 4, 5$ - нечет. квадраты.

при $b = 6$. $a^2 = 2 \cdot 6 + 4 = 16$ $a = 4$.

но $4 + 2 = 6$, $a + x > b$ неверно.

при $x = 3$.

$$a^2 = 3b + 9 = 3(b + 3) \Rightarrow a^2 : 3. \text{ Т.к. } 3 - \text{простое} \Rightarrow a^2 : 9 \Rightarrow a = 3k$$

Числовик (7).

$$\begin{array}{l} 9k^2 = 3b+9 \\ :9 \quad :9 \end{array} \Rightarrow b:3 \Rightarrow b=1.$$

$$\begin{array}{l} 9k^2 = 9l+9 \\ k^2 = l+1 \Rightarrow l=1, k=2 \\ b=9, a=6. \end{array}$$

Но $6+9=9$. а $x > b$ неверно.

при $x=4$

$$a^2 = 4b+16. \text{ при } b=1, 2, 3, 4 \text{ не квадраты}$$

$$\text{при } b=5, a^2=36, a=6.$$

$4+6 > 5$ - верно $2 \cdot 4 > 6$ верно.

значит стороны это $x=4, a=6, b=5$.

опустим высоты BH_1 и CH_2 , тогда

$$AH_1 = H_2D = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}.$$

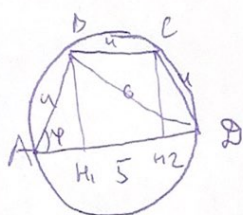
$$\sin \varphi = \frac{BH_1}{AB} = \frac{\sqrt{4^2 - \frac{1}{4}}}{4} = \frac{\sqrt{16\frac{1}{4}}}{4} = \frac{\sqrt{6\frac{1}{4}}}{4} = \frac{\sqrt{25}}{8} = \frac{5\sqrt{7}}{8}$$

$$\text{т.к. } ABD - \text{вне } \Delta.$$

$$\text{тогда } R = \frac{BD}{2\sin \varphi}$$

$$R = \frac{6}{2 \cdot \frac{5\sqrt{7}}{8}} = \frac{24}{5\sqrt{7}} = \frac{8}{\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

Ответ: ~~$\frac{8\sqrt{7}}{7}$~~ $\frac{8\sqrt{7}}{7}$.



Ученик ⑧

Задача №.

$$① \quad x^3 + 2x^2 + x + a + x^3 - 2x^2 + x - a < 4x^2 + 8x.$$

$$2x^3 + 2x < 4x^2 + 8x.$$

$$x^3 - 2x^2 + 5x < 0$$

$$x(x^2 - 2x + 5) < 0.$$

$$x((x-1)^2 + 4) < 0$$

Всегда +.

$x < 0$ — решение при

$$\begin{cases} a > x^3 - 2x^2 + x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < -x^3 - 2x^2 - x. \end{cases}$$

$$② \quad -x^3 - 2x^2 - x - a \leq x^3 + 2x^2 - x + a < 4x^2 + 8x.$$

$$-2x^3 - 2x < 4x^2 + 8x,$$

$$x^3 + 4x^2 + 5x > 0$$

$$x((x+2)^2 + 1) \neq 0.$$

Всегда +.

$x > 0$ — решение при

$$\begin{cases} a < x^3 - 2x^2 + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > -x^3 - 2x^2 - x. \end{cases}$$

$$③ \quad x^3 + 2x^2 + x + a - x^3 + 2x^2 - x + a < 4x^2 + 8x$$

$$2a < 8x$$

$$a < 4x$$

$$x > \frac{a}{4} \text{ — решение при}$$

$$\begin{cases} a > -x^3 - 2x^2 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < x^3 - 2x^2 + x \end{cases}$$