**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

# ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**
Профиль олимпиады: **Математика**
ФИО участника олимпиады: **Ткачук София Александровна**
Класс: **10-11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Ткачук София Александровна

Класс: 10-11

| **Задача 1** | **Задача 2** | **Задача 3** | **Задача 4** | **Задача 5** | **Задача 6** | **Тех. балл*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 баллов | 20 баллов | 15 баллов | 20 баллов | 0 баллов | 5 баллов | 80 баллов |

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.
Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.
Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

№1. Вариант 11-1 чистовик

Рассмотрим первые 2022 числа последовательности
6, 7, 8, 9, 10, ... 2027

Среди них 43 квадрата чисел от 3 до 45
(т.к. $3^2 = 9$, $45^2 = 2025$, а $46^2 > 2027$) и 11
кубов чисел от 2 до 12 (т.к. $2^3 = 8$, $12^3 = 1728$,
$13^3 = 2197 > 2027$). Однако среди выбранных
чисел есть 2 числа, одновременно являющиеся
кубом и квадратом ($64 = 4^3 = 8^2$, $729 = 9^3 = 27^2$).
Поэтому всего из первых 2022 чисел
последовательности будет удалено $43 + 11 - 2 =$
$= 52$ числа.

Рассмотрим следующие 52 числа последовательности
2028 ... 2079

Среди них не будет ни кубов, ни квадратов:

$45^2 = 2025$, $46^2 = 2116 > 2079$

$12^3 = 1728$, $13^3 = 2197 > 2079$.

Поэтому на 2022-м месте окажется
число 2079

Ответ: 2079

ЧИСТОВИК

№2.

$$(8x^3+4x^2-18x-9)\cdot\arccos(x-1)\le\arccos\left(\frac{1}{4\cos40^\circ}+\frac{\sqrt3}{4\cos50^\circ}\right)$$

$$\arccos\left(\frac{1}{4\cos40^\circ}+\frac{\sqrt3}{4\cos50^\circ}\right)=\arccos\left(\frac{\cos50^\circ+\sqrt3\cos40^\circ}{4\cos40^\circ\cos50^\circ}\right)=$$

$$=\arccos\left(\frac{\cos50^\circ+\sqrt3\sin50^\circ}{4\cos50^\circ\sin50^\circ}\right)=\arccos\left(\frac{\frac12\cos50^\circ+\frac{\sqrt3}{2}\sin50^\circ}{2\cos50^\circ\sin50^\circ}\right)=$$

$$=\arccos\left(\frac{\sin30^\circ\cos50^\circ+\cos30^\circ\sin50^\circ}{\sin100^\circ}\right)=\arccos\left(\frac{\sin80^\circ}{\sin100^\circ}\right)=$$

$$=\arccos\left(\frac{\sin(180^\circ-100^\circ)}{\sin100^\circ}\right)=\arccos1=0$$ т.к. $\sin(180^\circ-x)=\sin x$

$$(8x^3+4x^2-18x-9)\cdot\arccos(x-1)\le0$$

1) $8x^3+4x^2-18x-9=0$

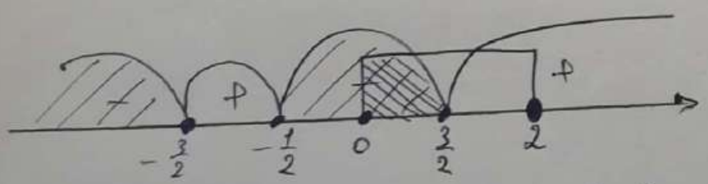
$(2x-3)(2x+3)(2x+1)=0$

$x=\frac32;\ -\frac32;\ -\frac12$

2) ОДЗ: $-1\le x-1\le1$

$0\le x\le2$

$\arccos(y)\in[0;\pi]$ – не влияет на знак неравенства




Ответ: $\left[0;\frac32\right]\cup\{2\}$

2

№4.

$a_1 = \frac{4043}{2022}$, $a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$

$|a_n| \le \frac{2022}{2021} = \frac{2021+1}{2021} = 1 + \frac{1}{2021}$ - ?

$a_1 = \frac{4044-1}{2022} = 2 - \frac{1}{2022}$

$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n - 1 + 1 = (a_n - 1)^3 + 1$

$a_1 = 2 - \frac{1}{2022}$, $a_2 = (a_1 - 1)^3 + 1 = \left(1 - \frac{1}{2022}\right)^3 + 1$

$a_3 = (a_2 - 1)^3 + 1 = \left(1 - \frac{1}{2022}\right)^9 + 1$

$a_4 = (a_3 - 1)^3 + 1 = \left(1 - \frac{1}{2022}\right)^{27} + 1$

Значит, $a_n = \left(1 - \frac{1}{2022}\right)^{3^{(n-1)}} + 1$, $|a_n| = a_n$

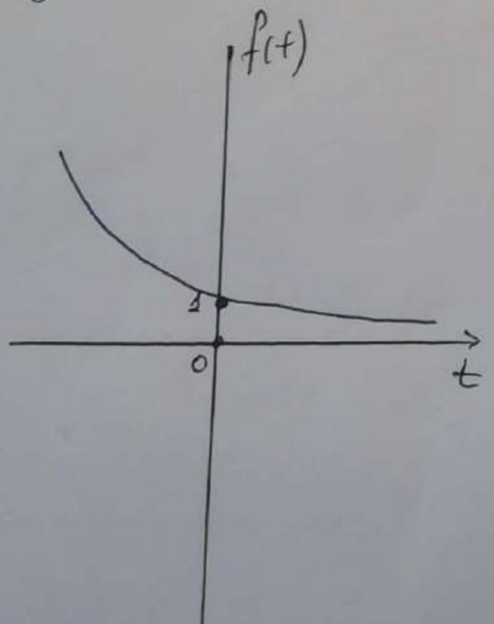
$3^{(n-1)} = t$, $t \ge 1$

$\left(1 - \frac{1}{2022}\right)^t + 1 \le 1 + \frac{1}{2021}$

$\left(1 - \frac{1}{2022}\right)^t \le \frac{1}{2021}$

$\left(\frac{2021}{2022}\right)^t \le \frac{1}{2021}$

Пусть $f(t) = \left(\frac{2021}{2022}\right)^t$. Т.к. $\frac{2021}{2022} < 1$, то $f(t)$ монотонно убывает и с увеличением $t$ стремится к 0




Значит, найдется такое $n$, что $t = 3^{(n-1)}$ и $\left(\frac{2021}{2022}\right)^t \le \frac{1}{2021}$.

Ответ: Да

чистовик

№6

$$|x^3+2x^2+x+a|+|x^3-2x^2+x-a|<4x^2+8x$$

① $\begin{cases} x^3+2x^2+x+a\geq 0 \\ x^3-2x^2+x-a\leq 0 \end{cases}$

$x^3+2x^2+x+a-x^3+2x^2-x+a<4x^2+8x$

$4x^2+2a<4x^2+8x$

$8x>2a$

$x>\frac{2a}{8}=\frac{a}{4}$

② $\begin{cases} x^3+2x^2+x+a\leq 0 \\ x^3-2x^2+x-a\geq 0 \end{cases}$

$-x^3-2x^2-x-a+x^3-2x^2+x-a<4x^2+8x$

$-4x^2-2a<4x^2+8x$

$8x^2+8x>-2a$

$4x^2+4x>-a$

$4x^2+4x+1=1-a$

$(2x+1)^2=1-a$

$2x+1=\pm\sqrt{1-a}$

$x=\frac{\pm\sqrt{1-a}-1}{2}$

③ $\begin{cases} x^3+2x^2+x+a\geq 0 \\ x^3-2x^2+x-a\geq 0 \end{cases}$

$x^3+2x^2+x+a+x^3-2x^2+x-a<4x^2+8x$

$x^3-2x^2-3x<0$

$x=0;\ 3;\ -1$

$x=-1$: $\begin{cases} a\geq 0 \\ a\leq -4 \end{cases}$ – нет таких $a$

$x=0$: $\begin{cases} a\geq 0 \\ a\leq 0 \end{cases}$ – $a=0$ – не подходит (между корнями нет расстояния 1)

④ $\begin{cases} x^3+2x^2+x+a\leq 0 \\ x^3-2x^2+x-a\leq 0 \end{cases}$

$-x^3-2x^2-x-a-x^3+2x^2-x+a<4x^2+8x$

$-2x^3-2x<4x^2+8x$

$-2x^3-4x^2-10x<0$

$x^3+2x^2+5x>0$

$x^3+2x^2+5x=0$

$x(x^2+2x+5)=0$

$x=0$ – не подходит

$x^2+2x+5=0$

$D=4-4\cdot 1\cdot 5<0$ – нет решений.

Остаются корни $x=\frac{a}{4}$, $x=\frac{\pm\sqrt{1-a}-1}{2}$, $x=3$

чистовик

1) $x=3$

$$\begin{cases} x^3+2x^2+x+a\ge 0 \to a\ge -48 \\ x^3-2x^2+x-a\ge 0 \to a\le 12 \end{cases}$$ $a\in[-48;12]$ (1)

2) $x=\frac{a}{4}$

$$\begin{cases} x^3+2x^2+x+a\ge 0 \\ x^3-2x^2+x-a\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3+8a^2+16a+64a\ge 0 \\ a^3-8a^2+16a-64a\le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^3+8a^2+80a\ge 0 \\ a^3-8a^2-48a\le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(a^2+8a+80)\ge 0 \to a\ge 0 \\ a(a^2-8a-48)\le 0 \to \cancel{a\in[-4;12]} \end{cases}$$ $a\in[0;12]$ (2)

3) $a=-4x^2-4x$

$x=\frac{\pm\sqrt{1-a}-1}{2}$

$$\begin{cases} x^3+2x^2+x+a\le 0 \\ x^3-2x^2+x-a\ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3+2x^2+x-4x^2-4x\le 0 \\ x^3-2x^2+x+4x^2+4x\ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3-2x^2-3x\le 0 \\ x^3+2x^2+5x\ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x^2-2x-3)\le 0 \to x\in(-\infty;-1]\cup[0;3] \\ x(x^2+2x+5)\ge 0 \to x\ge 0 \end{cases}$$

$x\ge 0$; $a=-4x^2-4x\le 0$ (3)

1) $x=3$; $x=\frac{a}{4}$

1) $a=8$; $x_1=3$, $x_2=2$, $r=1$

$a=8$ уд. (1) и (2)

2) $a=16$, $x_1=3$, $x_2=4$, $r=1$

$a=16$ не уд. (2) и (1)

2) $x=\frac{a}{4}$, $x=\frac{\pm\sqrt{1-a}-1}{2}$ — (2) $\to a\ge 0$; (3) $a\le 0$ — $a=0$ не подходит, нет решений

3) $x=3$, $x=\frac{-\sqrt{1-a}-1}{2}<0$ — расстояние не может быть равно 1

$x=3$, $y=\frac{\sqrt{1-a}-1}{2}$ — расстояние не может быть равно 1

Ответ: $a=8$

№6.

$$|x^3+2x^2+x+a|+|x^3-2x^2+x-a|<4x^2+8x.$$

~~1) $x^3-2x^2+x-a<0$~~

~~$x^3+2x^2+x+a>0$~~

~~$x^3+2x^2+x+a-x^3+2x^2-x+a<4x^2+8x$~~

~~$4x^2$ $x^3+2x^2+x+$~~

$2|2x^2+a|$

$2|x^3+x|$

$$|x^3+2x^2+x+a|+|x^3-2x^2+x-a|<4x^2+8x.$$

① $\begin{cases} x^3+2x^2+x+a>0 \\ x^3-2x^2+x-a<0 \end{cases}$

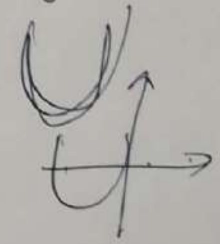
$\cancel{x^3}+2x^2\cancel{+x}+a\cancel{-x^3}+2x^2\cancel{-x}+a<4x^2+8x$

$\cancel{4x^2}+2a<\cancel{4x^2}+8x$

$8x>2a$

$x>\frac{2a}{8}$ – промежуток не длины 1?

② $\begin{cases} x^3+2x^2+x+a<0 \\ x^3-2x^2+x-a>0 \end{cases}$



$\cancel{-x^3}-2x^2\cancel{-x}-a\cancel{+x^3}-2x^2\cancel{+x}-a<4x^2+8x$

$-4x^2-2a<4x^2+8x$

$8x^2+8x>-2a$

$4x^2+4x>-a$

$4x^2+4x+a>0$ – промежуток не длины 1.

③ $\begin{cases} x^3+2x^2+x+a>0 \\ x^3-2x^2+x-a>0 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x^3+2x^2+x+a<0 \\ x^3-2x^2+x-a<0 \end{cases}$

$x^3\cancel{+2x^2}+x\cancel{+a}+x^3\cancel{-2x^2}+x\cancel{-a}<4x^2+8x$

$2x^3+2x<4x^2+8x$

$2x^3-4x^2-6x<0$

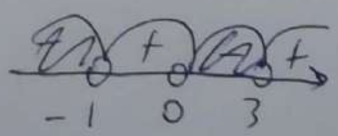
~~$x^3-2x^2-3x<0$~~

$x^3-2x^2-3x<0$

$x(x^2-2x-3)<0$

$x=0$ $\quad x_1+x_2=2$ $\quad x_1=3$

$x_1\cdot x_2=-3$ $\quad x_2=-1$



$-x^3\cancel{-2x^2}-x\cancel{-a}-x^3\cancel{+2x^2}-x\cancel{+a}<4x^2+8x$

$-2x^3-2x<4x^2+8x$

$-2x^3-4x^2-10x<0$

$x^3+2x^2+5x>0$

$x(x^2+2x+5)>0$

$-1+2-1+a>0$ $\quad -1+2-1+a>0$

$-1-2-1-a>0$ $\quad -1-2-1-a>0$

$a<-4$ $\quad a<-4$

ЧЕРНОВИК

$\frac{a^3}{64} + \cancel{2}\frac{a^2}{\cancel{16}8} + \frac{9}{4} + a \geq 0$

$D = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 80$

$a^3 + \cancel{1}8a^2 + 16a + 64a \geq 0$

$a^3 - 8a^2 + 16a - 64a$

$a_1 + a_2 = 8 \quad a_1 = 12$

$a_1 \cdot a_2 = -48 \quad a_2 = -4$

$a \leq 1$

$a = 0; -4; 12$

$-4 \quad 0 \quad 12$

$x(x^2 - 2x - 3) \leq 0$

$-1 \quad 0 \quad 3$

$x \in [0; 3]$

$x(x^2 + 2x + 5) \geq 0$

$x \geq 0$

$-4x^2 - 4x \leq 1$

$-4x^2 - 4x - 1 \leq 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_1 + x_2 = 2 \quad x_1 = 3$

$x_1 \cdot x_2 = -3 \quad x_2 = -1$

$\frac{\sqrt{1-a} - 1}{2} = 4$

$0; 3; -1$

$\sqrt{1-a} - 1 = 8$

$\sqrt{1-a} = 9$

$-1 \quad 0 \quad 3$

$1 - a = \cancel{3}\ 27$

$a = -26$

$x\cancel{p} = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$

$a = b = c = a$

$x\cancel{p} = \sqrt{\frac{(a^2+ad)(ad+a^2)}{a^2+ad}} = \sqrt{a^2+ad}$

$a = 1, 2, 3, 4 \ldots$

$x\cancel{p}, a, d \in \mathbb{Z}$

$a = 1 \quad x\cancel{p} = \sqrt{1+d} \to d = 3$

$4 + 2d = 9$

$p = \quad 2d = 5$

$3 \quad 6$

$9 + 3d = 25$

$3d = 16 \quad 9 + 3d = 16$

$3d = 5$

$16 + 4d = 25$

$4d = 9 \quad 36 = 16 + 4d \quad 4 \quad 8$

$4d = 20$

ЧЕРНОВИК

1 2018
6, 7, 8, 9, 10 ... 2027

$2^3 = 8$ ... $12^3 = 1728$   11 чисел − 2 = 9

$-\frac{2079}{2018}$
$\quad 51+1$

3 .. 45 − 43 числа
43+9 = 52

2028 ... 2079 − кубов нет
квадрат: $46^2 = 2116$ − нет квадратов.

$\times\frac{46}{46}$ 276, 184, 2116

Ответ: $\boxed{2079}$

$(4x^2-9)(2x+1)$
$8x^3+4x^2-18x-9$

$(8x^3+4x^2-18x-9)\cdot \arccos(x-1) \le$ ~~arccos~~ 
$\arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ}+\frac{\sqrt3}{4\cos 50^\circ}\right)$

$\arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ}+\frac{\sqrt3}{4\cos 50^\circ}\right) = \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ}+\frac{\sqrt3}{4\sin 40^\circ}\right) =$

$= \arccos\left(\frac{\sin 40^\circ+\sqrt3\cos 40^\circ}{4\cos 40^\circ\sin 40^\circ}\right) = \arccos\left(\frac{\frac12\sin 40^\circ+\frac{\sqrt3}{2}\cos 40^\circ}{2\cos 40^\circ\sin 40^\circ}\right)$

$= \arccos\left(\frac{\cos 60^\circ\sin 40^\circ+\sin 60^\circ\cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}\right) = \arccos\left(\frac{\sin 100^\circ}{\sin 80^\circ}\right)$

$= \arccos\left(\frac{\sin(180-\alpha)}{\sin\alpha}\right) = \arccos(1) = 0$

$0 \le x \le \frac32$
$-1 \le x-1 \le 0{,}5$

$\frac32 \le x \le 2$
$0{,}5 \le x-1 \le 1$

$(8x^3+4x^2-18x-9)\cdot\arccos(x-1) \le 0$

1) $8x^3+4x^2-18x-9=0$

$\frac32$ − ?   $(x-\frac32)$   $(2x-3)$

$8\cdot\frac{27}{8}+4\cdot\frac94-\frac{18\cdot3}{2}-9 =$
$= 27+9-27-9=0$

$(2x-3)(4x^2+8x+3)=0$

$4x^2+8x+3=0$
$D = 64-4\cdot4\cdot3 = 64-48 = 16 = 4^2$
$x_1 = \frac{-8-4}{8} = -\frac{12}{8} = -\frac32$
$x_2 = \frac{-8+4}{8} = -\frac12$

$8x^3+4x^2-18x-9 \;|\; 2x-3$
$-\;8x^3-12x^2 \quad\quad 4x^2+8x+3$
$\quad 16x^2-18x$
$-\;16x^2-24x$
$\quad 6x-9$
$-\;6x-9$
$\quad 0$

arccos: $[0;\pi]$ → 0

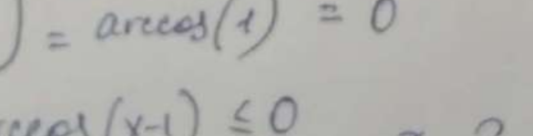
$4(x+\frac32)(x+\frac12) = (2x+3)(2x+1) =$
$= 4x^2+2x+6x+3 = 4x^2+8x+3$

2) $\arccos(x-1)=0$
$x-1 = 1$
~~x=0~~  $x=2$

$-1 \le x-1 \le 1$
$0 \le x \le 2$

$\frac32 \quad -\frac32 \quad -\frac12$
$(2x-3)(2x+3)(2x+1)\cdot(\arccos(x-1)) \le 0$

−



$\frac92 \quad \frac42 \quad \frac{3{,}5}{2} = \frac74$

$[0;\frac32] \cup \{2\}$

9

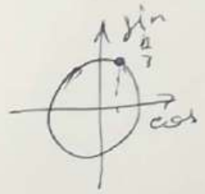
ЧЕРНОВИК

№1.

6, 7, 8, 9, 10 ... 2027 2028 ~~2022~~ 2029 ...

$2^3=8$ 19 18
$3^3=27$ 37 24
$4^3=64$ 61 30
$5^3=125$ 91
$6^3=216$

$$a_n=\left(1-\frac{1}{2022}\right)^{3^{(n-1)}}+1$$



$144 \times 12 = 288 + 144 = 1728$

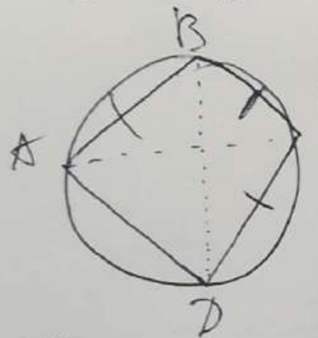
$2027-6^2 = 2021+1 = 2022$

~~№2 ...~~

$$(8x^3+4x^2-18x-9)\cdot\arccos(x-1)\le\arccos\left(\frac{1}{4\cos40^\circ}+\frac{\sqrt3}{4\cos50^\circ}\right)$$

$$\left(\frac{1}{4\cos40^\circ}+\frac{\sqrt3}{4\sin40^\circ}\right)=\left(\frac{\sin40^\circ+\sqrt3\cos40^\circ}{4\cos40^\circ\sin40^\circ}\right)=$$

$$=\left(\frac{\frac12\sin40^\circ+\frac{\sqrt3}{2}\cos40^\circ}{2\sin40^\circ\cos40^\circ}\right)=\left(\frac{\sin(40^\circ+\frac{\pi}{3})}{\sin80^\circ}\right)\left(\frac{\sin(100^\circ)}{\sin80^\circ}\right)$$



1, 2

$3^2=9$
$4^2=16$
$5^2=25$
$6^2=36$
$7^2=49$
$8^2=64$
$9^2=81$
$10^2=100$
$11^2=121$
$12^2=144$
$13^2=169$
$14^2=196$
$15^2=225$
$16^2=256$
$17^2=289$
$18^2=324$
$19^2=361$
$20^2=400$
$21^2=441$

$2^3=8$
$3^3=27$
$4^3=64$
$5^3=125$
$6^3=216$
$7^3=343$
$8^3=512$
$9^3=729$
$10^3=1000$
$11^3=1331$
$12^3=1728$
$13^3=2197$
$14^3=2744$

$23\times23=529$, $22\times22=484$, $24\times24=576$, $14\times14=196$, $196\times14=2744$, $27\times27=729$, $26\times26=676$, $7\times7=49$, $49\times7=343$, $64\times8=512$, $121\times11=1331$, $144\times12=1728$, $169\times13=2197$, $12\times12=144$, $13\times13=169$, $45\times45=2025$

$2080-2028=52$

$22^2=484$
$23^2=529$
$24^2=576$
$25^2=625$
$26^2=676$
$27^2=729$
...

$50^2=2500$
$40^2=1600$

$2^3=8$
$3^3=27$
$2^6=64$
$5^3=125$
$2^3\cdot3^3=216$
$7^3=343$

$2^9=512$
$3^6=729$
$2^3 5^3=1000$
$11^3=1331$
$3^3\cdot4^3=1728$
$2^3\cdot7^3=2744$

$x^2\le2000$ число, явл. и кубом и квадратом?

$45^2=2025$

$\boxed{3\ldots45 \text{ — минус 43 числа}}$

2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12 — минус 9 чисел

$43+9=52$

2028 ... 2080

ЧЕРНОВИК

~~№2~~.

№4.

$$a_1 = \frac{4043}{2022}, \quad a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$$

$$|a_n| \le \frac{2022}{2021} = \frac{2021+1}{2021} = 1 + \frac{1}{2021}$$

$$a_1 = \frac{4044-1}{2022} = 2 - \frac{1}{2022}$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x \cancel{-1} + 1 = (x-1)^3$$

$$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$(x-1)(x^2-2x+1) = x^3 - 2x^2 + x - x^2 + 2x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$x = a_n$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 = (x-1)^3 + 1$$

$\frac{4}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{9}{25}$ $\frac{27}{125}$

$$a_{n+1} = (a_n-1)^3 + 1$$

$$a_2 = \left(2 - \frac{1}{2022} - 1\right)^3 + 1 = \left(1 - \frac{1}{2022}\right)^3 + 1$$

$$|a_n| \le 1 + \frac{1}{2021}$$

$$|(a_{n-1}-1)^3 + 1| \le 1 + \frac{1}{2021}$$

$$(a_{n-1}-1)^3 \le \frac{1}{2021}$$

$$a_1 = 2 - \frac{1}{2022}, \quad a_{n+1} = (a_n-1)^3 + 1$$

$$a_{n-1} - 1 \le$$

$$a_3 = (a_2-1)^3 + 1 = \left(\left(1 - \frac{1}{2022}\right)^3\right)^3 + 1 = \left(1 - \frac{1}{2022}\right)^{27} + 1$$

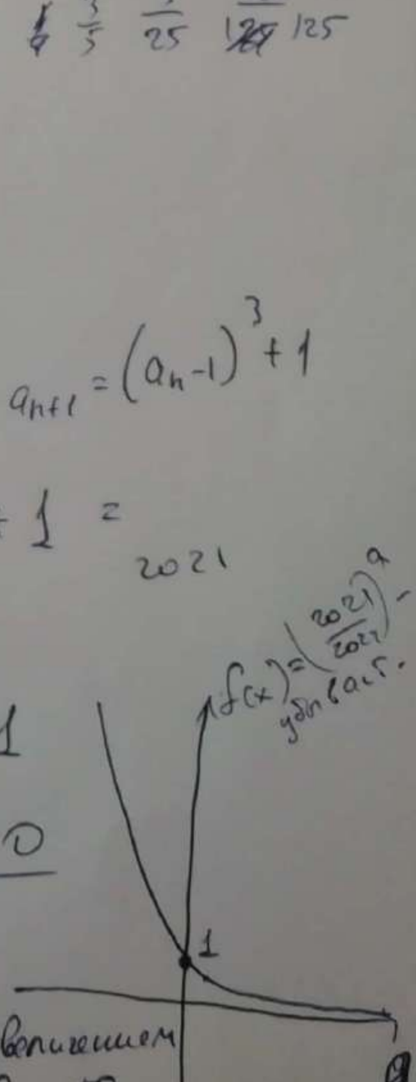
2021

$$a_4 = (a_3-1)^3 + 1 = \left(1 - \frac{1}{2022}\right)^{81} + 1$$

$$\left(1 - \frac{1}{2022}\right)^a \le \frac{1}{2021}, \quad a > 0$$

$$\left(\frac{2021}{2022}\right)^a \le \frac{1}{2021} = 1 - \frac{2020}{2021}$$

$$\left(\frac{2021}{2022}\right)^a + \frac{2020}{2021} \le 1$$




Т.к. $f(x)$ с увеличением $a$ стремится к 0, то обязательно найдется $a$ такое, что $\left(\frac{2020}{2022}\right)^a \le \frac{1}{2021}$

ЧЕРНОВИК

1) $2|2x^2+a| = 4x^2+8x$

$|2x^2+a| = 2x^2+4x$

1) $2x^2+a \geq 0$

$a > -2x^2$

$\cancel{2x^2}+a = \cancel{2x^2}+4x$

$a = 4x$

$x = \frac{a}{4}$

2) $2x^2+a < 0$

$a < -2x^2$

$-2x^2-a = 2x^2+4x$

$a = -4x^2-4x$

2) $2|x^3+x| = 4x^2+8x$

$|x^3+x| = 2x^2+4x$ $\quad x(\cancel{x^2+1}) \geq 0$

1) $x^3+x \geq 0$

$x^3+x-2x^2-4x=0$

$x^3-3x-2x^2=0$

$x(x^2-2x-3)=0$

$x=0$ $\quad x_1+x_2=2$ $\quad x_1=3$

$x_1 \cdot x_2 = -3$ $\quad x_2=-1$

0; 3;

2) $x^3+x \leq 0$

$x \leq 0$

$-x^3-x-2x^2-4x=0$

$x^3+x+2x^2+4x=0$

$x^3+2x^2+5x=0$

$x(x^2+2x+5)=0$

$x=0$ $\quad D = 4-4\cdot1\cdot5 -$

нет реш.

$4x^2+4x+a=0$

$4x^2+4x+1+a=1$

$(2x+1)^2-1 = -a$

$(2x+1)^2 = -a+1$

$2x+1 = \pm\sqrt{1-a}$

$x = \frac{\pm\sqrt{1-a}-1}{2}$ $\qquad x=\frac{a}{4}$

1) $x=3$

$\begin{cases} x^3+2x^2+x+a \geq 0 \\ x^3-2x^2+x-a \geq 0 \end{cases} \to$

$27+18+3+a \geq 0 \to$

$27-18+3-a \geq 0$

$a \geq -48, \; a \leq 12$

$x=0;\ 3$

2) $x=\frac{a}{4} \to$

$\frac{a^2}{8}+a \geq 0$

$a^2+8a \geq 0$

$d\left(x=3,\ x=\frac{a}{4}\right)=1 \to a=8$

или $a=16 \to a=\frac{a}{4}$ не корень

$d\left(x=\frac{a}{4},\ x=\frac{-\sqrt{1-a}-1}{2}\right)=1$ — нет решений

$d\left(\frac{-\sqrt{1-a}-1}{2};\ 3\right)$ — нет решений

$x^3+2x^2+x+a \geq 0$

$x^3+2x^2-x+a \geq 0$

$-x^3+2x^2-x+a \geq 0$

$4x^2+2a \geq 0$

$a=4x$

$4x^2+8x \geq 0$

$x^2+2x \geq 0$

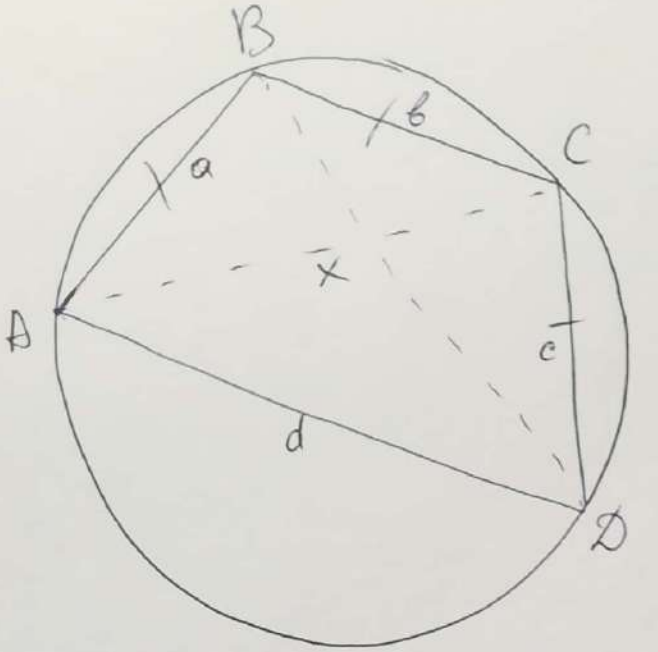
$x(x+2) \geq 0$

$x=0;\ -2$

12

чистовик

№3.




$AB = BC = CD$

$AB, AC, AD, BC, BD, CD$ — целые

$P = a+b+c+d$

$a = b = c$

$P = 3a+d$

$$x = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} = \sqrt{\frac{(a^2+ad)(ad+a^2)}{a^2+ad}} = \sqrt{a^2+ad}$$

$a < x < 2a$

1) $a=1$ — $a<x<2a$ не выполняется при $x \in \mathbb{Z}$

2) $a=2 \to x=3$, $3=\sqrt{4+2d}$ — нет целых $d$

3) $a=3 \to x = 4$ или $5$

 1) $x=4$: $4=\sqrt{9+3d}$ — нет целых $d$

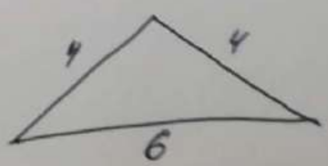
 2) $x=5$: $5=\sqrt{9+3d}$ — нет целых $d$

4) $a=4 \to x = 5, 6, 7$ — нет целых $d$

 1) $x=5$: $5=\sqrt{16+4d}$

 2) $x=6$: $6=\sqrt{16+4d} \Rightarrow d=5$

$P = 3a+d = 3\cdot4+5 = 17$




Тогда $R = R$ опис. около $\triangle ABC$.

$\frac{P}{2} = \frac{4+4+6}{2} = 7$, $S = \sqrt{3\cdot3\cdot7} = 3\sqrt{7}$

$S = \frac{abc}{4R}$, $R = \frac{abc}{4S} = \frac{4\cdot4\cdot6}{4\cdot3\sqrt{7}} = \frac{24}{3\sqrt{7}} = \frac{8}{\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$

Ответ: $\frac{8\sqrt{7}}{7}$